

ESPACES DE BANACH POSSÉDANT TRÈS PEU D'OPÉRATEURS
[d'après S. Argyros et R. Haydon]

par Sophie GRIVAUX & Maria ROGINSKAYA

La plus grande faiblesse de la pensée contemporaine me paraît résider dans la surestimation extravagante du connu par rapport à ce qui reste à connaître (André Breton, 1937).

1. INTRODUCTION

1.1. Présentation du problème et résultat principal

Si X et Y sont deux espaces de Banach (réels ou complexes), la seule méthode générale dont on dispose pour construire des opérateurs linéaires bornés de X dans Y est le théorème de Hahn-Banach. Celui-ci permet de construire des formes linéaires continues sur X , et donc des opérateurs de rang 1

$$x^* \otimes y : x \longmapsto \langle x^*, x \rangle y, \quad x^* \in X^*, y \in Y$$

de X dans Y . Pour tous $x^* \in X^*$ et $y \in Y$, $\|x^* \otimes y\| = \|x^*\| \cdot \|y\|$. On peut également construire des opérateurs de rang fini

$$\sum_{i=1}^r x_i^* \otimes y_i : x \longmapsto \sum_{i=1}^r \langle x_i^*, x \rangle y_i, \quad x_i^* \in X^*, y_i \in Y, 1 \leq i \leq r, r \geq 1$$

et, en passant à la limite, des opérateurs de la forme

$$\sum_{i \geq 1} x_i^* \otimes y_i : x \longmapsto \sum_{i \geq 1} \langle x_i^*, x \rangle y_i, \quad x_i^* \in X^*, y_i \in Y, \text{ où } \sum_{i \geq 1} \|x_i^*\| \cdot \|y_i\| < +\infty.$$

De tels opérateurs ont été appelés par Grothendieck *opérateurs nucléaires* [15], [16]. Ils sont évidemment compacts, comme limites en norme d'opérateurs de rang fini. Les seuls opérateurs de X dans Y que l'on puisse construire en général sont donc des opérateurs compacts. Il est alors naturel de se demander quels couples d'espaces (X, Y) ont la propriété que tout opérateur de X dans Y est nécessairement compact. Le théorème classique de Pitt affirme que les couples (ℓ^p, ℓ^r) , $p > r$, ont cette propriété. Si on se restreint au cas où $Y = X$, où X est de dimension infinie, il existe évidemment des opérateurs non compacts sur X , qui sont les multiples de l'opérateur identité (nous appellerons par la suite ceux-ci *opérateurs scalaires*). De manière générale, les seuls opérateurs sur X que l'on puisse construire sans aucune information sur la structure

de X sont donc somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact. D'où la question suivante, mentionnée par exemple par Lindenstrauss dans [19] :

QUESTION 1.1. — *Existe-t-il un espace de Banach de dimension infinie sur lequel tout opérateur est somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact ?*

Nous avons observé plus haut que les opérateurs compacts obtenus en toute généralité à partir du théorème de Hahn-Banach étaient en fait nucléaires. Une version plus naturelle de la Question 1.1 est donc la suivante :

QUESTION 1.2. — *Existe-t-il un espace de Banach de dimension infinie sur lequel tout opérateur est somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur nucléaire ?*

La question de l'existence de couples (X, Y) d'espaces de Banach de dimension infinie tels que tout opérateur (ou tout opérateur compact) de X dans Y est nucléaire remonte à Grothendieck [15], [16], et est très délicate. Pour de très larges classes de couples (X, Y) , il est possible de prouver l'existence d'opérateurs compacts de X dans Y qui ne sont pas nucléaires, mais il existe cependant des couples (X, Y) tels que tout opérateur compact de X dans Y est nucléaire. Cela repose sur la construction de Pisier [23], [24] d'un espace séparable P de dimension infinie, de cotype 2 ainsi que son dual, tel que les produits tensoriels injectifs et projectifs $P \check{\otimes} P$ et $P \hat{\otimes} P$ coïncident. Tout opérateur de P dans lui-même, ou de P dans P^* , qui est limite en norme d'opérateurs de rang fini est nucléaire et tout opérateur borné de P dans P^* est intégral. L'espace P n'ayant pas la propriété d'approximation, il n'est pas possible de déduire directement de ceci que tout opérateur compact de P dans lui-même, ou de P dans P^* , est nucléaire. Cependant, John a prouvé dans [17] que tout opérateur compact de P dans P^* est nucléaire.

La question de l'existence de couples (X, Y) tels que tout opérateur de X dans Y est nucléaire est toujours ouverte, ainsi que la Question 1.2. La Question 1.1 a par contre été résolue récemment par Spiros Argyros et Richard Haydon, dans l'article [3] publié en 2012. C'est le but de cet exposé que de présenter ce travail remarquable, en prouvant le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1. — *Il existe un espace de Banach de dimension infinie, séparable et à dual séparable, sur lequel tout opérateur s'écrit comme somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact.*

Nous dirons qu'un espace de Banach séparable de dimension infinie X possède très peu d'opérateurs si tout opérateur sur X s'écrit comme somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact.

1.2. Quelques propriétés générales des espaces construits par Argyros et Haydon

Il est clair qu'un espace X possédant très peu d'opérateurs est nécessairement *indécomposable* au sens suivant : il n'existe pas de sous-espaces Y et Z de X qui soient fermés, de dimension infinie, et tels que X s'écrive comme somme directe topologique de Y et Z . En effet, si une telle décomposition $X = Y \oplus Z$ existe, la projection de X sur Y parallèlement à Z est un opérateur borné qui ne peut pas s'écrire comme somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact. Les espaces construits par Argyros et Haydon ont en fait une propriété plus forte : ils sont *héréditairement indécomposables*, c'est-à-dire que tous leurs sous-espaces de dimension infinie sont indécomposables. De manière équivalente, les sphères unité de deux sous-espaces de dimension infinie de X sont toujours à distance nulle. Les premiers espaces de Banach héréditairement indécomposables ont été construits par Gowers et Maurey dans [12], et leurs versions complexes possèdent la propriété que tous leurs opérateurs sont somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur *strictement singulier*. Rappelons qu'un opérateur borné T sur X est strictement singulier si la restriction de T à un sous-espace Y de dimension infinie n'est jamais un isomorphisme de Y sur $T(Y)$. Tout opérateur compact est clairement strictement singulier, mais Androulakis et Schlumprecht ont prouvé dans [1] qu'il existe sur les espaces construits dans [12] des opérateurs strictement singuliers non compacts. Nous renvoyons le lecteur à [22] pour un panorama détaillé des constructions d'espaces héréditairement indécomposables et de leurs propriétés. Mentionnons juste la fameuse dichotomie de Gowers [10] [11], qui illustre l'importance de la classe des espaces héréditairement indécomposables : tout espace de Banach contient soit un sous-espace possédant une base inconditionnelle, soit un sous-espace héréditairement indécomposable.

Les espaces construits par Argyros et Haydon dans [3] sont des espaces de Bourgain-Delbaen, et ce sont en particulier des espaces \mathcal{L}^∞ séparables possédant une base de Schauder dont le dual est isomorphe à ℓ^1 . Les premiers espaces de ce type ont été introduits par Bourgain et Delbaen dans l'article [6], et constituent une classe remarquable d'espaces \mathcal{L}^∞ séparables qui leur a permis de résoudre par la négative un certain nombre de conjectures portant sur l'existence d'espaces de Banach ayant telle ou telle propriété. Ils ont par exemple montré l'existence d'un prédual \mathcal{L}^∞ séparable de ℓ^1 , noté Z , ayant la propriété que tout sous-espace de dimension infinie de Z contient un sous-espace réflexif de dimension infinie. Bien sûr, de tels préduaux sont des préduaux isomorphes de ℓ^1 , car tout prédual isométrique de ℓ^1 contient une copie (nécessairement complémentée) de c_0 [32].

Un résultat récent de Freeman, Odell et Schlumprecht [9] illustre bien la surprenante diversité de ces préduaux de ℓ^1 de type Bourgain-Delbaen : tout espace de Banach X dont le dual est séparable se plonge isomorphiquement dans un espace de Bourgain-Delbaen Z qui est un prédual \mathcal{L}^∞ de ℓ^1 . En combinant les méthodes de [3] et [9], les

auteurs de ces deux articles, associés à Raikoftsalis et Zisimopoulou, ont montré que tout espace séparable uniformément convexe se plonge dans un espace Z possédant très peu d'opérateurs [2]. Un tel espace Z est bien sûr indécomposable (puisqu'il possède très peu d'opérateurs), mais si X est décomposable, Z n'est pas héréditairement indécomposable, alors que les espaces construits dans [3] le sont.

1.3. Quelques conséquences

Les espaces X possédant très peu d'opérateurs construits dans [3] ont la propriété que l'algèbre $\mathcal{B}(X)$ des opérateurs bornés sur X est séparable : comme X possède une base de Schauder, tout opérateur compact sur X est limite en norme d'opérateurs de rang fini. Le dual X^* de X étant séparable, il s'ensuit que l'ensemble $\mathcal{K}(X)$ des opérateurs compacts sur X est séparable. Comme $\mathcal{K}(X)$ est un hyperplan de $\mathcal{B}(X)$, $\mathcal{B}(X)$ est séparable. Les espaces de [3] fournissent également les premiers exemples connus d'espaces de dimension infinie tels que $\mathcal{B}(X)$ est moyennable au sens de [18].

Une autre conséquence intéressante de la construction de [3] concerne le problème du sous-espace invariant. Si T est un opérateur linéaire borné sur un espace de Banach séparable X , on appelle *sous-espace invariant non-trivial* de T n'importe quel sous-espace fermé V de X , distinct de $\{0\}$ et X , tel que $T(V) \subseteq V$. Le problème du sous-espace invariant pose la question de savoir si tout opérateur borné sur X admet un sous-espace invariant non trivial. Enflo [8] puis Read [26] ont montré que la réponse à cette question est en général négative, ceci en construisant des espaces X possédant des opérateurs sans sous-espace invariant. Read a ensuite construit dans [27] et [29] de tels opérateurs sur des espaces classiques tels que ℓ^1 ou c_0 , et a même montré l'existence d'opérateurs sur ℓ^1 qui ne possèdent pas de partie fermée invariante non-triviale [28]. Il est possible de montrer, en utilisant des opérateurs de type Read, le résultat suivant [14] : soit Z un espace de Banach non réflexif possédant une base de Schauder. Si X est l'un des espaces $\bigoplus_{\ell^p} Z$ ou $\bigoplus_{c_0} Z$, définis comme somme directe ℓ^p ou c_0 d'une infinité dénombrable de copies de Z , il existe un opérateur borné sur X qui ne possède pas de sous-espace (ni même de fermé) invariant non-trivial.

Le travail d'Argyros et Haydon implique le résultat remarquable suivant : il existe un espace de Banach séparable de dimension infinie sur lequel tout opérateur admet un sous-espace invariant non-trivial. Ceci résulte d'un résultat classique d'Aronszajn et Smith [5], qui affirme que tout opérateur compact admet un sous-espace invariant non-trivial. Ce résultat a été généralisé par Lomonosov, qui a prouvé dans [21] que tout opérateur commutant avec un opérateur compact admet un sous-espace invariant non-trivial. Les résultats de [5] et [21] sont prouvés dans le cas des espaces de Banach complexes, mais Sirotkin a donné dans [31] une version du résultat de Lomonosov valable dans le cadre réel. Argyros et Motakis ont montré dans [4] l'existence d'un espace réflexif séparable héréditairement indécomposable sur lequel tout opérateur admet un sous-espace invariant non-trivial. Mentionnons qu'aucun exemple d'espace réflexif possédant

très peu d'opérateurs n'a été à ce jour construit. Le problème du sous-espace invariant est ouvert dans le cas réflexif, en particulier dans le cas hilbertien, et constitue l'un des principaux problèmes ouverts en théorie des opérateurs. Nous renvoyons le lecteur aux articles [13] et [14] pour une étude approfondie des opérateurs de type Read, en particulier dans le cadre hilbertien, et aux ouvrages [25] et [7] pour une présentation des nombreuses méthodes permettant de prouver l'existence de sous-espaces invariants pour des classes particulières d'opérateurs.

1.4. Plan du texte

Le reste de ce texte est consacré à la présentation de la preuve du théorème 1.1. Nous rappelons dans la partie 2 quelques faits élémentaires concernant les décompositions fini-dimensionnelles d'un espace de Banach, et présentons dans la partie 3 une méthode pour prouver qu'un opérateur est somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact. Les espaces de Bourgain-Delbaen sont introduits dans la partie 4. La plus grande partie des arguments utilisés dans la preuve du théorème 1.1 nécessitent seulement que l'espace de Bourgain-Delbaen ait une certaine propriété (à la fois de structure et de richesse) appelée propriété d'analyse. Nous présentons cette propriété dans la partie 5, et introduisons dans la partie 6 certaines suites particulières de vecteurs dont les moyennes dans les espaces de Bourgain-Delbaen ayant la propriété d'analyse peuvent être estimées en norme de manière fine. Ces estimées cruciales sont énoncées et prouvées dans la partie 7. La partie 8 présente une stratégie de preuve qui, après la construction explicite d'un espace de Bourgain-Delbaen adapté dans la partie 9, est finalement menée à bien dans la partie 10.

La présentation du résultat d'Argyros et Haydon que nous donnons ici est complètement élémentaire, en ce sens qu'elle ne fait intervenir aucun résultat touchant, par exemple, à la théorie des espaces héréditairement indécomposables. Mais il est important de souligner que certaines des idées essentielles de la preuve proviennent des constructions d'espaces héréditairement indécomposables. Par exemple la preuve donnée dans [3] des estimées fondamentales de la partie 7 utilise les espaces de Tsirelson introduits par Schlumprecht dans [30], et ceux-ci sont au cœur de toutes les constructions d'espaces héréditairement indécomposables.

Nous adressons nos plus vifs remerciements pour leurs commentaires éclairés aux collègues qui ont relu ce texte : Catalin Badea, Gilles Godefroy, Pascal Lefèvre, Daniel Li, Étienne Matheron et Hervé Queffélec.

2. BASES DE SCHAUDER ET DÉCOMPOSITIONS FINI-DIMENSIONNELLES D'UN ESPACE DE BANACH

De manière à rendre cette présentation auto-contenue, nous rappelons ici brièvement quelques notions concernant les bases de Schauder et les décompositions fini-dimensionnelles d'un espace de Banach. Nous renvoyons le lecteur au premier chapitre de [20] pour une présentation plus détaillée.

2.1. Bases de Schauder

Soit X un espace de Banach réel séparable de dimension infinie. Rappelons tout d'abord qu'une suite $(e_n)_{n \geq 1}$ de vecteurs de X est une *base de Schauder de X* (ou simplement une *base de X*) si tout vecteur x de X peut être écrit de manière unique sous la forme d'une série convergente

$$x = \sum_{k \geq 1} a_k e_k \quad \text{où les } a_k, k \geq 1, \text{ sont des scalaires.}$$

La suite $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base de X si et seulement si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $e_n \neq 0$ pour tout $n \geq 1$;
- (ii) il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous entiers $1 \leq m \leq n$ et tout n -uplet (a_1, \dots, a_n) de scalaires,

$$\left\| \sum_{k=1}^m a_k e_k \right\| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|;$$

- (iii) l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $e_n, n \geq 1$, est dense dans X .

Si $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base de Schauder de X , on notera $(e_n^{(*)})_{n \geq 1}$ la famille des fonctionnelles biorthogonales à $(e_n)_{n \geq 1}$, où pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in X$, $e_n^{(*)}(x)$ est la $n^{\text{ième}}$ coordonnée de x relativement à la base $(e_n)_{n \geq 1}$. La suite $(e_n^{(*)})_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de X^* qui vérifie les propriétés (i) et (ii). L'espace vectoriel engendré par les $e_n^{(*)}$ est w^* -dense dans X^* , mais peut ne pas être dense en norme. S'il est dense en norme, on dira que la base $(e_n)_{n \geq 1}$ est *contractante*. Dans ce cas, $(e_n^{(*)})_{n \geq 1}$ est une base de Schauder de X^* .

2.2. Décompositions fini-dimensionnelles

Nous aurons surtout besoin ici d'une généralisation naturelle de la notion de base de Schauder qui est celle de *décomposition fini-dimensionnelle*, ou FDD (de l'anglais « Finite Dimensional Decomposition ») : si $(E_n)_{n \geq 1}$ est une suite de sous-espaces de dimension finie de X , on dit que $(E_n)_{n \geq 1}$ est une FDD de X si tout vecteur x de X peut être écrit de manière unique sous la forme

$$x = \sum_{k \geq 1} x_k, \quad \text{où } x_k \in E_k \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Il n'est pas difficile de montrer que $(E_n)_{n \geq 1}$ est une FDD de X si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i) $\dim E_n > 0$ pour tout $n \geq 1$;
- (ii) il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous entiers $1 \leq m \leq n$ et tous vecteurs x_1, \dots, x_n où $x_k \in E_k$ pour tout $1 \leq k \leq n$,

$$\left\| \sum_{k=1}^m x_k \right\| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n x_k \right\|;$$

- (iii) l'espace vectoriel engendré par les E_n , $n \geq 1$, est dense dans X .

La plus petite constante pour laquelle la condition (ii) est vérifiée est appelée *la constante de la FDD* $(E_n)_{n \geq 1}$. Pour tout intervalle J de $(0, +\infty)$, la projection P_J de X sur $\text{vect}[E_k; k \in J]$ définie par

$$P_J \left(\sum_{k \geq 1} x_k \right) = \sum_{k \in J} x_k$$

est bornée. On a $\|P_J\| \leq 2M$ pour tout intervalle J de \mathbb{N} .

Soit I un intervalle de \mathbb{N} tel que $\min(I) = 1$. On dira qu'une suite (finie ou infinie) $(x_j)_{j \in I}$ de vecteurs de X est une *suite de blocs* relativement à la FDD $(E_n)_{n \geq 1}$ s'il existe une suite strictement croissante $(p_j)_{0 \leq j < \max(I)+1}$ d'entiers, et pour tout $j \in I$ un $(p_j - p_{j-1})$ -uplet non nul $(y_{p_{j-1}}, \dots, y_{p_j-1})$ de vecteurs avec $y_k \in E_k$ pour tout $p_{j-1} < k \leq p_j$, tels que

$$x_j = \sum_{p_{j-1} < k \leq p_j} y_k, \quad j \in I.$$

Si $y_{p_j} = 0$ pour tout $j \in I$, i.e. si chaque vecteur x_j est de la forme $x_j = \sum_{p_{j-1} < k < p_j} y_k$, on dira que $(x_j)_{j \in I}$ est une suite de blocs *stricte*. Si $(x_j)_{j \in I}$ est une suite de blocs telle que $\sup_{j \in I} \|x_j\| < +\infty$, on parlera de suite de blocs *bornée* et si $\|x_j\| = 1$ pour tout $j \in I$, de suite de blocs *normalisée*.

