Reduction de Poisson homotopique des théories de jauge

Projet de livre "Towards the mathematics of quantum field theory" (Cours avancé IMPA/UPMC/UL, 2010-2012)

Frédéric Paugam

UPMC

Rencontre du GdR "Topologie algébrique et applications"

24 Octobre 2012

Quatre parties

1. Motivation: théorie de Yang-Mills.
2. Analyse fonctorielle.
3. $\mathcal{D}$-géométrie et calcul variationnel.
4. Méthode BV pour la réduction de Poisson homotopique.

MOTIVATION: THEORIE DE YANG-MILLS.

(M, g) variété métrique, G groupe semisimple (forme de Killing $\mathfrak{g}$).

(M, g) variété métrique, G groupe semisimple (forme de Killing $\mathfrak{g}$).

Espace des configurations: espace de modules $\mathrm{Hom}(M, BG_{conn})$ des couples (P, A) avec:
- P: G-fibré principal,
- A: G-connection sur P.

(M, g) variété métrique, G groupe semisimple (forme de Killing $\mathfrak{g}$).

Espace des configurations: espace de modules $\mathrm{Hom}(M, BG_{conn})$ des couples (P, A) avec:
- P: G-fibré principal,
- A: G-connection sur P.

But de la mécanique: minimiser l'action $S(P, A) = \int_M F_A \wedge *F_A d\mu_g$.

Problème: l'espace critique $\mathrm{Crit} = \mathrm{Hom}(M, BG_{flat})$ des fibrés à connections plates manque d'épaisseur (bonne théorie des déformations).

(M, g) variété métrique, G groupe semisimple (forme de Killing $\mathfrak{g}$).

Espace des configurations: espace de modules $\mathrm{Hom}(M, BG_{conn})$ des couples (P, A) avec:
- P: G-fibré principal,
- A: G-connection sur P.

But de la mécanique: minimiser l'action $S(P, A) = \int_M F_A \wedge *F_A d\mu_g$.

Problème: l'espace critique $\mathrm{Crit} = \mathrm{Hom}(M, BG_{flat})$ des fibrés à connections plates manque d'épaisseur (bonne théorie des déformations).

Solution: le remplacer par l'espace dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Crit} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(M, BG_{flat})$.

Intérêt: forme symplectique décalée $\Rightarrow$ quantification perturbative par intégrale fonctionnelle et/ou déformation quantification en espace de factorisation sur M.

Batalin-Vilkovisky pour Yang-Mills

(M, g) variété métrique, G groupe semisimple (forme de Killing $\mathfrak{g}$).

Espace des configurations: espace de modules $\mathrm{Hom}(M, BG_{conn})$ des couples (P, A) avec:
- P: G-fibré principal,
- A: G-connection sur P.

But de la mécanique: minimiser l'action $S(P, A) = \int_M F_A \wedge *F_A d\mu_g$.

Problème: l'espace critique $\mathrm{Crit} = \mathrm{Hom}(M, BG_{flat})$ des fibrés à connections plates manque d'épaisseur (bonne théorie des déformations).

Solution: le remplacer par l'espace dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Crit} = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(M, BG_{flat})$.

Intérêt: forme symplectique décalée $\Rightarrow$ quantification perturbative par intégrale fonctionnelle et/ou déformation quantification en espace de factorisation sur M.

Completion formelle

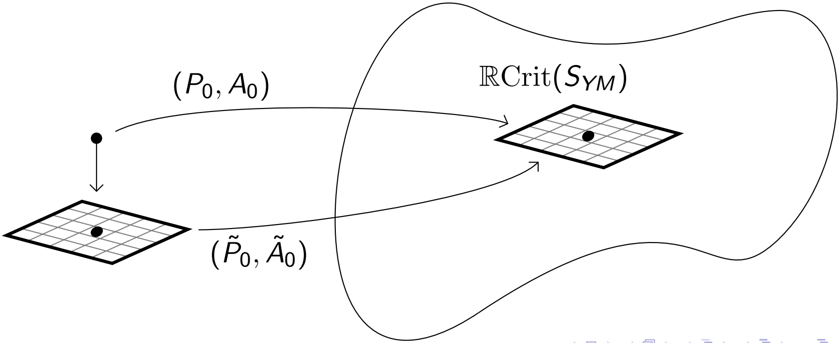
$$\widehat{\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})}_{(P_0,A_0)}$$

de l'espace critique dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM}) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(M, BG_{flat})$ en (P_0, A_0) plat: restriction aux épaississements homotopiques du point (P_0, A_0).

