Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications

Responsable : Adrien Hardy, email : adrien.hardy@univ-lille.fr

Feuille d'exercices 1
Rappels de théorie de la mesure

Remarque préliminaire : $\mathbb{R}$ sera ici toujours équipé de sa tribu borélienne $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 1. Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que :

(a) Pour tout $A, B \in \mathscr{T}$, on a

$$\mu(A \cup B) \leq \mu(A) + \mu(B)$$

et, si on suppose de plus que $\mu(E) < \infty$,

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B).$$

(b) Si $A_n \in \mathscr{T}$ et $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\Big(\bigcup_{n\geq 1} A_n \Big).$$

Exercice 2. On veut montrer que toute fonction étagée est mesurable. Soit $(E, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $A \in \mathscr{P}(E)$. Montrer que la fonction caractéristique $\mathbf{1}_A : E \to \mathbb{R}$ est mesurable $\Leftrightarrow A \in \mathscr{T}$. Conclure.

Exercice 3. (a) Montrer que $\mathbb{Q} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et calculer sa mesure de Lebesgue.

(b) On considère la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$. Quelle est son intégrale pour la mesure de Lebesgue ? Que peut-on dire de son intégrale de Riemann ?

Exercice 4. Soit E un ensemble et $a \in E$. La *masse de Dirac en a* est l'application définie sur $\mathscr{P}(E)$ par

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) Montrer que δ_a est une mesure (on l'appelle aussi la *mesure de Dirac*).

(b) Montrer que pour toute fonction $f : E \to \mathbb{R}_+$, on a

$$\int f \, \delta_a = f(a).$$

(c) On équipe $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$ de la mesure μ définie par

$$\mu(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k(A).$$

Montrer que toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ est mesurable et que

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{\infty} f(k).$$

Exercice 5. Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(E', \mathscr{T}')$ un espace mesurable. On se donne une application $\varphi : E \to E'$ mesurable.

(a) Montrer que la *mesure image* $\varphi_*\mu$ définie par $\varphi_*\mu(A) := \mu(\varphi^{-1}(A))$ pour tout $A \in E'$ est bien une mesure sur $(E', \mathscr{T}')$.

(b) Montrer que pour toute fonction mesurable $f : E' \to \mathbb{R}_+$ on a :

$$\int_{E'} f(x)\, \mathrm{d}\varphi_*\mu(x) = \int_E f \circ \varphi(y)\, \mathrm{d}\mu(y).$$

(c) Si $(E, \mathscr{T}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}), \mu)$ avec μ la mesure de Lebesgue et $\varphi(x) = x^3$, donner une forme explicite à $\varphi_*\mu$. Même question si $(E, \mathscr{T}, \mu)$ est maintenant l'espace mesuré de l'exercice 4(c).

Exercice 6. Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : E \to \mathbb{R}_+$ un fonction mesurable. On considère la mesure ν définie par

$$\nu(A) := \int \mathbf{1}_A\, f\, \mathrm{d}\mu.$$

Montrer que ν est une mesure sur $(E, \mathscr{T}, \mu)$.

Exercice 7*. On considère la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ donnée par $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. On note $[x]$ la classe d'équivalence associée à $x \in [0, 1]$ pour cette relation et $\mathscr{C}$ l'ensemble des classes d'équivalence.

(a) Montrer que les classes d'équivalences forment une partition de $[0, 1]$, c'est-à-dire que $[x] \cap [y] \neq \varnothing \Leftrightarrow x \sim y$ et

$$\bigcup_{[x]\in\mathscr{C}} [x] = [0, 1].$$

Pour tout $[x] \in \mathscr{C}$, on choisit un élément $p_{[x]} \in [x]$ de façon arbitraire et on considère l'ensemble $V = \{p_{[x]} : [x] \in \mathscr{C}\}$ (le fait que V soit un ensemble bien défini requiert l'Axiome du choix). On note $V + q := \{x + q : x \in V\}$ l'ensemble V translaté par q.

(b) Montrer qu'on a les inclusions d'ensembles

$$[0, 1] \subset \bigcup_{q\in[0,1]\cap\mathbb{Q}} V + q \subset [0, 2].$$

(c) En utilisant la propriété d'invariance par translation de la mesure de Lebesgue μ de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\mu(A) = \mu(A + x)$ pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire que $V \notin \mathscr{B}(\mathbb{R})$.