Si $(E_n)_{n \geq 1}$ est une FDD de X , on définit pour tout $n \geq 1$ le sous-espace de dimension finie $E_n^{(*)}$ de X^* comme étant l'orthogonal dans X^* de $\overline{\text{vect}[E_k; k \neq n]}$. Cet espace $E_n^{(*)}$ coïncide avec l'image de l'adjoint de la projection $P_{\{n\}}$, et $E_n^{(*)}$ et E_n ont même dimension. La suite $(E_n^{(*)})_{n \geq 1}$ forme une FDD du sous-espace de X^* qu'elle engendre. Si la suite $(E_n^{(*)})_{n \geq 1}$ forme une FDD de X^* , on dit qu'elle est *contractante*. C'est le cas si et seulement si $\|\varphi|_{\text{vect}[E_k; k \geq n]}\| \rightarrow 0$ quand n tend vers $+\infty$ pour tout $\varphi \in X^*$, ou encore si et seulement si toute suite de blocs bornée infinie $(x_j)_{j \geq 1}$ relativement à $(E_n)_{n \geq 1}$ tend faiblement vers 0 quand j tend vers $+\infty$.

Si X admet une base de Schauder $(e_n)_{n \geq 1}$, et si $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers avec $q_0 = 0$, la suite $(E_n)_{n \geq 1}$ définie par $E_n = \text{vect}[e_k; q_n \leq k < q_{n+1}]$ est évidemment une FDD de X , qui est contractante si et seulement si $(e_n)_{n \geq 1}$ est une base contractante de X . Pour tout $n \geq 1$, on a $E_n^{(*)} = \text{vect}[e_k^{(*)}; q_n \leq k < q_{n+1}]$.

Nous aurons enfin besoin du résultat élémentaire suivant :

FAIT 2.1. — Supposons que X admette une FDD $(E_n)_{n \geq 1}$, et soit Y le sous-espace de X^* engendré par les sous-espaces E_n^* , $n \geq 1$. Si $(E_n^*)_{n \geq 1}$ est une FDD contractante de Y , alors Y^* est isomorphe à X .

2.3. Une application à la construction de certains préduaux de $\ell^1(\Gamma)$

Nous utiliserons ces résultats dans le cadre suivant : soit, pour tout $n \geq 1$, Δ_n un ensemble fini non vide, avec $\#\Delta_1 = 1$. Soit Γ l'union disjointe des Δ_n , $n \geq 1$. On note $\Gamma_0 = \emptyset$ et $\Gamma_n = \bigcup_{1 \leq p \leq n} \Delta_p$ pour tout $n \geq 1$. On emploiera pour désigner les éléments de $\ell^1(\Gamma)$ et de $\ell^\infty(\Gamma)$ une notation a priori peu canonique mais dont la raison d'être apparaîtra par la suite :

- les éléments de $\ell^1(\Gamma)$ seront notés $x^* = (x^*(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$;
- les éléments de $\ell^\infty(\Gamma)$ seront notés $x = (x(\gamma))_{\gamma \in \Gamma}$.

On notera ainsi $(e_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ la base canonique de $\ell^1(\Gamma)$, et $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ la base canonique de $\ell^\infty(\Gamma)$ (qui n'est évidemment pas une base de Schauder de $\ell^\infty(\Gamma)$).

Soit alors $(d_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ une famille triangulaire de vecteurs de $\ell^1(\Gamma)$, i.e. une famille ayant la structure suivante :

- si $\gamma \in \Delta_1$ (rappelons que $\#\Delta_1 = 1$), $d_\gamma^* = e_\gamma^*$;
- si $\gamma \in \Delta_n$ pour un entier $n \geq 2$, $d_\gamma^* = e_\gamma^* - c_\gamma^*$, où c_γ^* appartient à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs e_ξ^* , où $\xi \in \Gamma_{n-1}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\text{vect}[d_\gamma^* ; \gamma \in \Gamma_n] = \text{vect}[e_\gamma^* ; \gamma \in \Gamma_n]$. Notons pour tout $n \geq 1$ $E_n = \text{vect}[d_\gamma^* ; \gamma \in \Delta_n]$. Si $(E_n)_{n \geq 1}$ est une FDD de $\ell^1(\Gamma)$, il découle du fait que $(d_\gamma^*)_{\gamma \in \Delta_n}$ est une base (algébrique) de E_n pour tout $n \geq 1$ qu'il existe une famille $(d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de fonctionnelles biorthogonales à la famille $(d_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$. Chaque vecteur d_γ appartient à $\ell^\infty(\Gamma)$. On définit $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ comme étant le sous-espace fermé de $\ell^\infty(\Gamma)$ engendré par les vecteurs d_γ , $\gamma \in \Gamma$:

$$X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}) = \overline{\text{vect}}[d_\gamma ; \gamma \in \Gamma].$$

C'est un sous-espace séparable de $\ell^\infty(\Gamma)$. Si on note, pour tout $n \geq 1$,

$$M_n = \text{vect}[d_\gamma ; \gamma \in \Delta_n],$$

$(M_n)_{n \geq 1}$ est une FDD de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$. Si elle est contractante, le Fait 2.1 implique que le dual de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ est isomorphe à $\ell^1(\Gamma)$. Les éléments de $\ell^1(\Gamma)$ sont naturellement vus comme des éléments du dual de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, ce qui explique que nous réservions la notation étoilée aux éléments de $\ell^1(\Gamma)$. Pour utiliser une notation en accord avec celle de la section 2.2, il faudrait écrire $E_n^* = \text{vect}[d_\gamma^* ; \gamma \in \Delta_n]$ et $E_n^{*(*)} = \text{vect}[d_\gamma ; \gamma \in \Delta_n]$. Cette notation étant lourde et prêtant à confusion, nous ne l'utiliserons pas.

Pour tout intervalle borné d'entiers J , on notera P_J^* l'application linéaire de $\text{vect}[e_\gamma^* ; \gamma \in \Gamma]$ dans lui-même définie par

$$P_J^* x^* = \sum_{k \in J} \sum_{\gamma \in \Delta_k} \langle d_\gamma, x^* \rangle d_\gamma^*, \quad x^* \in \text{vect}[e_\gamma^* ; \gamma \in \Gamma].$$

Si $(E_n)_{n \geq 1}$ est une FDD de $\ell^1(\Gamma)$, les opérateurs P_J^* se prolongent en des projections bornées sur $\ell^1(\Gamma)$, et P_J^* est également défini pour tout intervalle non borné d'entiers. Les opérateurs P_J^* sont les projections associées à la FDD $(E_n)_{n \geq 1}$, et leurs adjoints P_J sont les projections associées à la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$ de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$. On a alors

$$P_J x = \sum_{k \in J} \sum_{\gamma \in \Delta_k} \langle x, d_\gamma^* \rangle d_\gamma, \quad x \in X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}).$$

On a $\sup_J \|P_J^*\| = \sup_J \|P_J\| \leq 2M$, où M est la constante des deux FDD $(E_n)_{n \geq 1}$ et $(M_n)_{n \geq 1}$.

3. UNE MÉTHODE POUR PROUVER QU'UN OPÉRATEUR EST SOMME D'UN OPÉRATEUR SCALAIRE ET D'UN OPÉRATEUR COMPACT

Soit X un espace de Banach réel possédant une FDD $(M_n)_{n \geq 1}$, et $T \in \mathcal{B}(X)$ un opérateur linéaire borné sur X . On notera M la constante de la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$. Si x est un vecteur de X et V un sous-espace fermé de X , on notera de manière usuelle $d(x, V)$ la distance de x à V , et B_V la boule unité fermée de V .

3.1. Comment montrer que T est compact ?

Le critère qu'on utilisera pour montrer que T est compact est le suivant :

LEMME 3.1. — *Supposons que T vérifie la propriété suivante : pour toute suite de blocs bornée $(x_j)_{j \geq 1}$ relativement à la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$, $\|Tx_j\| \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$. Alors T est compact.*

Démonstration. — On va montrer que l'hypothèse du lemme 3.1 implique que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un sous-espace de dimension finie V_ε de X tel que $\sup_{\|x\| \leq 1} d(Tx, V_\varepsilon) \leq \varepsilon$. Ceci impliquera que T est compact. Supposons au contraire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-espace de dimension finie V de X , $\sup_{\|x\| \leq 1} d(Tx, V) > \varepsilon$. Notons, pour $n \geq 1$, $V_n = T(\text{vect}[M_k; 1 \leq k \leq n])$. Il existe $x_1 \in B_X$ tel que $d(Tx_1, V_1) > \varepsilon$. Soit N_1 un entier suffisamment grand pour que $y_1 = P_{(0, N_1]} x_1$ vérifie $d(Ty_1, V_1) > \varepsilon$. On a $\|y_1\| \leq M$ et $\|Ty_1\| > \varepsilon$. Soit ensuite $x_2 \in B_X$ tel que $d(Tx_2, V_{N_1}) > \varepsilon$. On note $z_2 = P_{(N_1, +\infty)} x_2$ et on observe que $\|Tz_2\| = \|Tx_2 - TP_{(0, N_1]} x_2\| \geq d(Tx_2, V_{N_1}) > \varepsilon$ puisque $TP_{(0, N_1]} x_2 \in V_{N_1}$. Soit alors $N_2 > N_1$ suffisamment grand pour que $y_2 = P_{(N_1, N_2]} x_2$ vérifie encore $d(Ty_2, V_{N_1}) > \varepsilon$. En particulier $\|Ty_2\| > \varepsilon$ et $\|y_2\| \leq 2M$. On construit ainsi par récurrence une suite de blocs bornée $(y_n)_{n \geq 1}$ telle que $\|Ty_n\| > \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse. \square

3.2. Comment montrer que T est somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact ?

Il existe pour cela un critère assez naturel en termes de suites de blocs, qui s'énonce ainsi :

LEMME 3.2. — *Supposons que T vérifie la propriété suivante : pour toute suite de blocs bornée $(x_j)_{j \geq 1}$ relativement à la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$, $\underline{\lim} d(Tx_j, \mathbb{R}x_j) = 0$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T - \lambda I$ est compact.*

Démonstration. — Soit $(x_j)_{j \geq 1}$ une suite de blocs normalisée relativement à $(M_n)_{n \geq 1}$. Sans perdre en généralité, on peut supposer qu'il existe une suite $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ de scalaires telle que $\|Tx_j - \lambda_j x_j\| \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$. Cette suite $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ est bornée. Nous allons montrer qu'elle converge. Supposons que ce ne soit pas le cas, et soient λ et λ' deux valeurs d'adhérence distinctes de $(\lambda_j)_{j \geq 1}$. Quitte à extraire une sous-suite et à la re-numéroter, on peut supposer que $\lambda_{2j} \rightarrow \lambda$ et que $\lambda_{2j+1} \rightarrow \lambda'$. Soit alors $(y_j)_{j \geq 1}$ la suite définie par $y_j = x_{2j-1} + x_{2j}$ pour tout $j \geq 1$: c'est une suite de blocs bornée, et il existe donc une suite de scalaires $(\mu_j)_{j \geq 1}$ telle que $\|Ty_j - \mu_j y_j\| \rightarrow 0$. Ceci implique que $\|(\lambda_{2j-1} - \mu_j)x_{2j-1} + (\lambda_{2j} - \mu_j)x_{2j}\| \rightarrow 0$, et donc (en projetant de manière idoine relativement à la FDD) que $\|(\lambda_{2j} - \mu_j)x_{2j}\|$ et $\|(\lambda_{2j-1} - \mu_j)x_{2j-1}\|$ tendent vers zéro. La suite $(x_j)_{j \geq 1}$ étant normalisée, $\mu_j \rightarrow \lambda$ et $\mu_j \rightarrow \lambda'$, d'où $\lambda = \lambda'$.

Nous avons donc montré que pour toute suite de blocs normalisée $(x_j)_{j \geq 1}$ il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{\lim} \|Tx_j - \lambda x_j\| = 0$. Pour pouvoir appliquer le lemme 3.1, il reste à montrer que le scalaire λ ne dépend pas de la suite de blocs $(x_j)_{j \geq 1}$. Ceci résulte d'un argument très standard : si $(x_j)_{j \geq 1}$ et $(y_j)_{j \geq 1}$ sont deux suites de blocs bornées, et λ et μ sont tels que $\|Tx_j - \lambda x_j\| \rightarrow 0$ et $\|Ty_j - \mu y_j\| \rightarrow 0$, il suffit de considérer une suite de blocs $(z_j)_{j \geq 1}$ composée alternativement d'éléments des suites $(x_j)_{j \geq 1}$ et $(y_j)_{j \geq 1}$ pour en déduire que $\lambda = \mu$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\underline{\lim} \|Tx_j - \lambda x_j\| = 0$ pour toute suite de blocs normalisée $(x_j)_{j \geq 1}$. Il est alors clair que $\|Tx_j - \lambda x_j\| \rightarrow 0$ pour toute suite de blocs bornée $(x_j)_{j \geq 1}$, et le lemme 3.1 permet de conclure la preuve. \square

Observons qu'il suffit de prouver l'hypothèse du lemme 3.2 pour les suites de blocs bornées strictes.

3.3. Classes suffisantes de suites de blocs

Il sera par la suite nécessaire d'avoir une version plus algorithmique du lemme 3.2, et de réduire la classe des suites de blocs $(x_j)_{j \geq 1}$ pour laquelle il faut vérifier que $\underline{\lim} d(Tx_j, \mathbb{R}x_j) = 0$. On dira qu'une classe \mathcal{C} de suites de blocs bornées strictes $(x_j)_{j \geq 1}$ relativement à la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$ est *suffisante* si elle vérifie les conditions suivantes :

- (i) \mathcal{C} est stable par passage aux sous-suites : si $(x_j)_{j \geq 1}$ appartient à \mathcal{C} et si $(j_k)_{k \geq 1}$ est une suite strictement croissante d'entiers, $(x_{j_k})_{k \geq 1}$ appartient à \mathcal{C} ;
- (ii) \mathcal{C} est stable par regroupement : si $(x_j)_{j \geq 1}$ appartient à \mathcal{C} , la suite $(x_{2j-1} + x_{2j})_{j \geq 1}$ appartient à \mathcal{C} ;

- (iii) \mathcal{C} est stable par entrelacement : si $(y_j)_{j \geq 1}$ et $(z_j)_{j \geq 1}$ appartiennent à \mathcal{C} , et si $(x_j)_{j \geq 1}$ est une suite de blocs composée alternativement d'éléments de $(y_j)_{j \geq 1}$ et de $(z_j)_{j \geq 1}$, alors $(x_j)_{j \geq 1}$ appartient à \mathcal{C} ;
- (iv) si T est un opérateur borné sur $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ tel que $\|x_j\| \rightarrow 0$ pour toute suite de blocs $(x_j)_{j \geq 1}$ appartenant à \mathcal{C} , alors $\|Tx_j\| \rightarrow 0$ pour toute suite de blocs bornée stricte $(x_j)_{j \geq 1}$.

On a alors

PROPOSITION 3.3. — *Soit \mathcal{C} une classe suffisante de suites de blocs relativement à la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$. Supposons que T est un opérateur borné sur $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ tel que pour toute suite de blocs $(x_j)_{j \geq 1}$ appartenant à \mathcal{C} , $\lim d(Tx_j, \mathbb{R}x_j) = 0$. Il existe alors $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $T - \lambda$ est compact.*

Démonstration. — Comme \mathcal{C} est stable par passage aux sous-suites, regroupement et entrelacement, le même argument que celui employé dans la preuve du lemme 3.2 montre qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\|Tx_j - \lambda x_j\| \rightarrow 0$ pour toute suite de blocs $(x_j)_{j \geq 1}$ appartenant à \mathcal{C} . L'hypothèse (iv) montre alors que $\|Tx_j - \lambda x_j\| \rightarrow 0$ pour toute suite de blocs bornée stricte, et $T - \lambda$ est donc compact. \square

4. ESPACES DE BOURGAIN-DELBAEN

Le cadre général est celui qui a été présenté dans la section 2.3. Les espaces de Bourgain-Delbaen sont de la forme $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, où $(d_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ est une certaine famille triangulaire de vecteurs de $\ell^1(\Gamma)$ telle que $(E_n)_{n \geq 1}$ forme une FDD de $\ell^1(\Gamma)$. Notre premier objectif est de présenter des conditions portant sur la famille $(c_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ qui impliquent que $(E_n)_{n \geq 1}$ est effectivement une FDD de $\ell^1(\Gamma)$.

4.1. Familles de BD-vecteurs

Si $\gamma \in \Delta_n$, on appelle l'entier n le *rang de l'élément* $\gamma \in \Gamma$. On dira qu'une famille $(c_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ de vecteurs de $\text{vect}[E_n^*; n \geq 1]$ construite par récurrence sur le rang de γ est une *famille de BD-vecteurs* s'il existe une constante $\theta \in (0, 1/2)$ telle que les conditions suivantes soient vérifiées :

- si γ est l'unique élément de rang 1, $c_\gamma^* = 0$;
- si γ est de rang n avec $n \geq 2$, c_γ^* a l'une des formes suivantes :
 - $c_\gamma^* = \beta b^*$, où $0 < \beta \leq \theta$ et $b^* \in \ell^1(\Gamma_{n-1})$, $\|b^*\|_1 \leq 1$; on dira dans ce cas que c_γ^* est *de type 1* ;
 - $c_\gamma^* = e_\xi^* + \beta P_{(p,n)}^* b^*$, où $0 < \beta \leq \theta$, $1 \leq p < n - 1$, $\text{rang}(\xi) = p$ et $b^* \in \ell^1(\Gamma_{n-1} \setminus \Gamma_p)$ avec $\|b^*\|_1 \leq 1$; on dira dans ce cas que c_γ^* est *de type 2*.

La famille $(c_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ étant construite par récurrence sur le rang de γ , le vecteur $P_{(p,n)}^* b^*$ apparaissant dans l'expression de c_γ^* lorsque γ est de rang n est bien défini. On dira que $\gamma \in \Gamma$ est un élément de type 1 (resp. un élément de type 2) si c_γ^* est un élément de type 1 (resp. un élément de type 2). La quantité β qui intervient dans la définition de c_γ^* est appelée *le poids* de γ .