Completion formelle

$$\widehat{\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})}_{(P_0,A_0)}$$

de l'espace critique dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM}) = \mathbb{R}\mathrm{Hom}(M, BG_{flat})$ en (P_0, A_0) plat: restriction aux épaississements homotopiques du point (P_0, A_0).



Théorème principal de la théorie des déformations:
Espace dérivé formel $\Leftrightarrow$ algèbre de Lie (homotopique) $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{O}\left(\widehat{\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})}_{(P_0,A_0)}\right) = \mathrm{CE}^*(\mathcal{L})$$

Théorème principal de la théorie des déformations:
Espace dérivé formel $\Leftrightarrow$ algèbre de Lie (homotopique) $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{O}\left(\widehat{\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})}_{(P_0,A_0)}\right) = \mathrm{CE}^*(\mathcal{L})$$

En fait: cogèbre des distributions, mais $\mathcal{D}$-geometrie $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ de rang fini.

Théorème principal de la théorie des déformations:
Espace dérivé formel $\Leftrightarrow$ algèbre de Lie (homotopique) $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{O}\left(\widehat{\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})}_{(P_0,A_0)}\right) = \mathrm{CE}^*(\mathcal{L})$$

En fait: cogèbre des distributions, mais $\mathcal{D}$-geometrie $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ de rang fini.

Crochet de Poisson local (differentiel) sur l'espace critique dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})$, donc structure de Poisson sur $\mathrm{CE}^*(\mathcal{L})$.

Théorème principal de la théorie des déformations:
Espace dérivé formel $\Leftrightarrow$ algèbre de Lie (homotopique) $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{O}\left(\widehat{\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})}_{(P_0,A_0)}\right) = \mathrm{CE}^*(\mathcal{L})$$

En fait: cogèbre des distributions, mais $\mathcal{D}$-geometrie $\Rightarrow$ $\mathcal{L}$ de rang fini.

Crochet de Poisson local (differentiel) sur l'espace critique dérivé $\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S_{YM})$, donc structure de Poisson sur $\mathrm{CE}^*(\mathcal{L})$.

Inconvénient de cette méthode:
On doit connaître à l'avance les symmétries $\Rightarrow$ les physiciens ont pris une approche plus pragmatique.

Analyse fonctorielle

Point de départ: Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{inv}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est une fonction partiellement définie dont le domain de définition peut être calculé.

Fonctions généralisées

Point de départ: Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{inv}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est une fonction partiellement définie dont le domain de définition peut être calculé.

Idée: On va travailler avec une notion très générale de fonction, adaptée aux généralisations dont on a besoin, et cacher les aspects analytiques dans les domaines de définition.

Fonctions généralisées

Point de départ: Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{inv}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est une fonction partiellement définie dont le domain de définition peut être calculé.

Idée: On va travailler avec une notion très générale de fonction, adaptée aux généralisations dont on a besoin, et cacher les aspects analytiques dans les domaines de définition.

Intérêt: séparation claire entre les aspects analytiques et la théorie de l'obstruction (compliquée pour les théories de jauge).

Point de départ: Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{inv}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est une fonction partiellement définie dont le domain de définition peut être calculé.

Idée: On va travailler avec une notion très générale de fonction, adaptée aux généralisations dont on a besoin, et cacher les aspects analytiques dans les domaines de définition.

Intérêt: séparation claire entre les aspects analytiques et la théorie de l'obstruction (compliquée pour les théories de jauge).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie supérieure/homotopique ambiante, e.g., $\mathcal{C} = \mathrm{SETS}$.

Fonctions généralisées

Point de départ: Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{inv}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est une fonction partiellement définie dont le domain de définition peut être calculé.
Idée: On va travailler avec une notion très générale de fonction, adaptée aux généralisations dont on a besoin, et cacher les aspects analytiques dans les domaines de définition.
Intérêt: séparation claire entre les aspects analytiques et la théorie de l'obstruction (compliquée pour les théories de jauge).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie supérieure/homotopique ambiante, e.g., $\mathcal{C} = \mathrm{SETS}$.
Définition: Un *span* $f : X \to Y$ est un morphisme

$$R_f \to X \times Y.$$

Fonctions généralisées

Point de départ: Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{inv}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est une fonction partiellement définie dont le domain de définition peut être calculé.

Idée: On va travailler avec une notion très générale de fonction, adaptée aux généralisations dont on a besoin, et cacher les aspects analytiques dans les domaines de définition.

Intérêt: séparation claire entre les aspects analytiques et la théorie de l'obstruction (compliquée pour les théories de jauge).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie supérieure/homotopique ambiante, e.g., $\mathcal{C} = \mathrm{S{\scriptsize ETS}}$.

Définition: Un *span* $f : X \to Y$ est un morphisme

$$R_f \to X \times Y.$$

une *fonction multivaluée (resp. fonction partielle)* $f : X \to Y$ est un span R_f tel que $R_f \to X \times Y$ (resp $R_f \to X$) est un monomorphisme.

Point de départ: Rappelons que

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{inv}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1/x \end{array}$$

est une fonction partiellement définie dont le domain de définition peut être calculé.
Idée: On va travailler avec une notion très générale de fonction, adaptée aux généralisations dont on a besoin, et cacher les aspects analytiques dans les domaines de définition.
Intérêt: séparation claire entre les aspects analytiques et la théorie de l'obstruction (compliquée pour les théories de jauge).

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie supérieure/homotopique ambiante, e.g., $\mathcal{C} = \mathrm{SETS}$.
Définition: Un *span* $f : X \to Y$ est un morphisme

$$R_f \to X \times Y.$$

une *fonction multivaluée (resp. fonction partielle)* $f : X \to Y$ est un span R_f tel que $R_f \to X \times Y$ (resp $R_f \to X$) est un monomorphisme.

Algèbres et espaces généralisés

Grothendieck, Lawvere, Dubuc (50'), Quillen, Segal, Lurie-Toen-Vezzosi:

1. Legos: une catégorie de blocs de base simples (e.g., $U \subset \mathbb{R}^n$ lisse).

Algèbres et espaces généralisés

Grothendieck, Lawvere, Dubuc (50'), Quillen, Segal, Lurie-Toen-Vezzosi:

1. Legos: une catégorie de blocs de base simples (e.g., $U \subset \mathbb{R}^n$ lisse).
2. **Approche fonctionnelle**: algèbre généralisée = *foncteur de fonctions*

$$A : \text{Legos} \to \text{Sets}$$

qui commute à des limites prescrites (e.g., pullbacks transverses)

$$e.g., \; U \mapsto \mathcal{C}^{\infty}(M, U).$$

Algèbres et espaces généralisés

Grothendieck, Lawvere, Dubuc (50'), Quillen, Segal, Lurie-Toen-Vezzosi:

1. Legos: une catégorie de blocs de base simples (e.g., $U \subset \mathbb{R}^n$ lisse).
2. **Approche fonctionnelle**: algèbre généralisée = *foncteur de fonctions*

$$A : \mathrm{Legos} \to \mathrm{Sets}$$

qui commute à des limites prescrites (e.g., pullbacks transverses)

$$e.g.,\ U \mapsto \mathcal{C}^\infty(M, U).$$

3. **Approche ponctuelle**: un espace généralisé = *foncteur de points*

$$X : \mathrm{Legos}^{op} \to \mathrm{Sets}$$

qui commute à des limites prescrites (nerfs de recouvrements)

$$e.g.,\ U \mapsto \mathcal{C}^\infty(U, M).$$

Algèbres et espaces généralisés

Grothendieck, Lawvere, Dubuc (50'), Quillen, Segal, Lurie-Toen-Vezzosi:

1. Legos: une catégorie de blocs de base simples (e.g., $U \subset \mathbb{R}^n$ lisse).
2. **Approche fonctionnelle**: algèbre généralisée = *foncteur de fonctions*

   $$A : \text{Legos} \to \text{Sets}$$

   qui commute à des limites prescrites (e.g., pullbacks transverses)

   $$e.g., \ U \mapsto \mathcal{C}^\infty(M, U).$$

3. **Approche ponctuelle**: un espace généralisé = *foncteur de points*

   $$X : \text{Legos}^{op} \to \text{Sets}$$

   qui commute à des limites prescrites (nerfs de recouvrements)

   $$e.g., \ U \mapsto \mathcal{C}^\infty(U, M).$$

Avantage de cette présentation: s'adapte aux calculs gradués (fermions et fantômes) et d'obstructions (généralisations homotopiques).

Un modèle ludique: les distributions

On utilise des espaces lisses (difféologies): faisceaux sur les $U \subset \mathbb{R}^n$.