PROPOSITION 4.1. — *Si $(c_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$ est une famille de BD-vecteurs, la famille $(E_n)_{n \geq 1}$ définie par $E_n = \text{vect}[d_\gamma^*; \gamma \in \Delta_n]$, $n \geq 1$, forme une FDD de $\ell^1(\Gamma)$, de constante inférieure ou égale à $1/(1-2\theta)$. La famille $(M_n)_{n \geq 1}$ définie par $M_n = \text{vect}[d_\gamma; \gamma \in \Delta_n]$ forme donc une FDD de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ de constante inférieure ou égale à $1/(1-2\theta)$.*

Démonstration. — Comme on travaille dans $\ell^1(\Gamma)$, il suffit de montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que pour tout γ de rang n et pour tout $m \geq 1$, $\|P_{(0,m)}^* e_\gamma^*\| \leq M = 1/(1-2\theta)$. Supposons donc que $n \geq 1$ est tel que

$$\forall \gamma \in \Gamma_n, \quad \forall m \geq 1, \quad \|P_{(0,m)}^* e_\gamma^*\| \leq M.$$

Montrons maintenant que pour tout $\gamma \in \Delta_{n+1}$ et tout $m \geq 1$, $\|P_{(0,m)}^* e_\gamma^*\| \leq M$.

Si $m \geq n+1$, $P_{(0,m)}^* e_\gamma^* = e_\gamma^*$, et l'inégalité est évidente. Supposons donc que $m \leq n$ et traitons le cas (qui est le plus compliqué) où γ est de type 2. On a $c_\gamma^* = e_\xi^* + \beta P_{(p,n)}^* b^*$ avec $\text{rang}(\xi) = p$ et $1 \leq p < n$. Alors $e_\gamma^* = d_\gamma^* + e_\xi^* + \beta P_{(p,n)}^* b^*$ si bien que $P_{(0,m)}^* e_\gamma^* = P_{(0,m)}^* d_\gamma^* + P_{(0,m)}^* e_\xi^* + \beta P_{(0,m)}^* P_{(p,n)}^* b^*$. Comme $\text{rang}(\gamma) = n+1 > m$, le premier terme est nul. On peut, si on le souhaite, appliquer l'hypothèse de récurrence au deuxième terme puisque $\text{rang}(\xi) < n+1$, et donc $\|P_{(0,m)}^* e_\xi^*\| \leq M$. Quant au troisième terme, il vaut $\beta P_{(p,m)}^* b^*$ si $p < m$, et 0 sinon. Traitons séparément les deux cas.

– Si $p < m$, $P_{(0,m)}^* e_\xi^* = e_\xi^*$, donc $\|P_{(0,m)}^* e_\gamma^*\| \leq 1 + \theta \|P_{(p,m)}^* b^*\|$. Or $b^* \in \ell^1(\Gamma_n \setminus \Gamma_p)$ est de la forme

$$b^* = \sum_{p < k \leq n} \sum_{\eta \in \Delta_k} \alpha_\eta e_\eta^* \quad \text{où} \quad \sum_{p < k \leq n} \sum_{\eta \in \Delta_k} |\alpha_\eta| \leq 1.$$

Comme $\|P_{(0,m)}^* e_\eta^*\| \leq M$ pour tout $\eta \in \Gamma_n$ par l'hypothèse de récurrence, il s'ensuit que $\|P_{(0,m)}^* e_\gamma^*\| \leq 1 + \theta \cdot 2M = M$.

– Si $p \geq m$, $\|P_{(0,m)}^* e_\gamma^*\| = \|P_{(0,m)}^* e_\xi^*\| \leq M$ par l'hypothèse de récurrence.

La proposition 4.1 est donc prouvée. \square

Au vu de la proposition 4.1, il est naturel de se demander si les espaces $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, qui ont une FDD, admettent ou non une base de Schauder. La réponse est affirmative : si $(\gamma_j)_{j \geq 1}$ est une énumération de Γ ayant la propriété que pour tous $1 \leq i \leq j$, le rang de γ_i est inférieur ou égal au rang de γ_j , une preuve analogue à celle de la proposition 4.1 montre que $(d_{\gamma_j}^*)_{j \geq 1}$ est une base de Schauder de $\ell^1(\Gamma)$, si bien que $(d_{\gamma_j})_{j \geq 1}$ est une base de Schauder de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$.

4.2. Réflexions sur la définition des familles de BD-vecteurs

Nous allons désormais travailler dans les espaces $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, et il est clair que le problème principal que nous allons rencontrer est le suivant : pour calculer la norme d'un vecteur x de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, nous avons besoin de connaître la valeur de ses coordonnées $x(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$, c'est-à-dire des quantités $\langle x, e_\gamma^* \rangle$, $\gamma \in \Gamma$. Mais ce sont les coordonnées de x relativement à $(d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ qui sont connues, c'est-à-dire les quantités $\langle x, d_\gamma^* \rangle$, $\gamma \in \Gamma$. Il s'agit donc d'obtenir des informations sur la décomposition de x relativement à $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ à partir de sa décomposition relativement à $(d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$.

Si $x \in X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ est tel que $x \in \text{vect}[M_k; k \geq 1]$, on appellera *image de x* , et on notera $\text{im}(x)$, le plus petit intervalle ouvert (p, q) tel que $x \in \text{vect}[M_k; p < k < q]$. Une première observation triviale est la suivante :

FAIT 4.2. — Si $\text{im}(x) \subseteq (p, q)$, alors $x(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_p$.

Démonstration. — En effet, $x = \sum_{\eta \in \Gamma_{q-1} \setminus \Gamma_p} \langle x, d_\eta^* \rangle d_\eta$, et donc $\langle x, d_\gamma^* \rangle = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma_p$. Comme $\text{vect}[e_\gamma^*; \gamma \in \Gamma_p] = \text{vect}[d_\gamma^*; \gamma \in \Gamma_p]$, le résultat en découle. \square

Pour pouvoir estimer les quantités $x(\gamma) = \langle x, e_\gamma^* \rangle$, $\gamma \in \Gamma$, pour certains vecteurs x de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, il est nécessaire de disposer d'expressions explicites des vecteurs e_γ^* relativement à la famille $(d_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$. Si par exemple γ est de rang n et de type 2, $e_\gamma^* = d_\gamma^* + e_\xi^* + \beta P_{(p,n)}^* b^*$, avec $\text{rang}(\xi) = p < n - 1$. Si ξ est lui-même de type 2, on peut appliquer cette même décomposition à ξ , et écrire $e_\xi^* = d_\xi^* + e_{\xi'}^* + \beta' P_{(p',p)}^* b'^*$, avec $\text{rang}(\xi') = p' < p - 1$. Si ξ' est encore de type 2, on peut continuer à décomposer. Si ξ' est de type 1, $e_{\xi'}^* = d_{\xi'}^* + \beta'' b''^* = d_{\xi'}^* + \beta'' P_{(0,p')}^* b''^*$. On obtient donc l'expression suivante de e_γ^* : $e_\gamma^* = d_\gamma^* + d_\xi^* + d_{\xi'}^* + \beta P_{(p,n)}^* b^* + \beta' P_{(p',p)}^* b'^* + \beta'' P_{(0,p')}^* b''^*$. Ce raisonnement se généralise de manière immédiate pour donner une expression de e_γ^* liée à la famille $(d_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$, que nous appellerons *l'analyse de e_γ^** (ou de γ) :

FAIT 4.3. — Soit γ un élément de rang n . Il existe un entier $a \geq 1$, une famille finie d'entiers $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_a = n$ avec $p_i < p_{i+1} - 1$ pour tout $0 \leq i < a$, des éléments ξ_i de rangs respectifs p_i , $1 \leq i \leq a$, tels que $\xi_a = \gamma$, des poids β_i , $1 \leq i \leq a$, inférieurs ou égaux à θ et des vecteurs $b_i^* \in B_{\ell^1(\Gamma_{p_{i-1}} \setminus \Gamma_{p_{i-1}})}$, $1 \leq i \leq a$, tels que

$$e_\gamma^* = \sum_{i=1}^a d_{\xi_i}^* + \sum_{i=1}^a \beta_i P_{(p_{i-1}, p_i)}^* b_i^*.$$

L'entier a est appelé *l'âge de γ* . Il est assez clair que les choses seront simplifiées si l'on suppose que le poids β est constant le long de l'analyse de γ , i.e. que $\beta_1 = \dots = \beta_a = \beta$. L'analyse de γ se réécrit alors

$$e_\gamma^* = \sum_{i=1}^a d_{\xi_i}^* + \beta \sum_{i=1}^a P_{(p_{i-1}, p_i)}^* b_i^*$$

et on la note $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$.

Terminons ce paragraphe par l'observation suivante : si γ est un élément de poids β et d'analyse $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$ et si l'image de x est contenue dans l'un des intervalles (p_{i-1}, p_i) , alors $x(\gamma) = \langle x, e_\gamma^* \rangle = \beta \langle x, b_i^* \rangle$: en effet, puisque ξ_j est de rang p_j , $\langle x, d_{\xi_j}^* \rangle = 0$ pour tous $1 \leq j \leq a$. De plus $\langle x, P_{(p_{j-1}, p_j)}^* b_j^* \rangle = \langle P_{(p_{j-1}, p_j)} x, b_j^* \rangle$. Or $P_{(p_{j-1}, p_j)} x = 0$ si $j \neq i$ tandis que $P_{(p_{i-1}, p_i)} x = x$, et donc $x(\gamma) = \beta \langle x, b_i^* \rangle$. C'est ce type d'argument qui nous permettra d'obtenir des estimations sur les normes d'éléments de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, mais les raisonnements seront en général bien plus compliqués car l'image d'un vecteur x de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ rencontre en général plusieurs des intervalles (p_{i-1}, p_i) qui apparaissent dans l'analyse d'un élément γ de Γ .

4.3. Opérateurs d'extension

On définit, pour $n \geq 1$, le $n^{\text{ième}}$ opérateur d'extension $i_n : \ell^\infty(\Gamma_n) \longrightarrow X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ par

$$\forall u \in \ell^\infty(\Gamma_n), \quad i_n(u) = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \langle u, d_\gamma^* \rangle d_\gamma.$$

Cette définition a bien un sens puisque $d_\gamma^* \in \ell^1(\Gamma_n)$ pour tout $n \geq 1$. Pour tous $u \in \ell^\infty(\Gamma_n)$ et $x^* \in \ell^1(\Gamma)$, on a

$$\langle i_n(u), x^* \rangle = \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \langle u, d_\gamma^* \rangle \langle d_\gamma, x^* \rangle = \langle u, \sum_{\gamma \in \Gamma_n} \langle d_\gamma, x^* \rangle d_\gamma^* \rangle = \langle u, P_{(0, n]}^* x^* \rangle$$

si bien que i_n est en fait l'adjoint de l'opérateur $P_{(0, n]}^*$, pourvu qu'on le considère comme un opérateur de $\ell^1(\Gamma)$ dans $\ell^1(\Gamma_n)$. On a donc $\|i_n\| \leq M$ pour tout $n \geq 1$. Pour tout $\gamma \in \Gamma_n$, on a $\langle i_n(u), e_\gamma^* \rangle = \langle u, e_\gamma^* \rangle$, et donc $i_n(u)|_{\Gamma_n} = u|_{\Gamma_n}$. L'opérateur i_n est donc effectivement un opérateur d'extension de $\ell^\infty(\Gamma_n)$ dans $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, et on a $\|u\|_\infty \leq \|i_n(u)\|_\infty \leq M\|u\|_\infty$ pour tout $u \in \ell^\infty(\Gamma_n)$. Remarquons que l'image de i_n est égale à $\text{vect}[M_k; 1 \leq k \leq n]$. Un argument semblable à celui employé dans la preuve du Fait 4.2 montre que pour tout entier $1 \leq p < n$,

$$i_n(\ell^\infty(\Gamma_n \setminus \Gamma_p)) = \text{vect}[M_k; p < k \leq n].$$

Ces opérateurs d'extension permettent de construire des vecteurs de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ écrits relativement à la famille $(d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_n}$ à partir d'éléments de $\ell^\infty(\Gamma_n)$, écrits « canoniquement » relativement à la famille $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma_n}$. La norme de ces vecteurs de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ est contrôlée : si $u \in \ell^\infty(\Gamma_n)$, $i_n(u) \in X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ et $\|i_n(u)\| \leq M\|u\|$. Par exemple on a :

FAIT 4.4. — Soient $(p_j)_{j \geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers, et $(u_j)_{j \geq 1}$ une suite bornée de vecteurs de $\ell^\infty(\Gamma)$ telle que pour tout $j \geq 1$, $u_j \in \ell^\infty(\Gamma_{p_j} \setminus \Gamma_{p_{j-1}})$. Alors la suite $(x_j)_{j \geq 1}$ définie par $x_j = i_{p_j}(u_j)$ est une suite de blocs bornée de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ relativement à la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$.

Les opérateurs d'extension permettent également d'estimer la norme de certains éléments du dual de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, et même de tous les éléments dans le cas où la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$ est contractante car dans ce cas $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})^*$ est isomorphe à $\ell^1(\Gamma)$.

FAIT 4.5. — Si $x^* \in \ell^1(\Gamma)$ est vu comme élément de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})^*$, on a

$$\frac{1}{M} \|x^*\|_1 \leq \|x^*\| \leq \|x^*\|_1.$$

Démonstration. — On a $\|x^*\| = \sup\{\langle x, x^* \rangle; x \in X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}), \|x\|_\infty \leq 1\}$ et donc $\|x^*\| \leq \|x^*\|_1$. Réciproquement, si $x^* \in \ell^1(\Gamma)$ est un vecteur à support fini, et $n \geq 1$ est tel que $x^* \in \ell^1(\Gamma_n)$, il existe $u \in \ell^\infty(\Gamma_n)$ avec $\|u\|_\infty = 1$ tel que $\langle u, x^* \rangle = \|x^*\|_1$. Soit alors $x \in X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ défini par $x = i_n(u)$. On a

$$\langle x, x^* \rangle = \langle i_n(u), x^* \rangle = \langle u, P_{(0,n]}^* x^* \rangle = \langle u, x^* \rangle = \|x^*\|_1, \text{ et } \|x\| \leq M.$$

Donc $\|x^*\| \geq \frac{1}{M} \|x^*\|_1$. \square

Terminons ce paragraphe par une application qui sera fondamentale pour la suite de la preuve.

LEMME 4.6. — Soient m et n deux entiers tels que $0 \leq m < n - 1$, et x et y deux vecteurs de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ dont l'image est contenue dans (m, n) . Supposons que $d(y, \mathbb{R}x) > \delta > 0$. Il existe alors $b^* \in B_{\ell^1(\Gamma_{n-1} \setminus \Gamma_m)}$ tel que $\langle x, b^* \rangle = 0$ et $\langle y, b^* \rangle > \delta/M$.

Démonstration. — Soient $u, v \in \ell^\infty(\Gamma_{n-1} \setminus \Gamma_m)$ tels que $x = i_{n-1}(u)$ et $y = i_{n-1}(v)$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\|v - \alpha u\| \cdot \|i_{n-1}\| \geq \|y - \alpha x\| > \delta$, si bien que $d(v, \mathbb{R}u) > \delta/M$. Par le théorème de Hahn-Banach appliqué dans $\ell^\infty(\Gamma_{n-1} \setminus \Gamma_m)$, il existe $b^* \in B_{\ell^1(\Gamma_{n-1} \setminus \Gamma_m)}$ tel que $\langle u, b^* \rangle = 0$ et $\langle v, b^* \rangle > \delta/M$. Comme u et v sont les restrictions respectives de x et y à $\ell^\infty(\Gamma_{n-1})$, et comme $b^* \in \ell^1(\Gamma_{n-1})$, on en déduit que $\langle x, b^* \rangle = 0$ et $\langle y, b^* \rangle > \delta/M$. \square

5. ESPACES DE BOURGAIN-DELBAEN AYANT LA PROPRIÉTÉ D'ANALYSE

Nous allons maintenant préciser un peu plus les propriétés que doit satisfaire un espace de Bourgain-Delbaen $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ pour que $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ possède très peu d'opérateurs. Plutôt que de donner directement la définition des ensembles Γ considérés par Argyros et Haydon, nous allons pour le moment introduire une propriété générale appelée *propriété d'analyse*, donner un exemple très naturel d'espace de Bourgain-Delbaen possédant cette propriété, et montrer que toute une partie de la preuve du théorème 1.1 peut être effectuée dans un espace ayant la propriété d'analyse.

5.1. Notations et codage

La définition d'un BD-vecteur fait intervenir des vecteurs b^* de $B_{\ell^1(\Gamma_n \setminus \Gamma_p)}$. Afin de coder de manière finie les vecteurs qui interviendront, il est commode d'introduire les ensembles suivants, définis pour tout $n \geq 1$ et tout $0 \leq p < n$:

$$B_{p,n} = \left\{ \sum_{\eta \in \Gamma_n \setminus \Gamma_p} a_\eta e_\eta^*; \sum_{\eta \in \Gamma_n \setminus \Gamma_p} |a_\eta| \leq 1 \text{ et, pour tout } \eta \in \Gamma_n \setminus \Gamma_p, \right. \\ \left. a_\eta \text{ est un rationnel dont le dénominateur divise } N_n! \right\}.$$

Ici, $(N_n)_{n \geq 1}$ est une certaine suite d'entiers très rapidement croissante, et il est possible de faire en sorte que $B_{p,n}$ soit, pour tous $0 \leq p < n$, un 2^{-n} -réseau de la boule unité de $\ell^1(\Gamma_n \setminus \Gamma_p)$.

Soient également $(m_j)_{j \geq 1}$ et $(n_j)_{j \geq 1}$ deux suites très rapidement croissantes d'entiers, où pour tout $j \geq 1$, m_{j+1} est beaucoup plus grand que n_j , qui lui-même est beaucoup plus grand que m_j . La suite $(m_j)_{j \geq 1}$ servira à coder les poids des éléments γ de Γ , qui seront de la forme $1/m_j$ où j est inférieur ou égal au rang de γ . Le rôle de la suite $(n_j)_{j \geq 1}$ est moins clair à ce stade de la construction et sa seule utilité pour le moment sera de borner l'âge des éléments de poids $1/m_j$. Si on choisit $m_1 \geq 4$ (ce que l'on fera toujours), la proposition 4.1 montre que la constante de la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$ est inférieure ou égale à 2. On a pour tous $0 \leq m < n$, $\|i_n\| = \|P_{(0,n)}\| \leq 2$, $\|P_{(m,n)}\| \leq 3$, $\|P_{(m,n)}\| \leq 4$, et pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\|d_\gamma^*\| = \|P_{[\text{rang}(\gamma), +\infty)}^* e_\gamma^*\| \leq 3$.