Un modèle ludique: les distributions

On utilise des espaces lisses (difféologies): faisceaux sur les $U \subset \mathbb{R}^n$.
Espace paramétré de fonctions $X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, défini par

$$X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}).$$

On note $\mathbb{R}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(U, \mathbb{R})$.

Un modèle ludique: les distributions

On utilise des espaces lisses (difféologies): faisceaux sur les $U \subset \mathbb{R}^n$.
Espace paramétré de fonctions $X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, défini par

$$X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}).$$

On note $\mathbb{R}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(U, \mathbb{R})$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a une fonction partielle

$$\begin{array}{rccc} [f]: & X & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_u(x)dx, \end{array}$$

On utilise des espaces lisses (difféologies): faisceaux sur les $U \subset \mathbb{R}^n$.
Espace paramétré de fonctions $X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, défini par

$$X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}).$$

On note $\mathbb{R}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(U, \mathbb{R})$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a une fonction partielle

$$\begin{array}{rccc} [f]: & X & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_u(x)dx, \end{array}$$

dont le domaine est donné par la condition de domination de Lebesgue

$$D_f(U) = \{\varphi_u,\ \forall \alpha \text{ loc on } U,\ \exists g_\alpha \in L^1,\ |f(x)\partial_\alpha \varphi_u(x)| \leq g(x)\}.$$

Un modèle ludique: les distributions

On utilise des espaces lisses (difféologies): faisceaux sur les $U \subset \mathbb{R}^n$.
Espace paramétré de fonctions $X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, défini par

$$X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}).$$

On note $\mathbb{R}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(U, \mathbb{R})$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a une fonction partielle

$$\begin{array}{cccc} [f]: & X & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_u(x)dx, \end{array}$$

dont le domaine est donné par la condition de domination de Lebesgue

$$D_f(U) = \{\varphi_u,\ \forall \alpha \,\mathrm{loc\ on}\ U,\ \exists g_\alpha \in L^1,\ |f(x)\partial_\alpha \varphi_u(x)| \leq g(x)\}.$$

Travail de l'analyste: domaine de définition commun?

On utilise des espaces lisses (difféologies): faisceaux sur les $U \subset \mathbb{R}^n$.
Espace paramétré de fonctions $X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, défini par

$$X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}).$$

On note $\mathbb{R}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(U, \mathbb{R})$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a une fonction partielle

$$\begin{array}{cccc} [f]: & X & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_u(x)dx, \end{array}$$

dont le domaine est donné par la condition de domination de Lebesgue

$$D_f(U) = \{\varphi_u,\ \forall\alpha \text{ loc on } U,\ \exists g_\alpha \in L^1,\ |f(x)\partial_\alpha\varphi_u(x)| \leq g(x)\}.$$

Travail de l'analyste: domaine de définition commun?
Définition: Une *distribution* est une fonction linéaire (partielle) $f : X \to \mathbb{R}$ de domaine de définition

Un modèle ludique: les distributions

On utilise des espaces lisses (difféologies): faisceaux sur les $U \subset \mathbb{R}^n$.
Espace paramétré de fonctions $X = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, défini par

$$X(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(\mathbb{R} \times U, \mathbb{R}).$$

On note $\mathbb{R}(U) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^\infty}(U, \mathbb{R})$.

Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a une fonction partielle

$$\begin{array}{cccc} [f]: & X & \to & \mathbb{R} \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi_u(x)dx, \end{array}$$

dont le domaine est donné par la condition de domination de Lebesgue

$$D_f(U) = \{\varphi_u,\ \forall \alpha \text{ loc on } U,\ \exists g_\alpha \in L^1,\ |f(x)\partial_\alpha \varphi_u(x)| \leq g(x)\}.$$

Travail de l'analyste: domaine de définition commun?
Définition: Une *distribution* est une fonction linéaire (partielle) $f : X \to \mathbb{R}$ de domaine de définition

$$D_{distrib}(U) = \left\{ \varphi_u \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{loc. sur } U,\ \exists K \subset \mathbb{R} \text{ compact tel que} \\ \text{pour tout } u,\ \mathrm{supp}(\varphi(-, u)) \subset K \end{array} \right\}.$$

Définition: problème variationel Lagrangien:

1. M: espace des paramètres; C: espace des configurations.
2. $\pi : C \to M$.

Définition: problème variationel Lagrangien:

1. M: espace des paramètres; C: espace des configurations.
2. $\pi : C \to M$.
3. $H \subset \Gamma(M, C) := \{\varphi : M \to C,\ \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M\}$: espace des histoires.
4. $S : H \to \mathbb{R}$: fonctionnelle d'action.