5.2. Propriété d'analyse

Nous dirons que l'ensemble Γ (ou l'espace associé $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$) a la *propriété d'analyse* s'il vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Si $\gamma \in \Gamma$ est un élément de rang n , son poids est de la forme $1/m_j$ pour un certain entier $1 \leq j \leq n$. Il existe un entier $1 \leq a \leq n_j$, appelé *âge de γ* , des entiers $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_a = n$ avec $p_i < p_{i+1} - 1$ pour tout $0 \leq i < a$, des éléments ξ_i de Γ de poids $1/m_j$, de rangs respectifs p_i , $1 \leq i \leq a$, tels que $\xi_a = \gamma$, et des vecteurs $b_i^* \in B_{p_{i-1}, p_i - 1}$, $1 \leq i \leq a$, tels que

$$e_\gamma^* = \sum_{i=1}^a d_{\xi_i}^* + \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^a P_{(p_{i-1}, p_i - 1)}^* b_i^*.$$

La donnée de $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$ est appelée *l'analyse de γ* .

- (2) Pour tous entiers $j \geq 1$, $1 \leq a \leq n_j$, $0 = p_0 < p_1 < \dots < p_a$ avec $p_1 \geq j$ et $p_i < p_{i+1} - 1$ pour tout $0 \leq i < a$, et pour tous éléments $b_i^* \in B_{p_{i-1}, p_i - 1}$, $1 \leq i \leq a$, il existe des éléments ξ_i de poids $1/m_j$, de rangs respectifs p_i , $1 \leq i \leq a$, tels que l'analyse de $\gamma = \xi_a$ est égale à $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$.

La propriété (1) est une propriété de *structure*, tandis que la propriété (2) est une propriété de *richesse* de Γ . La restriction $p_1 \geq j$ dans (2) provient de l'observation suivante : si $\gamma \in \Gamma$ a pour analyse $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$, chacun des éléments ξ_i est de poids $1/m_j$, et donc $j \leq \text{rang}(\xi_i) = p_i$. Donc $j \leq p_1$ nécessairement.

Si l'analyse de γ est $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$, pour tout $1 \leq t \leq a$ l'analyse de ξ_t est $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq t}$. On a également

$$e_\gamma^* = e_{\xi_t}^* + \sum_{i=t+1}^a d_{\xi_i}^* + \frac{1}{m_j} \sum_{i=t+1}^a P_{(p_{i-1}, p_i - 1)}^* b_i^*.$$

Donnons maintenant l'exemple le plus naturel qui soit d'espace de Bourgain-Delbaen ayant la propriété d'analyse. Nous allons pour cela utiliser une notation commode, grâce à laquelle un élément γ de Γ codera automatiquement le vecteur c_γ^* qui lui est associé.

La famille $(d_\gamma^*)_{\gamma \in \Gamma}$, et donc l'espace $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, seront ainsi automatiquement définis à partir de la donnée de l'ensemble Γ . Posons $\Delta_1 = \{1\}$, et définissons par récurrence sur $n \geq 2$ les ensembles $\Delta_n = \Delta_n^1 \cup \Delta_n^2$, où

$$\Delta_n^1 = \bigcup_{j=1}^n \left\{ \left(n, \frac{1}{m_j}, b^* \right); b^* \in B_{0, n-1} \right\}$$

$$\Delta_n^2 = \bigcup_{p=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^p \left\{ \left(n, \xi, \frac{1}{m_j}, b^* \right); \xi \in \Delta_p, \text{ poids}(\xi) = \frac{1}{m_j}, \text{ âge}(\xi) < n_j, b^* \in B_{p, n-1} \right\}.$$

Pour tout $n \geq 2$, Δ_n^1 (resp. Δ_n^2) est l'ensemble des éléments de Γ qui sont de rang n et de type 1 (resp. de type 2). Il est clair que l'ensemble $\Gamma = \bigcup_{n \geq 1} \Delta_n$ ainsi défini a la propriété d'analyse.

6. UNE CLASSE SUFFISANTE DE SUITES DE BLOCS DANS LES ESPACES AYANT LA PROPRIÉTÉ D'ANALYSE

Soit $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ un espace de Bourgain-Delbaen ayant la propriété d'analyse. Notre but dans cette section est de montrer que la classe \mathcal{C} des *super suites de blocs* est une classe suffisante au sens de la définition donnée au paragraphe 3.3.

6.1. Super suites de blocs

Soit $(x_j)_{j \in I}$ une suite de blocs de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ relativement à la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$. On dit que $(x_j)_{j \in I}$ est une *super suite de blocs de constante C* si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (a) $\sup_{j \in I} \|x_j\| \leq C$;
- (b) pour tout $j \in I$, $j > 1$, tout $1 \leq i \leq \max(\text{im}(x_{j-1}))$ et tout $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_i$, $|x_j(\gamma)| \leq C/m_i$.

Rappelons que l'image d'un élément x de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ appartenant à $\text{vect}[M_k; k \geq 1]$ est le plus petit intervalle ouvert (p, q) d'entiers tel que $x \in \text{vect}[M_k; p < k < q]$. On a donc $\max(\text{im}(x)) = q - 1$.

Cette définition de super suite de blocs peut se comprendre de la manière suivante : pour tout $j \in J$, notons $\text{im}(x_j) = (p_j, q_j)$. Pour tout $\gamma \in \Gamma_{p_j}$, $x_j(\gamma) = 0$. Or pour tout $\gamma \in \Gamma_{p_j}$, le poids de γ est de la forme $1/m_i$ avec $i \leq p_j$. L'inégalité portant sur $|x_j(\gamma)|$ qui apparaît dans la condition (b) est donc automatiquement vérifiée si $\gamma \in \Gamma_{p_j}$ est de poids $1/m_i$ avec $i < q_{j-1}$. La condition (b) étend cette propriété à tous les éléments de Γ de poids $1/m_i$ avec $1 \leq i < q_{j-1}$.

6.2. Exemples de super suites de blocs

Pour donner des exemples significatifs de super suites de blocs dans les espaces ayant la propriété d'analyse, nous aurons besoin de la notion de support local d'un élément x de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ appartenant à $\text{vect}[M_k; k \geq 1]$: si $\text{im}(x) = (p, q)$, il existe un unique élément u de $\ell^\infty(\Gamma_{q-1} \setminus \Gamma_p)$ (qui est $x|_{\Gamma_{q-1}}$) tel que $x = i_{q-1}(u)$. On appellera *support local* de x le support de u , i.e. l'ensemble

$$\{\gamma \in \Gamma_{q-1} \text{ tels que } u(\gamma) \neq 0\} = \{\gamma \in \Gamma_{q-1} \text{ tels que } x(\gamma) \neq 0\}.$$

Nous aurons besoin du lemme technique suivant :

LEMME 6.1. — *Soit $\gamma \in \Gamma$ un élément de poids $1/m_i$, et soit x un élément de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ avec $\text{im}(x) = (p, q)$ tel que pour tout $\xi \in \Gamma_{q-1}$ appartenant au support local de x , le poids de ξ est différent de $1/m_i$. Alors*

$$|x(\gamma)| \leq \frac{3\|x\|}{m_i}.$$

Démonstration. — Si le rang de γ est strictement inférieur à q , $x(\gamma) = 0$ car sinon γ serait un élément de poids $1/m_i$ appartenant au support local de x . On peut donc supposer que le rang de γ est supérieur ou égal à q . Soit $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$ l'analyse de γ , et soit $1 \leq t \leq a$ le plus petit entier tel que $p_t \geq q$. On a alors

$$e_\gamma^* = e_{\xi_t}^* + \sum_{j=t+1}^a d_{\xi_j}^* + \frac{1}{m_i} \sum_{j=t+1}^a P_{(p_{j-1}, p_j)}^* b_j^*$$

et

$$x(\gamma) = x(\xi_t) + \sum_{j=t+1}^a \langle x, d_{\xi_j}^* \rangle + \frac{1}{m_i} \sum_{j=t+1}^a \langle P_{(p_{j-1}, p_j)} x, b_j^* \rangle.$$

Comme $\text{rang}(\xi_t) = p_t \geq q$, $P_{(p_{j-1}, p_j)} x = 0$ pour tout $j > t$, et le troisième terme est nul. Le deuxième terme est nul pour la même raison, et on a donc $x(\gamma) = x(\xi_t)$. Or

$$e_{\xi_t}^* = \begin{cases} e_{\xi_{t-1}}^* + \frac{1}{m_i} P_{(p_{t-1}, p_t)}^* b_t^* & \text{si } t > 1 \\ \frac{1}{m_i} b_1^* & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

donc

$$x(\xi_t) = \begin{cases} x(\xi_{t-1}) + \frac{1}{m_i} \langle P_{(p_{t-1}, p_t)} x, b_t^* \rangle & \text{si } t > 1 \\ \frac{1}{m_i} \langle x, b_1^* \rangle & \text{si } t = 1. \end{cases}$$

Si $t > 1$, ξ_{t-1} est un élément de poids $1/m_i$ et de rang $p_{t-1} < q$. L'hypothèse du lemme implique donc que $x(\xi_{t-1}) = 0$. Comme $\|P_{(p_{t-1}, p_t)}\| \leq 3$ et $\|b_t^*\| \leq 1$, il s'ensuit que $|x(\xi_t)| \leq 3\|x\|/m_i$. Si $t = 1$, $|x(\xi_1)| \leq \|x\|/m_i$. \square

Nous pouvons maintenant donner des conditions sur une suite de blocs bornée $(x_j)_{j \in I}$ impliquant que $(x_j)_{j \in I}$ est en fait une super suite de blocs. Ces conditions portent sur les poids des éléments appartenant aux supports locaux des x_j .

LEMME 6.2. — Soit $(x_j)_{j \in I}$ une suite de blocs bornée. On note, pour tout $j \in J$, $\text{im}(x_j) = (p_j, q_j)$. Supposons que $(x_j)_{j \in I}$ vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- (i) il existe h_0 tel que pour tout $j \in I$ et tout $\gamma \in \Gamma_{q_{j-1}}$ appartenant au support local de x_j , le poids de γ est supérieur ou égal à $1/m_{h_0}$;
- (ii) pour tout $j \in I$ et tout $\gamma \in \Gamma_{q_{j-1}}$ appartenant au support local de x_j , le poids de γ est inférieur ou égal à $1/m_{q_{j-1}}$.

Alors $(x_j)_{j \in I}$ est une super suite de blocs.

Démonstration. — Supposons (i) vérifiée. Soient $j \in I$, $j > 1$, et $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_i$, où $i < q_{j-1}$. Supposons d'abord que $i > h_0$. Si $\xi \in \Gamma_{q_{j-1}}$ appartient au support local de x_i , le poids de ξ est supérieur ou égal à $1/m_{h_0}$ par hypothèse, et donc différent de $1/m_i$. On peut donc appliquer le lemme 6.1, et $|x_j(\gamma)| \leq 3\|x_j\|/m_i$. Si $i \leq h_0$ on a $|x_j(\gamma)| \leq m_{h_0}\|x_j\|/m_i$, et ceci achève la preuve dans ce cas.

Supposons maintenant (ii) vérifiée. Soient $j \in I$ et γ de poids $1/m_i$ où $i < q_{j-1}$. L'hypothèse implique que pour tout $\gamma \in \Gamma_{q_{j-1}}$ appartenant au support local de x_j , le poids de γ est différent de $1/m_i$, et donc par le lemme 6.1 $|x_j(\gamma)| \leq 3\|x_j\|/m_i$, ce qui prouve le résultat. \square

6.3. La classe des super suites de blocs est suffisante

Considérons la classe \mathcal{C} des super suites de blocs infinies strictes $(x_j)_{j \geq 1}$ telles que pour tous $j \geq 1$ et $\gamma \in \Gamma$, $x_j(\gamma) \in \mathbb{Q}$.

PROPOSITION 6.3. — La classe \mathcal{C} est suffisante.

Démonstration. — La classe \mathcal{C} vérifie clairement les propriétés (i), (ii) et (iii) énoncées dans la section 3.3. Il suffit donc de vérifier la propriété (iv). Soit donc T un opérateur borné sur $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ tel que $\|Ty_j\| \rightarrow 0$ pour toute suite de blocs $(y_j)_{j \geq 1}$ appartenant à \mathcal{C} . Soit $(x_j)_{j \geq 1}$ une suite de blocs bornée stricte. Sans perdre en généralité, on peut supposer que $x_j(\gamma) \in \mathbb{Q}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Soit $(q_j)_{j \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $\text{im}(x_j) \subseteq (q_{j-1}, q_j)$ pour tout $j \geq 1$. Soit u_j le vecteur de $\ell^\infty(\Gamma_{q_{j-1}} \setminus \Gamma_{q_j})$ défini par $u_j = x_j|_{\Gamma_{q_{j-1}}}$. On a $x_j = i_{q_{j-1}}(u_j)$.

Pour tout entier $N \geq 1$, on décompose le vecteur u_j sous la forme $u_j = v_j^{(N)} + w_j^{(N)}$, où

$$\begin{aligned} v_j^{(N)} &= u_j \mathbb{1}_{A_j^{(N)}} & \text{et} & & A_j^{(N)} &= \{\gamma \in \Gamma_{q_{j-1}}; \text{poids}(\gamma) > 1/m_N\} \\ w_j^{(N)} &= u_j \mathbb{1}_{B_j^{(N)}} & \text{et} & & B_j^{(N)} &= \{\gamma \in \Gamma_{q_{j-1}}; \text{poids}(\gamma) \leq 1/m_N\}. \end{aligned}$$

Soient $y_j^{(N)}$ et $z_j^{(N)}$ les vecteurs de $\text{vect}[M_k; q_{j-1} < k < q_j]$ définis par $y_j^{(N)} = i_{q_{j-1}}(v_j^{(N)})$ et $z_j^{(N)} = i_{q_{j-1}}(w_j^{(N)})$. Comme on l'a vu dans le Fait 4.4, $(y_j^{(N)})_{j \geq 1}$ et $(z_j^{(N)})_{j \geq 1}$ sont des suites de blocs bornées, et pour tous $j, N \geq 1$, $x_j = y_j^{(N)} + z_j^{(N)}$. Il est clair que pour tout choix de l'entier N , la suite $(y_j^{(N)})_{j \geq 1}$ vérifie l'hypothèse (i) du lemme 6.2, et est donc une super suite de blocs. Il existe donc une suite strictement croissante d'entiers $(k_N)_{N \geq 1}$ telle que $\|Ty_{k_N}^{(N)}\| \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$. Si on pose $N_1 = 1$ et $N_{j+1} = q_{k_{N_j}}$, la suite de blocs $(z_{k_{N_j}}^{(N_j)})_{j \geq 1}$ vérifie l'hypothèse (ii) du lemme 6.2. C'est donc une super suite de blocs et $\|Tz_{k_{N_j}}^{(N_j)}\| \rightarrow 0$ quand $j \rightarrow +\infty$. On en déduit que $\|Tx_{k_{N_j}}^{(N_j)}\| \rightarrow 0$. Donc $\|Tx_j\| \rightarrow 0$ pour toute suite de blocs bornée stricte $(x_j)_{j \geq 1}$, et la classe \mathcal{C} vérifie l'hypothèse (iv). Ceci achève la preuve de la proposition 6.3. \square

Notre but est donc désormais de montrer que si $(x_j)_{j \geq 1}$ est une super suite de blocs stricte de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ à coefficients rationnels, $\lim d(Tx_j, \mathbb{R}x_j) = 0$. La proposition 3.3 permettra alors de déduire que $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ possède très peu d'opérateurs.

7. ESTIMATION DES MOYENNES D'ÉLÉMENTS DE SUPER SUITES DE BLOCS

Notre but dans cette partie est d'énoncer et de prouver des inégalités fondamentales concernant les coordonnées relativement à $(e_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de moyennes de la forme

$$\frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_k$$

où $(x_k)_{k \in I}$ est une super suite de blocs stricte de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$. Bien sûr, on suppose toujours aussi que $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ a la propriété d'analyse.

7.1. Énoncés

Soit $(x_k)_{k \in I}$ une super suite de blocs stricte de constante C , où I est un intervalle borné de \mathbb{N} avec $\min(I) = 1$. On note, pour tout $k \in I$, $q_k = \max(\text{im}(x_k)) + 1$, et $q_0 = 0$. On a alors $\text{im}(x_k) \subseteq (q_{k-1}, q_k)$ pour tout $k \in I$. Soit $j_0 \geq 1$ un entier tel que $n_{j_0} \in I$.

THÉORÈME 7.1. — *Soit $h \geq 1$. Pour tout élément γ de Γ de poids $1/m_h$, on a*

$$\left| \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k(\gamma) \right| \leq \begin{cases} \frac{4C}{n_{j_0}} + \frac{24C}{m_{j_0}m_h} & \text{si } h < j_0 \\ \frac{4C}{n_{j_0}} + \frac{6C}{m_h} & \text{si } h \geq j_0. \end{cases}$$

Ceci implique que $\left\| \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k \right\| \leq \frac{10C}{m_{j_0}}$.

C'est lorsque γ est de poids $1/m_h$ avec $h \leq j_0$ que les estimées obtenues sur les coordonnées de $\frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k(\gamma)$ sont les moins bonnes possibles : elles sont de l'ordre de $1/m_{j_0}$ lorsque γ est de poids $1/m_{j_0}$ par exemple, et l'estimation obtenue sur la norme des moyennes $\frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k$ est donc de l'ordre de $1/m_{j_0}$. Sous une hypothèse portant sur les coordonnées de la suite $(x_k)_{k \in I}$ relativement aux éléments de poids $1/m_{j_0}$, il est possible d'obtenir une bien meilleure estimation de la norme des moyennes $\frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k$, qui est cette fois de l'ordre de $1/m_{j_0}^2$.

THÉORÈME 7.2. — *Supposons que la propriété suivante est vérifiée :*

$$(*) \quad \text{pour tout } \xi \in \Gamma \text{ de poids } \frac{1}{m_{j_0}}, \quad \sum_{k=1}^{n_{j_0}} |x_k(\xi)| \leq C.$$

Soit $h \geq 1$. Pour tout élément γ de Γ de poids $1/m_h$, on a

$$\left| \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k(\gamma) \right| \leq \begin{cases} \frac{4C}{n_{j_0}} + \frac{60C}{m_{j_0}^2 m_h} & \text{si } h \leq j_0 \\ \frac{4C}{n_{j_0}} + \frac{6C}{m_h} & \text{si } h > j_0. \end{cases}$$

Ceci implique que $\left\| \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k \right\| \leq \frac{10C}{m_{j_0}^2}$.