Définition: problème variationel Lagrangien:

1. M: espace des paramètres; C: espace des configurations.
2. $\pi : C \to M$.
3. $H \subset \Gamma(M, C) := \{\varphi : M \to C,\ \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M\}$: espace des histoires.
4. $S : H \to \mathbb{R}$: fonctionnelle d'action.

Objet central: l'espace critique:

$$\mathrm{Crit}(S) = \{\varphi \in H |\ d_\varphi S = 0\},$$

L'espace critique

Définition: problème variationel Lagrangien:

1. M: espace des paramètres; C: espace des configurations.
2. $\pi : C \to M$.
3. $H \subset \Gamma(M, C) := \{\varphi : M \to C,\ \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M\}$: espace des histoires.
4. $S : H \to \mathbb{R}$: fonctionnelle d'action.

Objet central: l'espace critique:

$$\mathrm{Crit}(S) = \{\varphi \in H |\ d_\varphi S = 0\},$$

où

$$\begin{array}{rccc} S: & H(U) & \to & \mathbb{R}(U) := \mathcal{C}^\infty(U) \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_M L(x, \partial_\alpha \varphi_u(x))dx \end{array}$$

Définition: problème variationel Lagrangien:

1. M: espace des paramètres; C: espace des configurations.
2. $\pi : C \to M$.
3. $H \subset \Gamma(M, C) := \{\varphi : M \to C,\ \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M\}$: espace des histoires.
4. $S : H \to \mathbb{R}$: fonctionnelle d'action.

Objet central: l'espace critique:

$$\mathrm{Crit}(S) = \{\varphi \in H |\ d_\varphi S = 0\},$$

où

$$\begin{array}{rccc} S: & H(U) & \to & \mathbb{R}(U) := \mathcal{C}^\infty(U) \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_M L(x, \partial_\alpha \varphi_u(x))dx \end{array}$$

a son domaine de dëfinition donné par la domination de Lebesgue $D(U) = \{\varphi_u, \exists \text{ locally in } u, g_\beta(x) \in L^1(M),\ |\partial^u_\beta L(x, \partial_\alpha \varphi_u(x))| \leq g_\beta(x)\}$.

L'espace critique

Définition: problème variationel Lagrangien:

1. M: espace des paramètres; C: espace des configurations.
2. $\pi : C \to M$.
3. $H \subset \Gamma(M, C) := \{\varphi : M \to C,\ \pi \circ \varphi = \mathrm{id}_M\}$: espace des histoires.
4. $S : H \to \mathbb{R}$: fonctionnelle d'action.

Objet central: l'espace critique:

$$\mathrm{Crit}(S) = \{\varphi \in H |\ d_\varphi S = 0\},$$

où

$$\begin{array}{rccc} S : & H(U) & \to & \mathbb{R}(U) := \mathcal{C}^\infty(U) \\ & \varphi_u & \mapsto & \int_M L(x, \partial_\alpha \varphi_u(x))dx \end{array}$$

a son domaine de dëfinition donné par la domination de Lebesgue
$D(U) = \{\varphi_u, \exists \text{ locally in } u, g_\beta(x) \in L^1(M),\ |\partial^u_\beta L(x, \partial_\alpha \varphi_u(x))| \leq g_\beta(x)\}$.
Remark: Si $H = \Gamma(M, C)$, intégration par parties $\Rightarrow$ conditions de bord $H' \subset H$ telles que $\mathrm{Crit}_{|H'}$ est l'EDP d'Euler-Lagrange.

$\mathcal{D}$-géométrie et calcul variationnel.

Si $F(x, u_\alpha) = 0$ est une EDP algébrique sur $C \to M$, l'espace des solutions peut être calculé dans toute $\mathcal{D}$-algèbre $\mathcal{A}$ contenant la variable u.

$\mathcal{D}$-GEOMETRIE

Si $F(x, u_\alpha) = 0$ est une EDP algébrique sur $C \to M$, l'espace des solutions peut être calculé dans toute $\mathcal{D}$-algèbre $\mathcal{A}$ contenant la variable u.Ceci définit un $\mathcal{D}$-espace

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A}, F(x, u_\alpha) = 0\}.$$

Si $F(x, u_\alpha) = 0$ est une EDP algébrique sur $C \to M$, l'espace des solutions peut être calculé dans toute $\mathcal{D}$-algèbre $\mathcal{A}$ contenant la variable u.Ceci définit un $\mathcal{D}$-espace

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A}, F(x, u_\alpha) = 0\}.$$

Cet espace est représentable par la $\mathcal{D}$-algèbre $\mathrm{Jet}(u)/(F)$, i.e.,

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(-) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Jet}(u)/(F), -).$$

$\mathcal{D}$-GEOMETRIE

Si $F(x, u_\alpha) = 0$ est une EDP algébrique sur $C \to M$, l'espace des solutions peut être calculé dans toute $\mathcal{D}$-algèbre $\mathcal{A}$ contenant la variable u.Ceci définit un $\mathcal{D}$-espace

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A}, F(x, u_\alpha) = 0\}.$$

Cet espace est représentable par la $\mathcal{D}$-algèbre $\mathrm{Jet}(u)/(F)$, i.e.,

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(-) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Jet}(u)/(F), -).$$

On note

$$\mathrm{Ber}_M := \Omega^n_M$$
$$\mathrm{DR}(\mathcal{A}) := \mathrm{Ber}_M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}} \mathcal{A}.$$

$\mathcal{D}$-GEOMETRIE

Si $F(x, u_\alpha) = 0$ est une EDP algébrique sur $C \to M$, l'espace des solutions peut être calculé dans toute $\mathcal{D}$-algèbre $\mathcal{A}$ contenant la variable u.Ceci définit un $\mathcal{D}$-espace

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A}, F(x, u_\alpha) = 0\}.$$

Cet espace est représentable par la $\mathcal{D}$-algèbre $\mathrm{Jet}(u)/(F)$, i.e.,

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(-) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Jet}(u)/(F), -).$$

On note

$$\mathrm{Ber}_M := \Omega^n_M$$

$$\mathrm{DR}(\mathcal{A}) := \mathrm{Ber}_M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}} \mathcal{A}.$$

On a un accouplement d'intégration entre $H_{*,c}(\mathcal{A})$ et $h^*(\mathrm{DR}(\mathcal{A}))$ a valeurs dans les formes différentielles sur $\underline{\Gamma}(M, C)$.

Si $F(x, u_\alpha) = 0$ est une EDP algébrique sur $C \to M$, l'espace des solutions peut être calculé dans toute $\mathcal{D}$-algèbre $\mathcal{A}$ contenant la variable u.Ceci définit un $\mathcal{D}$-espace

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A}, F(x, u_\alpha) = 0\}.$$

Cet espace est représentable par la $\mathcal{D}$-algèbre $\mathrm{Jet}(u)/(F)$, i.e.,

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(-) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Jet}(u)/(F), -).$$

On note

$$\mathrm{Ber}_M := \Omega^n_M$$
$$\mathrm{DR}(\mathcal{A}) := \mathrm{Ber}_M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}} \mathcal{A}.$$

On a un accouplement d'intégration entre $H_{*,c}(\mathcal{A})$ et $h^*(\mathrm{DR}(\mathcal{A}))$ a valeurs dans les formes différentielles sur $\underline{\Gamma}(M, C)$.

Les fonctionnelles locales sont les fonctions éléments de $h(\mathcal{A}) := h^0(\mathrm{DR}(\mathcal{A}))$.

Si $F(x, u_\alpha) = 0$ est une EDP algébrique sur $C \to M$, l'espace des solutions peut être calculé dans toute $\mathcal{D}$-algèbre $\mathcal{A}$ contenant la variable u.Ceci définit un $\mathcal{D}$-espace

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(\mathcal{A}) := \{u \in \mathcal{A}, F(x, u_\alpha) = 0\}.$$

Cet espace est représentable par la $\mathcal{D}$-algèbre $\mathrm{Jet}(u)/(F)$, i.e.,

$$\mathrm{Sol}_{F=0}(-) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Jet}(u)/(F), -).$$

On note

$$\mathrm{Ber}_M := \Omega^n_M$$
$$\mathrm{DR}(\mathcal{A}) := \mathrm{Ber}_M \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\mathcal{D}} \mathcal{A}.$$

On a un accouplement d'intégration entre $H_{*,c}(\mathcal{A})$ et $h^*(\mathrm{DR}(\mathcal{A}))$ a valeurs dans les formes différentielles sur $\underline{\Gamma}(M, C)$.

Les fonctionnelles locales sont les fonctions éléments de $h(\mathcal{A}) := h^0(\mathrm{DR}(\mathcal{A}))$.

But de la $\mathcal{D}$-géométrie: étudier la géométrie locale des solutions.