Nous allons maintenant prouver ces deux estimations, et nous aurons pour cela besoin de deux énoncés techniques. Le lecteur averti reconnaîtra des estimées de type Tsirelson (d'où la notation (T, h) qui apparaît ci-dessous), mais nous allons les présenter de manière purement combinatoire, et ne ferons pas référence aux espaces de Tsirelson.

7.2. Deux énoncés techniques

Si $r, s \geq 1$ sont deux entiers, $[r]$ désignera la partie entière de r , $r \vee s$ le maximum de r et s , et $r \wedge s$ le minimum de r et s . Nous noterons $c_{00}(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites à support fini de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Soient $h \geq 1$ et $j_0 \geq 1$ deux entiers. Nous dirons que $g^* \in c_{00}(\mathbb{N})$ vérifie une estimée de type (T, h) relativement à la suite $(m_j, n_j)_{j \geq 1}$ si

$$* \quad 0 \leq g^*(k) \leq 1/m_h \text{ pour tout } k \geq 1;$$

$$* \quad \text{pour tout } j > h \text{ et tout entier } 1 \leq q \leq [\log_3 m_j],$$

$$\#\{k \geq 1; m_h |g^*(k)| > 3^{-q}\} \leq (3n_{j-1})^q.$$

Nous dirons que $g^* \in c_{00}(\mathbb{N})$ vérifie une estimée de type (T, h, j_0) relativement à la suite $(m_j, n_j)_{j \geq 1}$ si

$$* \quad 0 \leq g^*(k) \leq 1/m_h \text{ pour tout } k \geq 1;$$

$$* \quad \text{dans le cas où } j_0 > h, \text{ on a pour tout entier } 1 \leq q \leq [\log_3 m_{j_0}],$$

$$\#\{k \geq 1; m_h |g^*(k)| > 9^{-q}\} \leq (3n_{j_0-1})^q.$$

Un élément g^* vérifiant une estimée de type (T, h, j_0) ne vérifie pas nécessairement une estimée de type (T, h) , et cependant une estimée de type (T, h, j_0) est plus intéressante qu'une estimée de type (T, h) pour la raison suivante : une estimée de type (T, h) donne une borne égale à $(3n_{j_0-1})^{\lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor + 1}$ sur le cardinal de l'ensemble des entiers k tels que $|g^*(k)| > 1/(m_h m_{j_0})$, tandis qu'une estimée de type (T, h, j_0) donne une borne égale à $(3n_{j_0-1})^{\lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor + 1}$ sur le cardinal de l'ensemble des entiers k tels que $|g^*(k)| > 1/(m_h m_{j_0}^2)$.

La proposition 7.3 ci-dessous (respectivement la proposition 7.4) est l'élément clé de la preuve du théorème 7.1 (respectivement du théorème 7.2).

PROPOSITION 7.3. — *Soit $s \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_h$, et soit $(x_k)_{k \in I}$ une super suite de blocs stricte de constante C , où I est un intervalle borné de \mathbb{N} . Il existe $k_0 \in I$ et $g^* \in c_{00}(\mathbb{N})$ dont le support est contenu dans $\{k \in I; k > k_0\}$, qui vérifie une estimée de type (T, h) relativement à $(m_j, n_j)_{j \geq 1}$, et telle que*

$$\left| P_{(s, +\infty)} \sum_{k \in I} x_k(\gamma) \right| \leq 4C + 6C \sum_{k \in I} g^*(k).$$

Sous l'hypothèse (*) du théorème 7.2, la conclusion de la proposition 7.3 peut être partiellement renforcée : on construit l'élément g^* de manière à ce qu'il vérifie une estimée de type (T, h, j_0) .

PROPOSITION 7.4. — *Soient $s \geq 0$, $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_h$, $j_0 \geq 1$ et $(x_k)_{k \in I}$ une super suite de blocs stricte de constante C , où I est un intervalle borné de \mathbb{N} . Supposons que pour tout $\xi \in \Gamma$ de poids $1/m_{j_0}$, $\sum_{k \in I} |x_k(\xi)| \leq C$. Il existe alors $k_0 \in I$ et $g^* \in c_{00}(\mathbb{N})$ dont le support est contenu dans $\{k \in I; k > k_0\}$, qui vérifie une estimée de type (T, h, j_0) relativement à $(m_j, n_j)_{j \geq 1}$, et telle que*

$$\left| P_{(s, +\infty)} \sum_{k \in I} x_k(\gamma) \right| \leq 4C + 6C \sum_{k \in I} g^*(k).$$

Il est important de remarquer que, au contraire de ce qui est fait dans les énoncés des théorèmes 7.1 et 7.2, on ne suppose pas dans les propositions 7.3 et 7.4 que l'intervalle I de \mathbb{N} indexant la suite $(x_k)_{k \in I}$ vérifie $\min(I) = 1$. Ceci sera nécessaire dans les preuves, qui procèdent par récurrence sur le rang de γ .

Montrons d'abord comment les théorèmes 7.1 et 7.2 se déduisent de ces deux propositions.

7.3. Preuve des théorèmes 7.1 et 7.2

• Prouvons pour commencer le théorème 7.1. Soit $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_h$. On a d'après la proposition 7.3, appliquée avec $s = 0$ et $I = [1, n_{j_0}]$,

$$\left| \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k(\gamma) \right| \leq \frac{4C}{n_{j_0}} + \frac{6C}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} g^*(k),$$

où g^* vérifie une estimée de type (T, h) relativement à $(m_j, n_j)_{j \geq 1}$. Comme $0 \leq g^*(k) \leq 1/m_h$, le membre de droite est inférieur à $4C/n_{j_0} + 6C/m_h$, et l'estimée pour $h \geq j_0$ est claire. Cette estimée est également vraie pour $h < j_0$, mais nous pouvons dans ce cas obtenir une meilleure inégalité. Supposons donc que $h < j_0$. Alors

$$\frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} g^*(k) = \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{\{1 \leq k \leq n_{j_0}; g^*(k) \leq 3^{-q}/m_h\}} g^*(k) + \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{\{1 \leq k \leq n_{j_0}; g^*(k) > 3^{-q}/m_h\}} g^*(k)$$

où $q = \lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} g^*(k) &\leq \frac{3^{-q}}{m_h} + \frac{1}{n_{j_0}} \# \left\{ 1 \leq k \leq n_{j_0}; g^*(k) > \frac{3^{-q}}{m_h} \right\} \frac{1}{m_h} \\ &\leq \frac{3}{m_{j_0} m_h} + \frac{1}{n_{j_0} m_h} (3n_{j_0-1})^{\lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor + 1} \end{aligned}$$

puisque g^* vérifie une estimée de type (T, h) relativement à $(m_j, n_j)_{j \geq 1}$. Si la suite $(n_j)_{j \geq 1}$ croît suffisamment rapidement par rapport à $(m_j)_{j \geq 1}$, le deuxième terme est par exemple inférieur à $1/(m_h m_{j_0})$, si bien que

$$\frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} g^*(k) \leq \frac{4}{m_h m_{j_0}}.$$

Donc

$$\left| \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k(\gamma) \right| \leq \frac{4C}{n_{j_0}} + \frac{24C}{m_h m_{j_0}},$$

ce qui est l'inégalité cherchée pour $h < j_0$. L'estimation de la norme ℓ^∞ de $\frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k$ est une conséquence directe des inégalités obtenues sur les coordonnées.

• Prouvons maintenant le théorème 7.2. Soit γ de poids $1/m_h$. Si $h = j_0$, l'inégalité découle directement de la propriété (*) puisque

$$\left| \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} x_k(\gamma) \right| \leq \frac{C}{n_{j_0}}.$$

Si $h > j_0$, l'estimée se prouve exactement comme ci-dessus. Si $h < j_0$, on raisonne comme dans la preuve du théorème 7.1, mais en considérant les ensembles d'indices k où $g^*(k)$ est soit plus petit, soit plus grand que $9^{-q}/m_h$, où $q = \lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor$. Cela donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{n_{j_0}} \sum_{k=1}^{n_{j_0}} g^*(k) &\leq \frac{9^{-q}}{m_h} + \frac{1}{n_{j_0}} \frac{1}{m_h} \# \left\{ 1 \leq k \leq n_{j_0}; g^*(k) > \frac{9^{-q}}{m_h} \right\} \\ &\leq \frac{9}{m_h m_{j_0}^2} + \frac{1}{n_{j_0} m_h} (3n_{j_0-1})^{\lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor + 1} \leq \frac{10}{m_h m_{j_0}^2} \end{aligned}$$

puisque $j_0 > h$ et puisque g^* vérifie une estimée de type (T, h, j_0) relativement à $(m_j, n_j)_{j \geq 1}$. Cela prouve l'estimée cherchée pour $h < j_0$. L'estimation sur la norme des moyennes s'en déduit immédiatement.

Passons maintenant à la preuve des propositions 7.3 et 7.4.

7.4. Preuve des propositions 7.3 et 7.4

Nous aurons besoin d'un lemme qui fournit des estimées simples des quantités $|P_{(s,+\infty)}x_k(\gamma)|$. La suite $(x_k)_{k \in I}$ est toujours une super suite de blocs stricte de constante C . Comme on n'a pas nécessairement $\min(I) = 1$, on notera ici $q_{\min(I)-1} = 0$, et pour tout $k \in I$, $q_k = \max(\text{im}(x_k)) + 1$. On a donc $\text{im}(x_k) \subseteq (q_{k-1}, q_k)$ pour tout $k \in I$, et par hypothèse $|x_k(\gamma)| \leq C/m_i$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_i$, où $1 \leq i < q_{k-1}$.

LEMME 7.5. — Si $\gamma \in \Gamma$ est un élément de poids $1/m_i$, alors

$$|P_{(s,+\infty)}x_k(\gamma)| \leq \begin{cases} \frac{6C}{m_i} & \text{si } i < q_{k-1} \\ \frac{3C}{m_i} & \text{si } i \geq q_k. \end{cases}$$

Démonstration. — Supposons d'abord que $i \geq q_k$. Écrivons l'analyse de γ comme

$$e_\gamma^* = \sum_{r=1}^a d_{\xi_r}^* + \frac{1}{m_i} \sum_{r=1}^a P_{(p_{r-1}, p_r)}^* b_r^*.$$

On a $p_1 \geq i$, donc $p_1 \geq q_k$, ce qui implique que $\langle x_k, P_{(s, \infty)}^* P_{(p_{r-1}, p_r)}^* b_r^* \rangle = 0$ pour tout $2 \leq r \leq a$. De même $\langle x_k, d_{\xi_r}^* \rangle = 0$ pour tout $1 \leq r \leq a$ et donc

$$|P_{(s,+\infty)}x_k(\gamma)| = \frac{1}{m_i} |\langle x_k, P_{(0, p_1)}^* b_1^* \rangle| \leq \frac{3C}{m_i}.$$

C'est l'estimée cherchée, et elle ne fait pas appel à l'hypothèse que $(x_k)_{k \in I}$ est une super suite de blocs.

Supposons maintenant que $i < q_{k-1}$. On écrit l'analyse de γ sous la même forme. Les termes s'estiment différemment selon la position de s relativement aux entiers p_1, \dots, p_a . Si $s \geq p_a$, $P_{(s,+\infty)}x_k(\gamma) = 0$ et il n'y a rien à prouver. Si $0 \leq s < p_1$, on a

$$\langle P_{(s,+\infty)}x_k, e_\gamma^* \rangle = \langle x_k, e_\gamma^* \rangle - \frac{1}{m_i} \langle P_{(0, s]} x_k, b_1^* \rangle.$$

Comme $1 \leq i < q_{k-1}$, $|x_k(\gamma)| \leq C/m_i$, et donc

$$|\langle P_{(s,+\infty)}x_k, e_\gamma^* \rangle| \leq \frac{C}{m_i} + \frac{2C}{m_i} = \frac{3C}{m_i}.$$

Supposons maintenant qu'il existe $1 \leq t < a$ tel que $p_t \leq s < p_{t+1}$. On a alors

$$e_\gamma^* = e_{\xi_t}^* + \sum_{r=t+1}^a d_{\xi_r}^* + \frac{1}{m_i} \sum_{r=t+1}^a P_{(p_{r-1}, p_r)}^* b_r^*$$

si bien que

$$\begin{aligned} |\langle P_{(s,+\infty)}x_k, e_\gamma^* \rangle| &= \left| \langle x_k, e_\gamma^* \rangle - \langle x_k, e_{\xi_t}^* \rangle - \frac{1}{m_i} \langle P_{(p_t, s]} x_k, b_{t+1}^* \rangle \right| \\ &\leq \frac{C}{m_i} + \frac{C}{m_i} + \frac{4C}{m_i} = \frac{6C}{m_i} \end{aligned}$$

puisque γ et ξ_t sont de poids $1/m_i$ avec $1 \leq i < q_{k-1}$. Ceci prouve le lemme 7.5. \square

L'hypothèse que $(x_k)_{k \in I}$ est une super suite de blocs a été utilisée de la manière suivante :

LEMME 7.6. — Si $\|x\| \leq C$, $i \geq 1$, et $|x(\xi)| \leq \delta$ pour tout $\xi \in \Gamma$ de poids $1/m_i$, alors

$$|P_{(s,+\infty)} x(\gamma)| \leq 2C\delta + \frac{4C}{m_i}$$

pour tout $s \geq 0$ et tout $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_i$.

Nous pouvons maintenant prouver les propositions 7.3 et 7.4.

Démonstration de la proposition 7.3. — On raisonne par récurrence sur le rang de γ . Si γ est de rang 1, et $s \geq 0$,

$$P_{(s,+\infty)} \sum_{k \in I} x_k(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{si } s \geq 1 \\ x_1(\gamma) & \text{sinon} \end{cases}$$

et il suffit de prendre $k_0 \in I$ arbitraire et $g^* = 0$.

Supposons maintenant que γ est de rang au moins 2, de poids $1/m_h$, et écrivons son analyse sous la forme

$$e_\gamma^* = \sum_{r=1}^a d_{\xi_r}^* + \frac{1}{m_h} \sum_{r=1}^a P_{(p_{r-1}, p_r)}^* b_r^*.$$

Soit $s \geq 0$. Supposons qu'il existe un entier $l \in I$ tel que $q_{l-1} \leq h < q_l$ (les cas où $h < q_{\min(I)-1}$ et $h \geq q_{\max(I)}$ sont plus simples et nous ne les traiterons pas ici). On a

$$\left| P_{(s,+\infty)} \sum_{k \in I} x_k(\gamma) \right| \leq \left| \sum_{k \in I, k < l} P_{(s,+\infty)} x_k(\gamma) \right| + \left| P_{(s,+\infty)} x_l(\gamma) \right| + \left| \sum_{k \in I, k > l} P_{(s,+\infty)} x_k(\gamma) \right|.$$

Si $k < l$, alors $h \geq q_{l-1} \geq q_k$, donc par le lemme 7.5 $|P_{(s,+\infty)} x_k(\gamma)| \leq 3C/m_h$ et le premier terme est donc inférieur à $3Cl/m_h \leq 3Cl/m_{q_{l-1}} \leq C$ si la suite $(m_j)_{j \geq 1}$ croît suffisamment rapidement. Pour le deuxième terme, $|P_{(s,+\infty)} x_l(\gamma)| \leq 3C$. Il reste à estimer le dernier terme. Si $k > l$, alors $h < q_l \leq q_{k-1}$. Donc $|P_{(s,+\infty)} x_k(\gamma)| \leq 6C/m_h$ par le lemme 7.5. Considérons alors séparément les deux cas suivants :

- l'image de $P_{(s,+\infty)} x_k$ contient l'un des entiers p_r , $1 \leq r \leq a$. On note I_0 l'ensemble des $k \in I$ ayant cette propriété. On a $\#I_0 \leq a$;

- l'image de $P_{(s,+\infty)} x_k$ est contenue dans l'un des intervalles (p_{r-1}, p_r) . On note, pour chaque $1 \leq r \leq a$, I_r l'ensemble des k ayant cette propriété. Si $k \in I_r$, on a $P_{(s,+\infty)} x_k = P_{(s \vee p_{r-1}, p_r)} x_k$, et en particulier

$$P_{(s,+\infty)} x_k(\gamma) = \frac{1}{m_h} \langle P_{(s \vee p_{r-1}, p_r)} x_k, b_r^* \rangle.$$

Donc

$$\left| P_{(s,+\infty)} \sum_{k \in I, k > l} x_k(\gamma) \right| \leq \frac{6C}{m_h} \#I_0 + \frac{1}{m_h} \left| \sum_{r=1}^a \left\langle \sum_{k \in I_r} P_{(s \vee p_{r-1}, p_r)} x_k, b_r^* \right\rangle \right|.$$

Comme chaque élément b_r^* est de la forme $\sum_{\eta \in \Gamma_{p_{r-1}} \setminus \Gamma_{p_r-1}} a_\eta e_\eta^*$ avec $\sum_{\eta \in \Gamma_{p_{r-1}} \setminus \Gamma_{p_r-1}} |a_\eta| \leq 1$, on peut pour chaque $1 \leq r \leq a$ choisir un élément $\eta_r \in \Gamma_{p_{r-1}} \setminus \Gamma_{p_r-1}$ tel que

$$\left| \left\langle \sum_{k \in I_r} P_{(s \vee p_{r-1}, p_r)} x_k, b_r^* \right\rangle \right| \leq \left| \left\langle \sum_{k \in I_r} P_{(s \vee p_{r-1}, p_r)} x_k, e_{\eta_r}^* \right\rangle \right|.$$

On a donc

$$\left| P_{(s, +\infty)} \sum_{\substack{k \in I \\ k > l}} x_k(\gamma) \right| \leq \frac{6C}{m_h} \#I_0 + \frac{1}{m_h} \sum_{r=1}^a \left| \sum_{k \in I_r} P_{(s \vee p_{r-1}, p_r)} x_k(\eta_r) \right|.$$

Comme le rang de chaque élément η_r est strictement inférieur au rang de γ , et comme $(x_k)_{k \in I_r}$ est une super suite de blocs de constante C , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence aux données $(x_k)_{k \in I_r}$ et η_r (c'est pour cela qu'il est important de considérer dans la proposition 7.3 tous les intervalles bornés I , et pas seulement ceux qui vérifient $\min(I) = 1$). Si on note $1/m_{h_r}$ le poids de η_r , il existe $k_r \in I_r$ et $g_r^* \in c_{00}(\mathbb{N})$ dont le support est contenu dans l'ensemble $\{k \in I_r; k > k_r\}$, satisfaisant une estimée de type (T, h_r) , et telle que

$$\left| P_{(s, +\infty)} \sum_{k \in I_r} x_k(\eta_r) \right| = \left| \sum_{k \in I_r} P_{(s \vee p_{r-1}, p_r)} x_k(\eta_r) \right| \leq 4C + 6C \sum_{k \in I_r} g_r^*(k).$$

Posons $k_0 = l$ et

$$g^* = \frac{1}{m_h} \left(\sum_{k \in I_0} e_k^* + \sum_{r=1}^a (e_{k_r}^* + g_r^*) \right).$$

Comme tous les intervalles I_0 et I_r , $1 \leq r \leq a$, sont contenus dans $\{k \in I; k > l\}$, g^* est à support dans $\{k \in I; k > k_0\}$. On a

$$\sum_{k \in I} g^*(k) = \frac{1}{m_h} (\#I_0 + a) + \frac{1}{m_h} \sum_{r=1}^a \sum_{k \in I_r} g_r^*(k).$$

En regroupant toutes les estimées prouvées jusqu'ici, on obtient

$$\begin{aligned} \left| P_{(s, +\infty)} \sum_{k \in I} x_k(\gamma) \right| &\leq 4C + \frac{6C}{m_h} \#I_0 + \frac{1}{m_h} \sum_{r=1}^a \left(4C + 6C \sum_{k \in I_r} g_r^*(k) \right) \\ &= 4C + \frac{6C}{m_h} \#I_0 + \frac{4C}{m_h} a + \frac{6C}{m_h} \sum_{r=1}^a \sum_{k \in I_r} g_r^*(k) \\ &\leq 4C + 6C \sum_{k \in I} g^*(k). \end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à montrer que g^* vérifie une (T, h) -estimée. Puisque les supports des éléments e_k^* , $k \in I_0$, $e_{k_r}^*$ et g_r^* , $1 \leq r \leq a$, sont disjoints et puisque $\|g_r^*\| \leq 1$ pour $1 \leq a \leq r$, on a $0 \leq g^*(k) \leq 1/m_h$ pour tout $k \in I$. Soient ensuite $j > h$, et $1 \leq q \leq \lfloor \log_3 m_j \rfloor$. Supposons que $k \in I$ est tel que $m_h |g^*(k)| > 3^{-q}$. On a alors trois possibilités :

- ou bien $k \in I_0$ et alors $m_h |g^*(k)| = 1$;
- ou bien il existe $1 \leq r \leq a$ tel que $k = k_r$, et alors $m_h |g^*(k_r)| = 1$;
- ou bien il existe $1 \leq r \leq a$ tel que $k \in I_r$ et $k > k_r$, et alors $|g_r^*(k)| > 3^{-q}$.

Si ce dernier cas se produit pour un certain entier $1 \leq r \leq a$, on a nécessairement $h_r < j$. En effet, si $h_r \geq j$, le fait que g_r^* vérifie une estimée de type (T, h_r) implique que $\|g_r^*\|_\infty \leq 1/m_{h_r} \leq 1/m_j$, et donc $\|g_r^*\|_\infty \leq 3^{-q}$ pour tout $1 \leq q \leq \lfloor \log_3 m_j \rfloor$. Donc $h_r < j$. Si $|g_r^*(k)| > 3^{-q}$, alors $m_{h_r} |g_r^*(k)| > m_{h_r} 3^{-q} \geq 3 \cdot 3^{-q} = 3^{-(q-1)}$ pourvu que $m_1 \geq 3$, et comme $\|g_r^*\|_\infty \leq 1/m_{h_r}$, $q \geq 2$ nécessairement. Comme g_r^* vérifie une estimée de type (T, h_r) et $j > h_r$, on a

$$\#\{k \in I; |g_r^*(k)| > 3^{-q}\} \leq \#\{k \in I; m_{h_r} |g_r^*(k)| > 3^{-(q-1)}\} \leq (3n_{j-1})^{q-1},$$

et donc

$$\#\{k \in I; m_h |g^*(k)| > 3^{-q}\} \leq \#I_0 + a + a(3n_{j-1})^{q-1}.$$

Or $\#I_0 \leq a$, et $a \leq n_h$ (c'est ici qu'intervient la majoration a priori de l'âge des éléments de poids $1/m_h$). Donc

$$\#\{k \in I; m_h |g^*(k)| > 3^{-q}\} \leq 2n_h + n_h (3n_{j-1})^{q-1}.$$

Comme $h < j$, le membre de droite est inférieur ou égal à $3n_{j-1}(3n_{j-1})^{q-1}$ et donc

$$\#\{k \in I; m_h |g^*(k)| > 3^{-q}\} \leq (3n_{j-1})^q.$$

Ceci achève la preuve de la proposition 7.3. \square

Démonstration de la proposition 7.4. — Soit $\gamma \in \Gamma$ de poids $1/m_h$, $j_0 \geq 1$ et $s \geq 0$. Traitons d'abord séparément le cas où $h = j_0$. Dans ce cas, soit $l \in I$ tel que $q_{l-1} \leq s < q_l$ et $P_{(s, +\infty)} x_k = 0$ pour tout $k < l$ (si un tel l n'existe pas, on prend n'importe quel $k_0 \in I$ et $g^* = 0$). Alors

$$\begin{aligned} |P_{(s, +\infty)} \sum_{k \in I} x_k(\gamma)| &\leq |P_{(s, +\infty)} x_l(\gamma)| + \left| \sum_{\substack{k \in I \\ k > l}} x_k(\gamma) \right| \\ &\leq 3C + \sum_{\substack{k \in I \\ k > l}} |x_k(\gamma)| \leq 4C \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de la proposition 7.4 (que l'on peut appliquer puisque γ est de poids $1/m_{j_0}$). Il suffit de prendre par exemple $k_0 = l$ et $g^* = 0$, et le résultat est prouvé dans ce cas.

Pour le prouver dans le cas où $h \neq j_0$, on raisonne par récurrence sur le rang de γ , en procédant comme dans la preuve de la proposition 7.3. On applique l'hypothèse de récurrence à chacune des données $(x_k)_{k \in I_r}$ et η_r , où η_r est de poids $1/m_{h_r}$, $1 \leq r \leq a$. On obtient $k_r \in I_r$ et $g_r^* \in c_{00}(\mathbb{N})$ dont le support est contenu dans $\{k \in I_r; k > k_r\}$,

satisfaisant une estimée de type (T, h_r, j_0) . Si $h_r = j_0$, on prend, comme on l'a fait ci-dessus, $g_r^* = 0$. On considère alors

$$g^* = \frac{1}{m_h} \left(\sum_{k \in I_0} e_k^* + \sum_{r=1}^a (e_{k_r}^* + g_r^*) \right),$$

et il s'agit de montrer que g^* satisfait une estimée de type (T, h, j_0) . Clairement $0 \leq g^*(k) \leq 1/m_h$ pour tout $k \in I$. Supposons ensuite que $j_0 > h$ (si $j_0 < h$, il n'y a rien à démontrer), et soit q tel que $1 \leq q \leq \lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor$. Supposons que $k \in I$ est tel que $m_h |g^*(k)| > 9^{-q}$. On a alors, comme dans la preuve de la proposition 7.3, trois possibilités :

- ou bien $k \in I_0$, et alors $m_h |g^*(k)| = 1$;
- ou bien il existe $1 \leq r \leq a$ tel que $k = k_r$, et alors $m_h |g^*(k_r)| = 1$;
- ou bien il existe $1 \leq r \leq a$ tel que $k \in I_r$ et $k > k_r$, et alors $|g_r^*(k)| > 9^{-q}$.

Si le dernier cas se produit pour un certain $1 \leq r \leq a$, on a $j_0 > h_r$. En effet, si $j_0 < h_r$, alors $\|g_r^*\|_\infty \leq 1/m_{h_r} \leq 1/m_{j_0+1} \leq 1/m_{j_0}^2$ si la suite $(m_j)_{j \geq 1}$ croît suffisamment rapidement, et donc $\|g_r^*\|_\infty \leq 9^{-q}$ pour tout $1 \leq q \leq \lfloor \log_3 m_{j_0} \rfloor$. Si $j_0 = h_r$, alors $g_r^* = 0$ par hypothèse, et donc il est impossible qu'il existe $k \in I_r$ tel que $|g_r^*(k)| > 9^{-q}$. Donc $j_0 > h_r$. Si $|g_r^*(k)| > 9^{-q}$, alors $m_{h_r} |g_r^*(k)| > 9^{-(q-1)}$ (pourvu que $m_1 \geq 9$). Puisque $\|g_r^*\|_\infty \leq 1/m_{h_r}$, $q \geq 2$. De manière analogue à ce qui a été fait dans la preuve de la proposition 7.3, on utilise le fait que g_r^* vérifie une estimée de type (T, h_r, j_0) pour montrer que

$$\#\{k \in I; m_h |g^*(k)| > 9^{-q}\} \leq (3n_{j_0-1})^q.$$

Ceci prouve que g^* vérifie une estimée de type (T, h, j_0) et achève la preuve de la proposition 7.4. \square

7.5. Une conséquence : $\mathbf{X}(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})^*$ est isomorphe à $\ell^1(\Gamma)$

Nous donnons dans ce court paragraphe une conséquence facile du théorème 7.1, qui montre déjà l'utilité de ce type d'estimées.

PROPOSITION 7.7. — *Si $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ a la propriété d'analyse, la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$ de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ est contractante, et le dual de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ est donc isomorphe à $\ell^1(\Gamma)$.*

Démonstration. — Par le fait 2.1, il suffit de montrer que toute suite de blocs normalisée $(x_k)_{k \geq 1}$ relativement à $(M_n)_{n \geq 1}$ tend faiblement vers 0. Le même argument que celui donné dans la preuve de la proposition 6.3 montre qu'il suffit de prouver cela pour les super suites de blocs strictes. Soit donc $(x_k)_{k \geq 1}$ une super suite de blocs stricte, de constante C . Si x_k ne tend pas faiblement vers 0, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite et à remplacer x_k par $-x_k$ si nécessaire, qu'il existe $\delta > 0$ et $\varphi \in X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})^*$ de norme 1 tels que $\varphi(x_k) \geq \delta$ pour tout $k \geq 1$. Alors

$$\left\| \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_k \right\| \geq \varphi \left(\frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_k \right) \geq \delta$$

pour tout $j \geq 1$. Ceci contredit évidemment le théorème 7.1. \square

8. STRATÉGIE DE PREUVE DU THÉORÈME 1.1

Tous les outils sont maintenant en place pour que nous puissions ébaucher une stratégie de preuve du théorème 1.1, et voir quelles conditions supplémentaires doivent vérifier les éléments de Γ pour que cette stratégie puisse être menée à bien.

8.1. Un premier essai

On souhaite construire Γ de telle sorte que tout opérateur T sur $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ soit somme d'un opérateur scalaire et d'un opérateur compact. Comme nous l'avons vu à la fin de la partie 6, il s'agit de faire en sorte que pour toute super suite de blocs $(x_j)_{j \geq 1}$ de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ qui appartient à \mathcal{C} , $\lim d(Tx_j, \mathbb{R}x_j) = 0$. Raisonnons par l'absurde, et supposons qu'il existe $(x_j)_{j \geq 1}$ appartenant à \mathcal{C} et $\delta > 0$ tels que $d(Tx_j, \mathbb{R}x_j) \geq \delta$ pour tout $j \geq 1$. Comme la FDD $(M_n)_{n \geq 1}$ est contractante, $x_j \xrightarrow{w} 0$ et donc $Tx_j \xrightarrow{w} 0$. Quitte à extraire une sous-suite de $(x_j)_{j \geq 1}$ et à considérer une perturbation nucléaire adaptée de l'opérateur T , on peut supposer qu'il existe une suite strictement croissante $(p_j)_{j \geq 0}$ d'entiers telle que $p_0 = 0$, $p_{j-1} < p_j - 1$, $\text{im}(x_j) \subseteq (p_{j-1}, p_j)$ et $\text{im}(Tx_j) \subseteq (p_{j-1}, p_j)$ pour tout $j \geq 1$.

Par le lemme 4.6 il existe alors pour tout $j \geq 1$ un vecteur $b_j^* \in B_{\ell^1(\Gamma_{p_j-1} \setminus \Gamma_{p_{j-1}})}$ tel que $\langle x_j, b_j^* \rangle = 0$ et $\langle Tx_j, b_j^* \rangle > \delta/2$. Comme $x_j(\gamma) \in \mathbb{Q}$ pour tous $j \geq 1$ et $\gamma \in \Gamma$, un argument simple montre qu'on peut, quitte à extraire de nouveau une sous-suite, supposer que $b_j^* \in B_{p_{j-1}, p_j-1}$ pour tout $j \geq 1$.

Au vu des estimées de la partie 7, il est alors naturel de considérer les moyennes

$$z_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_k, \quad j \geq 1,$$

qui vérifient $\|z_j\| \leq 10C/m_j$ par le théorème 7.1.

Comme $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$ a la propriété d'analyse et comme $p_{j-1} < p_j - 1$ pour tout $j \geq 1$, il existe pour tout $1 \leq j \leq p_1$ un élément γ_j de Γ de poids $1/m_j$ dont l'analyse est $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq n_j}$, où les ξ_i sont de rang p_i pour tout $1 \leq i \leq n_j$. En particulier, γ_j est de rang p_{n_j} . Nous oublierons dans ce premier essai de preuve la condition $j \leq p_1$, ceci afin de ne pas compliquer notre propos. Si par exemple $p_1 < j \leq p_2$, il faut considérer

$$z_j = \frac{1}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} x_{k+1}$$

et raisonner de la même manière avec ces moyennes z_j en observant qu'on a toujours $\|z_j\| \leq 10C/m_j$. L'analyse de $e_{\gamma_j}^*$ s'écrit

$$e_{\gamma_j}^* = \sum_{i=1}^{n_j} d_{\xi_i}^* + \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^{n_j} P_{(p_{i-1}, p_i)}^* b_i^*.$$

En utilisant le fait que ξ_i est de rang p_i pour tout $1 \leq i \leq n_j$, que les images de x_k et Tx_k sont contenues dans (p_{k-1}, p_k) , et que $\langle x_k, b_k^* \rangle = 0$ et $\langle Tx_k, b_k^* \rangle > \delta/2$ pour

tout $1 \leq k \leq n_j$, on obtient $x_k(\gamma_j) = 0$ et $Tx_k(\gamma_j) > \delta/(2m_j)$ pour tous $j \geq 1$ et $1 \leq k \leq n_j$. En particulier $Tz_j(\gamma_j) > \delta/(2m_j)$. Cette deuxième inégalité implique donc que $\|Tz_j\| > \delta/(2m_j)$. Afin d'obtenir une contradiction, il faut réussir à exploiter le fait que $x_k(\gamma_j) = 0$ pour tous $j \geq 1$ et $1 \leq k \leq n_j$ (ce que nous n'avons pas fait jusqu'ici). Une idée naturelle pour cela est de tenter d'appliquer le théorème 7.2. Observons que γ_j est un élément de poids $1/m_j$ qui vérifie $\sum_{k=1}^{n_j} |x_k(\gamma_j)| = 0 \leq C$, et que tous les éléments ξ_i , $1 \leq i < n_j$, qui sont aussi de poids $1/m_j$, vérifient également $\sum_{k=1}^{n_j} |x_k(\xi_i)| = 0 \leq C$. Si on pouvait montrer qu'une telle inégalité est vérifiée pour tout élément de poids $1/m_j$ (et pas seulement pour les ξ_i), on pourrait appliquer le théorème 7.2, et en déduire que $\|z_j\| \leq 10C/m_j^2$. On aurait alors $\|Tz_j\| \leq 10C\|T\|/m_j^2$. Mais $\|Tz_j\| > \delta/(2m_j)$ et ceci est contradictoire pour j suffisamment grand.

8.2. Une contradiction, et un deuxième essai

Un instant de réflexion montre qu'une telle approche est un peu trop simple, car nous demandons simultanément

- qu'il y ait beaucoup d'éléments de poids $1/m_j$, de manière à pouvoir construire les éléments γ_j grâce à la propriété d'analyse de $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, et
- qu'il y ait peu d'éléments de poids $1/m_j$, de manière à pouvoir montrer que l'hypothèse (*) du théorème 7.2 est vérifiée pour la suite de blocs $(x_k)_{1 \leq k \leq n_j}$.

Pour contourner ce problème, nous allons devoir procéder en deux temps, et introduire deux types d'éléments de Γ , que nous appellerons *éléments de poids pair* et *éléments de poids impair*. Les éléments de poids pair (resp. impair) sont ceux dont le poids est de la forme $1/m_{2j}$, $j \geq 1$ (resp. $1/m_{2j-1}$, $j \geq 1$). Nous allons faire en sorte que

- tout élément de Γ ait une analyse, i.e. que la propriété (1) donnée dans la section 5.2 soit vérifiée pour tout élément de Γ , qu'il soit de poids pair ou de poids impair ;
- pour tout $j \geq 1$, il y ait beaucoup d'éléments de poids $1/m_{2j}$, i.e. que la propriété (2) donnée dans la section 5.2 soit vérifiée pour tout élément de Γ de poids pair ;
- pour tout $j \geq 1$, il y ait relativement peu d'éléments de poids $1/m_{2j-1}$. La propriété (2) pour les éléments de poids $1/m_{2j-1}$ ne sera vérifiée que pour certaines suites $(b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$ très particulières de la forme $(e_{\eta_i}^*)_{1 \leq i \leq a}$, où les poids des vecteurs η_i satisfont certaines conditions.

Il faut alors prendre deux séries de moyennes d'éléments de la suite de blocs $(x_j)_{j \geq 1}$. Les premières moyennes sont de la forme

$$z_{j,l} = m_{2j} \left(\frac{1}{n_{2j}} \sum_{k=1}^{n_{2j}} x_{k+l} \right).$$

La famille des normes des vecteurs $z_{j,l}$, $j, l \geq 1$, est bornée (ce qui découle du théorème 7.1), et la partie (2) de la propriété d'analyse pour les éléments de poids pair permet de montrer l'existence d'éléments $\eta_{j,l}$ de poids $1/m_{2j}$ et de rang $p_{n_{2j}}$ tels que $z_{j,l}(\eta_{j,l}) = 0$ et $Tz_{j,l}(\eta_{j,l}) > \delta/2$.