L'espace critique

$\mathcal{A}$: $\mathcal{D}_M$-algèbre des fonctions lisses sur les jets d'Ehresmann $\mathrm{Jet}(C/M)$.

L'espace critique

$\mathcal{A}$: $\mathcal{D}_M$-algèbre des fonctions lisses sur les jets d'Ehresmann $\mathrm{Jet}(C/M)$. Supposons que $S(\varphi) = \int_M L(x, \varphi(x), \partial_\alpha \varphi(x))dx \in h(\mathcal{A})$ est une fonctionnelle locale, et H de bonnes histoires (intégration par parties).

$\mathcal{A}$: $\mathcal{D}_M$-algèbre des fonctions lisses sur les jets d'Ehresmann $\mathrm{Jet}(C/M)$. Supposons que $S(\varphi) = \int_M L(x, \varphi(x), \partial_\alpha \varphi(x))dx \in h(\mathcal{A})$ est une fonctionnelle locale, et H de bonnes histoires (intégration par parties). Soit $d : \mathcal{A} \to \Omega^1_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{D}_M$-dérivation universelle sur $\mathcal{A}$ et

$$\Theta_{\mathcal{A}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[\mathcal{D}]}(\Omega^1_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}[\mathcal{D}]).$$

$\mathcal{A}$: $\mathcal{D}_M$-algèbre des fonctions lisses sur les jets d'Ehresmann $\mathrm{Jet}(C/M)$. Supposons que $S(\varphi) = \int_M L(x, \varphi(x), \partial_\alpha \varphi(x))dx \in h(\mathcal{A})$ est une fonctionnelle locale, et H de bonnes histoires (intégration par parties). Soit $d : \mathcal{A} \to \Omega^1_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{D}_M$-dérivation universelle sur $\mathcal{A}$ et

$$\Theta_{\mathcal{A}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[\mathcal{D}]}(\Omega^1_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}[\mathcal{D}]).$$

On a une application d'insertion

$$i_{dS} : \Theta^{\ell}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$: $\mathcal{D}_M$-algèbre des fonctions lisses sur les jets d'Ehresmann $\mathrm{Jet}(C/M)$.
Supposons que $S(\varphi) = \int_M L(x, \varphi(x), \partial_\alpha \varphi(x)) dx \in h(\mathcal{A})$ est une fonctionnelle locale, et H de bonnes histoires (intégration par parties).
Soit $d : \mathcal{A} \to \Omega^1_{\mathcal{A}}$ la $\mathcal{D}_M$-dérivation universelle sur $\mathcal{A}$ et

$$\Theta_{\mathcal{A}} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}[\mathcal{D}]}(\Omega^1_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}[\mathcal{D}]).$$

On a une application d'insertion

$$i_{dS} : \Theta^{\ell}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}.$$

Si on note $\mathcal{I}_S := \mathrm{im}(i_{dS})$, l'espace critique est l'EDP d'Euler-Lagrange

$$\mathrm{Crit}(S) = \mathrm{Spec}(\mathcal{A}/\mathcal{I}_S).$$

Réduction de Poisson homotopique.

Géométrie différentielle homotopique

Motivation: théorie de l'obstruction systématique et formalisme BV (approche moderne aux théories de jauge quantiques [Henneaux-Teitelboim]).

Motivation: théorie de l'obstruction systématique et formalisme BV (approche moderne aux théories de jauge quantiques [Henneaux-Teitelboim]).

Définition: champs dérivés lisses:

1. Legos: $U \subset \mathbb{R}^n$ lisses.

Motivation: théorie de l'obstruction systématique et formalisme BV (approche moderne aux théories de jauge quantiques [Henneaux-Teitelboim]).

Définition: champs dérivés lisses:

1. Legos: $U \subset \mathbb{R}^n$ lisses.
2. Alg: foncteurs $A : \text{Legos} \to \text{SSets}$ commutant homotopiquement aux produits fibrés transverses.

Géométrie différentielle homotopique

Motivation: théorie de l'obstruction systématique et formalisme BV (approche moderne aux théories de jauge quantiques [Henneaux-Teitelboim]).

Définition: champs dérivés lisses:

1. $\mathrm{L\textsc{egos}}$: $U \subset \mathbb{R}^n$ lisses.
2. $\mathrm{A\textsc{lg}}$: foncteurs $A : \mathrm{L\textsc{egos}} \to \mathrm{SS\textsc{ets}}$ commutant homotopiquement aux produits fibrés transverses.
3. $\mathrm{S\textsc{paces}}$: foncteurs $X : \mathrm{A\textsc{lg}} \to \mathrm{SS\textsc{ets}}$ à homotopie (locale) près.