On peut alors choisir une suite $(l_j)_{j \geq 1}$ d'entiers telle que la suite $(z_{j,l_j})_{j \geq 1}$ forme une suite de blocs stricte bornée qui est même une super suite de blocs stricte (ce qui n'est pas évident) pour laquelle il existe une suite strictement croissante $(p_j)_{j \geq 0}$ d'entiers telle que $p_0 = 0$, $p_{j-1} < p_j - 1$, $\text{im}(z_{j,l_j}) \subseteq (p_{j-1}, p_j)$ et $\text{im}(Tz_{j,l_j}) \subseteq (p_{j-1}, p_j)$ pour tout $j \geq 1$. On notera C' la constante de la super suite de blocs $(z_{j,l_j})_{j \geq 1}$. On considère alors les moyennes d'ordre impair

$$w_j = \frac{1}{n_{2j-1}} \sum_{k=1}^{n_{2j-1}} z_{k,l_k},$$

auxquelles on souhaite de nouveau appliquer le raisonnement présenté plus haut, partant de l'hypothèse que $\langle z_{k,l_k}, e_{\eta_{k,l_k}}^* \rangle = 0$ et $\langle Tz_{k,l_k}, e_{\eta_{k,l_k}}^* \rangle > \delta/2$ pour tout $1 \leq k \leq n_{2j-1}$. On a pour cela besoin qu'il existe pour tout $j \geq 1$ un élément γ_j de poids $1/m_{2j-1}$ et d'analyse $(\xi_i, p_i, e_{\eta_{i,l_i}}^*)_{1 \leq i \leq n_{2j-1}}$. Si cette forme faible de la partie (2) de la propriété d'analyse pour les éléments de poids impair est vérifiée, on aura alors

$$z_{k,l_k}(\gamma_j) = 0 \quad \text{et} \quad Tz_{k,l_k}(\gamma_j) > \frac{\delta}{2m_{2j-1}}$$

pour tous $j \geq 1$ et $1 \leq k \leq n_{2j-1}$, si bien qu'en particulier

$$Tw_j(\gamma_j) > \frac{\delta}{2m_{2j-1}} \quad \text{et donc} \quad \|Tw_j\| > \frac{\delta}{2m_{2j-1}}.$$

S'il y a malgré tout suffisamment peu d'éléments de poids impair pour qu'on ait

$$\sum_{k=1}^{n_{2j-1}} |z_{k,l_k}(\xi)| \leq C' \quad \text{pour tout élément } \xi \in \Gamma \text{ de poids } 1/m_{2j-1},$$

la super suite de blocs $(z_{k,l_k})_{1 \leq k \leq n_{2j-1}}$ vérifie l'hypothèse (*) du théorème 7.2, et donc $\|w_j\| \leq 10C'/m_j^2$. Mais $\|Tw_j\| > \delta/(2m_j)$, ce qui est contradictoire pour j suffisamment grand.

9. CONSTRUCTION EXPLICITE DE L'ESPACE $X(\Gamma, (\mathbf{D}_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$

Il est maintenant temps de définir explicitement l'ensemble Γ (qui codera directement les vecteurs c_γ^*).

9.1. Définition de l'ensemble Γ

Pour que Γ vérifie toutes les propriétés nécessaires au raisonnement ci-dessus, on peut définir les ensembles Δ_n par récurrence sur $n \geq 1$ de la manière suivante :

$$\Delta_1 = \{1\}, \quad \text{et pour tout } n \geq 2, \quad \Delta_n = \Delta_{n,\text{pair}}^1 \cup \Delta_{n,\text{pair}}^2 \cup \Delta_{n,\text{impair}}^1 \cup \Delta_{n,\text{impair}}^2, \quad \text{où}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{n, \text{pair}}^1 &= \bigcup_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \left\{ \left(n, \frac{1}{m_{2j}}, b^* \right); b^* \in B_{0, n-1} \right\} \\ \Delta_{n, \text{pair}}^2 &= \bigcup_{p=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{\lfloor p/2 \rfloor} \left\{ \left(n, \xi, \frac{1}{m_{2j}}, b^* \right); \xi \in \Delta_p, \text{ poids}(\xi) = \frac{1}{m_{2j}}, \right. \\ &\quad \left. \hat{\text{age}}(\xi) < n_{2j}, b^* \in B_{p, n-1} \right\} \\ \Delta_{n, \text{impair}}^1 &= \bigcup_{j=1}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} \left\{ \left(n, \frac{1}{m_{2j-1}}, e_\eta^* \right); \eta \in \Gamma_{n-1}, \text{ poids}(\eta) = \frac{1}{m_{4i-2}}, \right. \\ &\quad \left. \text{où } i \geq 1 \text{ est tel que } \frac{1}{m_{4i-2}} < \frac{1}{n_{2j-1}^2} \right\} \\ \Delta_{n, \text{impair}}^2 &= \bigcup_{p=1}^{n-2} \bigcup_{j=1}^{\lfloor (p+1)/2 \rfloor} \left\{ \left(n, \xi, \frac{1}{m_{2j-1}}, e_\eta^* \right); \xi \in \Delta_p, \text{ poids}(\xi) = \frac{1}{m_{2j-1}} \right. \\ &\quad \left. \hat{\text{age}}(\xi) < n_{2j-1}, \eta \in \Gamma_{n-1} \setminus \Gamma_p, \text{ poids}(\eta) = \frac{1}{m_{4\sigma(\xi)}} \right\} \end{aligned}$$

et où $\sigma : \Gamma \rightarrow \mathbb{N}$ est une fonction injective telle que pour tout $\xi \in \Gamma$, $\sigma(\xi)$ est strictement plus grand que le rang de ξ .

Les éléments de $\Delta_{n, \text{pair}}^1$ sont les éléments de rang n , de poids pair et de type 1, ceux de $\Delta_{n, \text{pair}}^2$ les éléments de rang n , de poids pair et de type 2, etc.

9.2. Propriétés d'analyse

La définition des ensembles $\Delta_{n, \text{pair}}^1$ et $\Delta_{n, \text{pair}}^2$ est entièrement naturelle au vu de ce que nous avons déjà expliqué. Celle des ensembles $\Delta_{n, \text{impair}}^1$ et $\Delta_{n, \text{impair}}^2$ l'est moins (notamment ce qui concerne les restrictions sur le poids de η), mais il est clair que, d'une part, tout élément de poids impair admet une analyse, et que, d'autre part, les éléments de poids impair vérifient une forme faible de la partie (2) de la propriété d'analyse, où ne sont impliqués que les vecteurs e_η^* vérifiant les conditions données dans la définition. Nous résumons ceci dans la proposition suivante :

PROPOSITION 9.1. — *Les éléments de Γ vérifient les propriétés suivantes :*

- (1) *Pour tout $j \geq 1$ et tout $\gamma \in \Gamma$ de rang n et de poids $1/m_j$, $j \leq n$, il existe $1 \leq a \leq n_j$, $0 = p_0 < \dots < p_a = n$ avec $p_i < p_{i+1} - 1$ pour tout $0 \leq i < a$, $\xi_i \in \Gamma$ de poids $1/m_j$, de rang p_i , $1 \leq i \leq a$, avec $\xi_a = \gamma$, et $b_i^* \in B_{p_{i-1}, p_i-1}$, $1 \leq i \leq a$, tels que*

$$e_\gamma^* = \sum_{i=1}^a d_{\xi_i}^* + \frac{1}{m_j} \sum_{i=1}^a P_{(p_{i-1}, p_i)}^* b_i^*.$$

- (2) *Pour tous $j \geq 1$, $1 \leq a \leq n_{2j}$, $0 = p_0 < \dots < p_a$ avec $p_i < p_{i+1} - 1$ pour tout $0 \leq i < a$ et $p_1 \geq 2j$, et pour tous vecteurs $b_i^* \in B_{p_{i-1}, p_i-1}$, il existe des éléments*

$\xi_i \in \Gamma$ de rangs respectifs p_i , $1 \leq i \leq a$, et de poids $1/m_{2j}$, tels que l'analyse de $\gamma = \xi_a$ est égale à $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq a}$. On a ainsi

$$e_{\xi_a}^* = \sum_{i=1}^a d_{\xi_i}^* + \frac{1}{m_{2j}} \sum_{i=1}^a P_{(p_{i-1}, p_i)}^* b_i^*.$$

(3) Soient $j \geq 1$, $1 \leq a \leq n_{2j-1}$, $0 = p_0 < \dots < p_a$ avec $p_i < p_{i+1} - 1$ pour tout $0 \leq i < a$ et $p_1 \geq 2j - 1$. Soient η_i des éléments de Γ tels que $\eta_i \in \Gamma_{p_{i-1}} \setminus \Gamma_{p_{i-1}}$, avec

* poids(η_1) = $\frac{1}{m_{4i-2}} < \frac{1}{n_{2j-1}^2}$; alors $\xi_1 = \left(p_1, \frac{1}{m_{2j-1}}, e_{\eta_1}^*\right)$ appartient à $\Delta_{p_1, \text{impair}}^1$;

* poids(η_2) = $\frac{1}{m_{4\sigma(\xi_1)}}$; alors $\xi_2 = \left(p_2, \xi_1, \frac{1}{m_{2j-1}}, e_{\eta_2}^*\right)$ appartient à $\Delta_{p_2, \text{impair}}^2$;

* pour tout $2 < i \leq a$, poids(η_i) = $\frac{1}{m_{4\sigma(\xi_{i-1})}}$; alors $\xi_i = \left(p_i, \xi_{i-1}, \frac{1}{m_{2j-1}}, e_{\eta_i}^*\right)$ appartient à $\Delta_{p_i, \text{impair}}^2$.

Alors l'élément $\gamma = \xi_a = \left(p_a, \xi_{a-1}, \frac{1}{m_{2j-1}}, e_{\eta_a}^*\right)$ de Γ a pour analyse $(\xi_i, p_i, e_{\eta_i}^*)_{1 \leq i \leq a}$.

On a ainsi

$$e_{\gamma}^* = \sum_{i=1}^a d_{\xi_i}^* + \frac{1}{m_{2j-1}} \sum_{i=1}^a P_{(p_{i-1}, p_i)}^* e_{\eta_i}^*.$$

9.3. Une propriété des éléments de poids impair

Les conditions portant sur les poids des éléments η lorsque γ est de poids impair sont introduites de manière à ce que $(z_j, l_j)_{j \geq 1}$ vérifie la propriété (*) pour les éléments de poids impair. L'utilité de ces conditions curieuses apparaît clairement dans la preuve du lemme suivant, qui énonce une propriété fondamentale des éléments de poids impair.

LEMME 9.2. — Soient γ et γ' deux éléments de poids $1/m_{2j-1}$, d'âges respectifs $1 \leq a' \leq a \leq n_{2j-1}$ et d'analyses respectives $(\xi_i, p_i, e_{\eta_i}^*)_{1 \leq i \leq a}$ et $(\xi'_i, p'_i, e_{\eta'_i}^*)_{1 \leq i \leq a'}$. Il existe un entier $1 \leq h \leq a'$ tel que $\xi_i = \xi'_i$ pour tout $1 \leq i < h$, tandis que pour tous $h < i \leq a'$ et $1 \leq j \leq a$, poids(η_j) \neq poids(η'_j).

Démonstration. — Remarquons que cet énoncé ne donne aucune information concernant le cas où $i = h$. Si η_j et η'_j sont de poids différents pour tous $2 \leq i \leq a'$ et $1 \leq j \leq a$, il suffit de prendre $h = 1$. Sinon, soit $2 \leq h \leq a$ le plus grand entier pour lequel il existe $1 \leq j \leq a$ tel que η_j et η'_j ont même poids. Comme $h \geq 2$, ξ'_h est un élément de type 2, et donc η'_h est de poids $1/m_{4\sigma(\xi'_{h-1})}$. Donc $j \geq 2$. En effet, si on avait $j = 1$, ξ_j serait un élément de type 1 et le poids de η_j serait de la forme $1/m_{4i-2}$ pour un certain $i \geq 1$. Mais $4\sigma(\xi'_{h-1}) \equiv 0 [4]$ tandis que $4i - 2 \equiv 2 [4]$, et il est impossible d'avoir $1/m_{4\sigma(\xi'_{h-1})} = 1/m_{4i-2}$. Donc $j \geq 2$ et η_j est de poids $1/m_{4\sigma(\xi_{j-1})}$. On a donc $4\sigma(\xi'_{h-1}) = 4\sigma(\xi_{j-1})$ et comme σ est injective, $\xi'_{h-1} = \xi_{j-1}$. Comme ξ'_{h-1} est d'âge $h - 1$ et ξ_{j-1} d'âge $j - 1$, $j = h$ et $\xi'_{h-1} = \xi_{h-1}$. Donc $\xi'_i = \xi_i$ pour tous $1 \leq i < h$, ce qui prouve le lemme. \square

Nous pouvons maintenant passer à la preuve du théorème 1.1.

10. PREUVE DU THÉORÈME 1.1

10.1. Couples admissibles

Pour pouvoir formuler précisément les conditions qui impliqueront que la suite $(z_j, l_j)_{j \geq 1}$ est une super suite de blocs (et pas seulement une suite de blocs), nous aurons besoin de la notion de couple admissible : si $x \in X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, $\eta \in \Gamma$ et $C > 0$, nous dirons que (x, η) est un *couple C -admissible* si les conditions suivantes sont vérifiées :

- (a) $\|x\| \leq C$;
- (b) $x(\eta) = 0$;
- (c) η est de poids $1/m_j$ pour un certain entier $j \geq 1$, et on a
 - (c₁) pour tout $\xi \in \Gamma$, $|\langle x, d_\xi^* \rangle| \leq C/m_j$;
 - (c₂) pour tout $\eta' \in \Gamma$ de poids $1/m_i$ avec $i \neq j$, on a $|x(\eta')| \leq C/m_{i \wedge j}$.

Le lemme 7.6 implique alors que pour tout $s \geq 0$ et tout $\eta' \in \Gamma$ de poids $1/m_i$ avec $i \neq j$, $|P_{(s, +\infty)}x(\eta')| \leq 6C/m_{i \wedge j}$.

Reprenons la preuve ébauchée dans la section 8.1. Soit T un opérateur borné sur $X(\Gamma, (d_\gamma)_{\gamma \in \Gamma})$, et soit $(x_j)_{j \geq 1}$ une super suite de blocs stricte de constante C appartenant à la classe \mathcal{C} . On suppose qu'il existe une suite d'entiers strictement croissante $(p_j)_{j \geq 0}$ telle que $p_0 = 0$, $p_{j-1} < p_j - 1$, $\text{im}(x_j) \subseteq (p_{j-1}, p_j)$ et $\text{im}(Tx_j) \subseteq (p_{j-1}, p_j)$ pour tout $j \geq 1$, et que $d(Tx_j, \mathbb{R}x_j) > \delta$ pour tout $j \geq 1$. Soient $b_j^* \in B_{p_{j-1}, p_j}$ les vecteurs construits grâce au lemme 4.6, tels que $\langle x_j, b_j^* \rangle = 0$ et $\langle Tx_j, b_j^* \rangle > \delta/2$ pour tout $j \geq 1$. Comme annoncé dans la section 8.2, nous aurons besoin du résultat suivant qui concerne les moyennes pondérées d'ordre pair de la suite $(x_j)_{j \geq 1}$.

LEMME 10.1. — *Pour $j \geq 1$, soit*

$$z_j = m_{2j} \left(\frac{1}{n_{2j}} \sum_{k=1}^{n_{2j}} x_k \right).$$

Il existe alors un élément η_j de Γ , de poids $1/m_{2j}$, de rang $p_{n_{2j}}$, et dont l'analyse est de la forme $(\xi_i, p_i, b_i^)_{1 \leq i \leq n_{2j}}$, tel que le couple (z_j, η_j) est $28C$ -admissible et tel que $Tz_j(\eta_j) > \delta/2$.*

Démonstration. — Un argument semblable à celui donné dans la section 8.1 montre qu'il existe $\eta_j \in \Gamma$ de poids $1/m_{2j}$ et d'analyse $(\xi_i, p_i, b_i^*)_{1 \leq i \leq n_{2j}}$ tel que $z_j(\eta_j) = 0$ et $Tz_j(\eta_j) > \delta/2$. Il reste à montrer que (z_j, η_j) est $28C$ -admissible. Par le théorème 7.1, $\|z_j\| \leq 10C$ et la propriété (a) est vérifiée. La propriété (c₁) est immédiate : en effet, si $\xi \in \Gamma$, il existe au plus un entier $1 \leq k \leq n_{2j}$ tel que $\langle x_k, d_\xi^* \rangle$ soit non nul, et donc

$$|\langle z_j, d_\xi^* \rangle| \leq \frac{m_{2j}}{n_{2j}} |\langle x_k, d_\xi^* \rangle| \leq \frac{m_{2j}}{n_{2j}} 3C \leq \frac{C}{m_{2j}}$$

si $n_j \gg m_j$ pour tout $j \geq 1$. Il reste à vérifier la propriété (c_2) : soit donc $\eta' \in \Gamma$ de poids $1/m_i$ avec $i \neq 2j$. On applique les estimées ponctuelles du théorème 7.1 :

$$|z_j(\eta')| \leq \frac{m_{2j}}{n_{2j}} \left| \sum_{k=1}^{n_{2j}} x_k(\eta') \right| \leq \begin{cases} \frac{28C}{m_i} & \text{si } i < 2j \\ \frac{10C}{m_{2j}} & \text{si } i > 2j \end{cases}$$

et (z_j, η_j) est donc bien un couple $28C$ -admissible. \square

10.2. Construction d'une suite de moyennes pondérées d'ordre pair

Soit $j_0 \geq 1$. On va maintenant construire une suite de moyennes z_{j,l_j} , $1 \leq j \leq n_{2j_0-1}$ suivant le principe présenté dans la section 8.1.

Soit d'abord $j_1 \gg j_0$ tel que $m_{4j_1-2} > n_{2j_0-1}^2$. Prenons $l_1 = 0$ et

$$z_{1,l_1} = z_{4j_1-2} = m_{4j_1-2} \left(\frac{1}{n_{4j_1-2}} \sum_{k=1}^{n_{4j_1-2}} x_k \right).$$

On a $\text{im}(z_{1,l_1}) \subseteq (0, p_{n_{4j_1-2}})$. Soit $\eta_1 \in \Gamma$ donné par le lemme 10.1 : η_1 est de poids $1/m_{4j_1-2}$, de rang $p_{n_{4j_1-2}}$, le couple (z_{1,l_1}, η_1) est $28C$ -admissible et $Tz_{1,l_1}(\eta_1) > \delta/2$. Posons $r_1 = p_{n_{4j_1-2}} + 1$. Le rang de η_1 est égal à $r_1 - 1$, $\text{im}(z_{1,l_1}) \subseteq (0, r_1)$ et l'élément $\xi_1 = (r_1, 1/m_{2j_0-1}, e_{\eta_1}^*)$ appartient à $\Delta_{r_1, \text{impair}}^1$. Posons ensuite $j_2 = \sigma(\xi_1)$ et prenons l_2 suffisamment grand pour que $p_{l_2} > r_1$. On considère le vecteur

$$z_{2,l_2} = m_{4j_2} \left(\frac{1}{n_{4j_2}} \sum_{k=1}^{n_{4j_2}} x_{k+l_2} \right).$$

On a alors $\text{im}(z_{2,l_2}) \subseteq (p_{l_2}, p_{n_{4j_2}+l_2}) \subseteq (r_1, p_{n_{4j_2}+l_2})$. Comme la suite $(x_{k+l_2})_{k \geq 1}$ est encore une super suite de blocs de même constante C que $(x_k)_{k \geq 1}$, on obtient grâce au lemme 10.1 un élément η_2 de poids $1/m_{4j_2}$, de rang $p_{n_{4j_2}+l_2}$, tel que le couple (z_{2,l_2}, η_2) soit $28C$ -admissible et tel que $Tz_{2,l_2}(\eta_2) > \delta/2$. On pose $r_2 = p_{n_{4j_2}+l_2} + 1$. Le rang de η_2 est égal à $r_2 - 1$, $\text{im}(z_{2,l_2}) \subseteq (r_1, r_2)$ et $\xi_2 = (r_2, \xi_1, 1/m_{2j_0-1}, e_{\eta_2}^*)$ appartient à $\Delta_{r_1, \text{impair}}^2$. On continue la construction en raisonnant par récurrence sur $2 \leq i \leq n_{2j_0-1}$. Si on suppose que ξ_{i-1} est déjà construit, on pose $j_i = \sigma(\xi_{i-1})$, et on choisit l_i suffisamment grand pour que le vecteur

$$z_{i,l_i} = m_{4j_i} \left(\frac{1}{n_{4j_i}} \sum_{k=1}^{n_{4j_i}} x_{k+l_i} \right)$$

soit tel que $\text{im}(z_{i,l_i}) \subseteq (r_{i-1}, r_i)$, où $r_i = p_{n_{4j_i}+l_i} + 1$. Grâce au lemme 10.1, on obtient alors un élément η_i de poids $1/m_{2j_0-1}$, de rang $r_i - 1$, tel que (z_{i,l_i}, η_i) est $28C$ -admissible et $Tz_{i,l_i}(\eta_i) > \delta/2$. L'élément $\xi_i = (r_i, \xi_{i-1}, 1/m_{2j_0-1}, e_{\eta_i}^*)$ appartient à $\Delta_{r_i, \text{impair}}^2$. La suite (finie) $(z_{i,l_i})_{1 \leq i \leq n_{2j_0-1}}$ ainsi construite est clairement une suite de blocs bornée. Comme annoncé dans la section 8.2, nous allons montrer que $(z_{i,l_i})_{1 \leq i \leq n_{2j_0-1}}$ est en fait une super suite de blocs.

LEMME 10.2. — La suite $(z_{i,l_i})_{1 \leq i \leq n_{2j_0-1}}$ est une super suite de blocs de constante $28C$.

Démonstration. — Comme (z_{i,l_i}, η_i) est pour tout $1 \leq i \leq n_{2j_0-1}$ un couple $28C$ -admissible, $\|z_{i,l_i}\| \leq 28C$ pour tout $1 \leq i \leq n_{2j_0-1}$. D'autre part, $|z_{1,l_1}(\eta')| \leq 28C/m_j$ pour tout η' de poids $1/m_j$ avec $1 \leq j < 4j_1 - 2$, et pour tout $2 \leq i \leq n_{2j_0-1}$, $|z_{i,l_i}(\eta')| \leq 28C/m_j$ pour tout η' de poids $1/m_j$ avec $j < 4j_i$. Il suffit donc de vérifier que $\max \text{im}(z_{i-1,l_{i-1}}) < 4j_i$ pour tout $2 \leq i \leq n_{2j_0-1}$. Or $\max \text{im}(z_{1,l_1}) < r_1$ et $\max \text{im}(z_{i-1,l_{i-1}}) < r_{i-1}$ pour tout $3 \leq i \leq n_{2j_0-1}$. Dans les deux cas, $\max \text{im}(z_{i-1,l_{i-1}}) < \text{rang}(\xi_{i-1})$ et il suffit donc de vérifier que pour tout $2 \leq i \leq n_{2j_0-1}$, $\text{rang}(\xi_{i-1}) \leq 4j_i = 4\sigma(\xi_{i-1})$. Ceci est une conséquence de l'hypothèse faite sur σ que $\sigma(\xi) > \text{rang}(\xi)$ pour tout $\xi \in \Gamma$. \square

10.3. Preuve de la propriété (*) pour les moyennes d'ordre impair

La dernière difficulté à surmonter avant de pouvoir conclure la preuve du théorème 1.1 est de montrer que la suite $(z_{i,l_i})_{1 \leq i \leq n_{2j_0-1}}$ vérifie la propriété (*).

LEMME 10.3. — Pour tout $\xi \in \Gamma$ de poids $1/m_{2j_0-1}$, on a $\sum_{k=1}^{n_{2j_0-1}} |z_{k,l_k}(\xi)| \leq 364C$.

Démonstration. — Nous avons construit dans la preuve du lemme 10.1 des éléments ξ_i et η_i , $1 \leq i \leq n_{2j_0-1}$, où $\xi_1 = (r_1, 1/m_{2j_0-1}, e_{\eta_1}^*)$ et $\xi_i = (r_i, \xi_{i-1}, 1/m_{2j_0-1}, e_{\eta_i}^*)$ pour $2 \leq i \leq n_{2j_0-1}$. L'analyse de $\xi_{n_{2j_0-1}}$ est donc égale à $(r_i, \xi_i, e_{\eta_i}^*)_{1 \leq i \leq n_{2j_0-1}}$ et $\xi_{n_{2j_0-1}}$ est d'âge n_{2j_0-1} . Le poids de η_1 est égal à $1/m_{4j_1-2}$, tandis que celui de η_i pour $2 \leq i \leq n_{2j_0-1}$ est égal à $1/m_{4j_i}$. Soit $\xi' \in \Gamma$ de poids $1/m_{2j_0-1}$. Son analyse est de la forme $(r'_i, \xi'_i, e_{\eta'_i}^*)_{1 \leq i \leq a'}$ où $1 \leq a' \leq n_{2j_0-1}$, η'_1 est de poids $1/m_{4j'_1-2}$ avec $m_{4j'_1-2} > n_{2j_0-1}^2$, et η'_i pour $2 \leq i \leq a'$ est de poids $1/m_{4j'_i}$. On applique alors la propriété fondamentale des éléments de poids impair donnée par le lemme 9.2, et on obtient un entier $1 \leq h \leq a'$ tel que $\xi'_i = \xi_i$ pour tout $1 \leq i < h$, et η'_i et η_j sont de poids différents pour tous $h < i \leq a'$ et $1 \leq j \leq n_{2j_0-1}$. On a en particulier $(r_i, \xi_i, e_{\eta_i}^*)_{1 \leq i < h} = (r'_i, \xi'_i, e_{\eta'_i}^*)_{1 \leq i < h}$. Pour tout $1 \leq k \leq n_{2j_0-1}$

$$z_{k,l_k}(\xi') = \sum_{i=1}^{a'} \langle z_{k,l_k}, d_{\xi'_i}^* \rangle + \frac{1}{m_{2j_0-1}} \sum_{i=1}^{a'} \langle z_{k,l_k}, P_{(r'_{i-1}, r'_i)}^* e_{\eta'_i}^* \rangle.$$

Supposons que $1 \leq k < h$. Alors $\text{im}(z_{k,l_k}) \subseteq (r_{k-1}, r_k)$, $(r'_{i-1}, r'_i) = (r_{i-1}, r_i)$ pour tout $1 \leq i \leq k$, et $\eta'_k = \eta_k$. On en déduit que

$$z_{k,l_k}(\xi') = \frac{1}{m_{2j_0-1}} z_{k,l_k}(\eta_k) = 0 \quad \text{pour tout } 1 \leq k < h.$$

On a alors

$$\sum_{k=1}^{n_{2j_0-1}} |z_{k,l_k}(\xi')| \leq |z_{h,l_h}(\xi')| + \sum_{k=h+1}^{n_{2j_0-1}} |z_{k,l_k}(\xi')|.$$

On majore le premier terme par $28C$, et on utilise l'analyse de ξ' pour majorer le deuxième terme par

$$\begin{aligned} & \sum_{k=h+1}^{n_{2j_0-1}} \sum_{i=1}^{a'} \left(|\langle z_k, l_k, d_{\xi'_i}^* \rangle| + \frac{1}{m_{2j_0-1}} |\langle P_{(r'_{i-1}, r'_i)} z_k, l_k, e_{\eta'_i}^* \rangle| \right) \\ & \leq n_{2j_0-1}^2 \max_{\substack{h < k \leq n_{2j_0-1} \\ 1 \leq i \leq a'}} \left(|\langle z_k, l_k, d_{\xi'_i}^* \rangle| + \frac{1}{m_{2j_0-1}} |\langle P_{(r'_{i-1}, r'_i)} z_k, l_k, e_{\eta'_i}^* \rangle| \right). \end{aligned}$$

Rappelons-nous maintenant que le couple (z_k, l_k, η_k) est $28C$ -admissible pour tout $1 \leq k \leq n_{2j_0-1}$. Pour majorer la quantité $|\langle z_k, l_k, d_{\xi'_i}^* \rangle|$, on utilise la propriété (c_1) . Comme $k \geq 2$, η_k est de poids $1/m_{4j_k}$, et donc

$$|\langle z_k, l_k, d_{\xi'_i}^* \rangle| \leq \frac{28C}{m_{4j_k}} \leq \frac{28C}{m_{4j_1-2}} \leq \frac{28C}{n_{2j_0-1}^2}.$$

Pour estimer le deuxième terme, on utilise le fait que le poids de η'_i est différent de celui de η_k pour tout $1 \leq i \leq a$, et la propriété (c_2) : on obtient

$$|\langle P_{(r'_{i-1}, r'_i)} z_k, l_k, e_{\eta'_1}^* \rangle| \leq \frac{336C}{m_{4j_k \wedge (4j'_1-2)}}$$

et

$$|\langle P_{(r'_{i-1}, r'_i)} z_k, l_k, e_{\eta'_i}^* \rangle| \leq \frac{336C}{m_{4j_k \wedge 4j'_i}} \quad \text{si } 2 \leq i \leq a'.$$

Dans les deux cas

$$|\langle P_{(r'_{i-1}, r'_i)} z_k, l_k, e_{\eta'_i}^* \rangle| \leq \frac{336C}{m_{(4j_1-2) \wedge (4j'_1-2)}} \leq \frac{336C}{n_{2j_0-1}^2}.$$

On obtient donc que $\sum_{k=1}^{n_{2j_0-1}} |z_k, l_k(\xi')| \leq 364C$, ceci pour tout $\xi' \in \Gamma$ de poids $1/m_{2j_0-1}$, et cela achève la preuve du lemme 10.3. \square

10.4. Fin de la preuve du théorème 1.1

Maintenant que l'estimée $(*)$ est prouvée pour les éléments de poids impair $1/m_{2j_0-1}$, il ne nous reste plus qu'à conclure comme dans la section 8.2. On considère la moyenne d'ordre impair

$$w_{j_0} = \frac{1}{n_{2j_0-1}} \sum_{k=1}^{n_{2j_0-1}} z_k, l_k.$$

La suite $(z_k, l_k)_{1 \leq k \leq n_{2j_0-1}}$ étant une super suite de blocs de constante $364C$ vérifiant la propriété $(*)$ pour les éléments de poids $1/m_{2j_0-1}$, le théorème 7.2 implique que $\|w_{j_0}\| \leq 3640C/m_{2j_0-1}^2$.

Minorons maintenant $\|Tw_{j_0}\|$. Pour tout $1 \leq k \leq n_{2j_0-1}$, $Tz_{k,l_k}(\eta_k) > \delta/2$. Si on considère l'élément $\xi_{n_{2j_0-1}}$ défini dans la preuve du lemme 10.1 et dont l'analyse est $(r_i, \xi_i, 1/m_{2j_0-1}, e_{\eta_i}^*)_{1 \leq i \leq n_{2j_0-1}}$, on a

$$Tw_{j_0}(\xi_{n_{2j_0-1}}) = \frac{1}{m_{2j_0-1}} \left(\frac{1}{n_{2j_0-1}} \sum_{k=1}^{n_{2j_0-1}} Tz_{k,l_k}(\eta_k) \right) > \frac{\delta}{2m_{2j_0-1}}.$$

On en déduit que

$$\|Tw_{j_0}\| > \frac{\delta}{2m_{2j_0-1}} \quad \text{et donc que} \quad \frac{3640C \|T\|}{m_{2j_0-1}^2} > \frac{\delta}{2m_{2j_0-1}}$$

ce qui est contradictoire si j_0 est choisi suffisamment grand au début de la preuve. Le théorème 1.1 est donc prouvé.

RÉFÉRENCES

- [1] G. ANDROULAKIS, T. SCHLUMPRECHT, Strictly singular, non-compact operators exist on the space of Gowers and Maurey, *J. London Math. Soc.* **64** (2001), 655 – 674.
- [2] S. A. ARGYROS, D. FREEMAN, R. HAYDON, E. ODELL, TH. RAIKOFTSALIS, TH. SCHLUMPRECHT, D. ZISIMOPOULOU, Embedding uniformly convex spaces into spaces with very few operators, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 825 – 849.
- [3] S. A. ARGYROS, R. G. HAYDON, A hereditarily indecomposable \mathcal{L}_∞ -space that solves the scalar-plus-compact problem, *Acta Math.* **206** (2011), 1 – 54.
- [4] S. A. ARGYROS, P. MOTAKIS, A reflexive hereditarily indecomposable space with the hereditary invariant subspace property, *Proc. Lond. Math. Soc.* **108** (2014), 1381 – 1416.
- [5] N. ARONSZAJN, K. T. SMITH, Invariant subspaces of completely continuous operators, *Ann. of Math.* **60** (1954), 345 – 350.
- [6] J. BOURGAIN, F. DELBAEN, A class of special \mathcal{L}_∞ spaces, *Acta Math.* **145** (1980), 155 – 176.
- [7] I. CHALENDAR, J. R. PARTINGTON, Modern approaches to the invariant-subspace problem, *Cambridge Tracts in Mathematics* **188**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.
- [8] P. ENFLO, On the invariant subspace problem for Banach spaces, *Acta Math.* **158** (1987), pp 213 – 313.
- [9] D. FREEMAN, E. ODELL, TH. SCHLUMPRECHT, The universality of ℓ_1 as a dual space, *Math. Ann.* **351** (2011), 149 – 186.
- [10] W. T. GOWERS, A new dichotomy for Banach spaces, *Geom. Funct. Anal.* **6** (1996), 1083 – 1093.

- [11] W. T. GOWERS, An infinite Ramsey theorem and some Banach-space dichotomies, *Ann. of Math.* **156** (2002), 797 – 833.
- [12] W. T. GOWERS, B. MAUREY, The unconditional basic sequence problem, *J. Amer. Math. Soc.* **6** (1993), 851 – 874.
- [13] S. GRIVAUX, M. ROGINSKAYA, On Read’s type operators on Hilbert spaces, *Int. Math. Res. Not.*, Art. ID rnn 083, (2008) 42 p.
- [14] S. GRIVAUX, M. ROGINSKAYA, A general approach to Read’s type constructions of operators without non-trivial invariant closed subspaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* **109** (2014), 596 – 652.
- [15] A. GROTHENDIECK, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, *Mem. Amer. Math. Soc.* **16** (1955), 140 p.
- [16] A. GROTHENDIECK, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, *Bol. Soc. Mat. São Paulo* **8** (1953) 1 – 79.
- [17] K. JOHN, On the compact nonnuclear operator problem, *Math. Ann.* **287** (1990), 509 – 514.
- [18] B. E. JOHNSON, Cohomology in Banach algebras, *Mem. Amer. Math. Soc.* **127** (1972).
- [19] J. LINDENSTRAUSS, Some open problems in Banach space theory, *Séminaire Choquet, Initiation à l’analyse* **15** (1975-1976), 1 – 9.
- [20] J. LINDENSTRAUSS, L. TZAFRIRI, Classical Banach spaces I, *Springer-Verlag, Ergebn. Math. Grenzg.* **92** (1977).
- [21] V. I. LOMONOSOV, Invariant subspaces of the family of operators that commute with a completely continuous operator, *Funkcional. Anal. i Priložen.* **7** (1973), 55 – 56.
- [22] B. MAUREY, Banach spaces with few operators, *Handbook of the geometry of Banach spaces*, Vol. 2, North-Holland (2003), 1247 – 1297.
- [23] G. PISIER, Counterexamples to a conjecture of Grothendieck, *Acta Math.* **151** (1983), 181 – 208.
- [24] G. PISIER, Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces, *CBMS Regional Conference Series in Mathematics* **60** (1986).
- [25] H. RADJAVI, P. ROSENTHAL, Invariant subspaces, Dover Publications, second edition (2003).
- [26] C. J. READ, A solution to the invariant subspace problem, *Bull. London Math. Soc.* **16** (1984), 337 – 401.
- [27] C. J. READ, A solution to the invariant subspace problem on the space l_1 , *Bull. London Math. Soc.* **17** (1985), 305 – 317.
- [28] C. J. READ, The invariant subspace problem for a class of Banach spaces. II. Hypercyclic operators, *Israel J. Math.* **63** (1988), 1 – 40.
- [29] C. J. READ, The invariant subspace problem on some Banach spaces with separable dual, *Proc. London Math. Soc.* **58** (1989), 583 – 607.

- [30] TH. SCHLUMPRECHT, An arbitrarily distortable Banach space, *Israel J. Math.* **76** (1991), 81 – 95.
- [31] G. SIROTKIN, A version of the Lomonosov invariant subspace theorem for real Banach spaces, *Indiana Univ. Math. J.* **54** (2005), 257 – 262.
- [32] M. ZIPPIN, On some subspaces of Banach spaces whose duals are L_1 spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **23** (1969), 378 – 385.

Sophie GRIVAUX & Maria ROGINSKAYA

CNRS, Laboratoire Paul Painlevé,
UMR 8524,
Université Lille 1, Cité Scientifique,
F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail : `grivaux@math.univ-lille1.fr`

Department of Mathematical Sciences,
Chalmers University of Technology,
SE-41296 Göteborg, Sweden,

et

Department of Mathematical Sciences,
Göteborg University,
SE-41296 Göteborg, Sweden
E-mail : `maria@chalmers.se`