Motivation: théorie de l'obstruction systématique et formalisme BV (approche moderne aux théories de jauge quantiques [Henneaux-Teitelboim]).

Définition: champs dérivés lisses:

1. Legos: $U \subset \mathbb{R}^n$ lisses.
2. Alg: foncteurs $A : \text{Legos} \to \text{SSets}$ commutant homotopiquement aux produits fibrés transverses.
3. Spaces: foncteurs $X : \text{Alg} \to \text{SSets}$ à homotopie (locale) près.

Definition: $\mathcal{D}$-champs dérivés:

1. Legos: morphismes lisses $\mathbb{R}^n \supset U \to M$ avec $\mathcal{D}_M$-structure (connexion).

Géométrie différentielle homotopique

Motivation: théorie de l'obstruction systématique et formalisme BV (approche moderne aux théories de jauge quantiques [Henneaux-Teitelboim]).

Définition: champs dérivés lisses:

1. Legos: $U \subset \mathbb{R}^n$ lisses.
2. Alg: foncteurs $A : \text{Legos} \to \text{SSets}$ commutant homotopiquement aux produits fibrés transverses.
3. Spaces: foncteurs $X : \text{Alg} \to \text{SSets}$ à homotopie (locale) près.

Definition: $\mathcal{D}$-champs dérivés:

1. Legos: morphismes lisses $\mathbb{R}^n \supset U \to M$ avec $\mathcal{D}_M$-structure (connexion).
2. Alg: comme avant: $\mathcal{D}_M$-algebres simpliciales.
3. Spaces: comme avant: $\mathcal{D}_M$-champs dérivés.

Motivation: théorie de l'obstruction systématique et formalisme BV (approche moderne aux théories de jauge quantiques [Henneaux-Teitelboim]).

Définition: champs dérivés lisses:

1. $\mathrm{L{\scriptsize EGOS}}$: $U \subset \mathbb{R}^n$ lisses.
2. $\mathrm{A{\scriptsize LG}}$: foncteurs $A : \mathrm{L{\scriptsize EGOS}} \to \mathrm{SS{\scriptsize ETS}}$ commutant homotopiquement aux produits fibrés transverses.
3. $\mathrm{S{\scriptsize PACES}}$: foncteurs $X : \mathrm{A{\scriptsize LG}} \to \mathrm{SS{\scriptsize ETS}}$ à homotopie (locale) près.

Definition: $\mathcal{D}$-champs dérivés:

1. $\mathrm{L{\scriptsize EGOS}}$: morphismes lisses $\mathbb{R}^n \supset U \to M$ avec $\mathcal{D}_M$-structure (connexion).
2. $\mathrm{A{\scriptsize LG}}$: comme avant: $\mathcal{D}_M$-algebres simpliciales.
3. $\mathrm{S{\scriptsize PACES}}$: comme avant: $\mathcal{D}_M$-champs dérivés.

Espace critique dérivé: $\mathbb{R}\mathrm{Crit}(S) = \mathbb{R}\mathrm{Spec}(\mathrm{Sym}_{\mathcal{A}-dg}(\Theta^{\ell}_{\mathcal{A}} \xrightarrow{i_{dS}} \mathcal{A}))$.

Théories de jauge

Définition/théorème de Noether: Un module gradué $\mathfrak{g}_S$ de symétries de jauge sur pour $S \in h(\mathcal{A})$ est

Théories de jauge

Définition/théorème de Noether: Un module gradué $\mathfrak{g}_S$ de symétries de jauge sur pour $S \in h(\mathcal{A})$ est un module générateur d'une résolution cofibrante

$$\mathcal{A}' = (\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}_S[2] \oplus \Theta^{\ell}_{\mathcal{A}}[1] \oplus \mathcal{A}), d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}/\mathcal{I}_S$$

de composantes des $\mathcal{A}[\mathcal{D}]$-module localement libres de rang fini.

Définition/théorème de Noether: Un module gradué $\mathfrak{g}_S$ de symétries de jauge sur pour $S \in h(\mathcal{A})$ est un module générateur d'une résolution cofibrante

$$\mathcal{A}' = (\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}_S[2] \oplus \Theta^{\ell}_{\mathcal{A}}[1] \oplus \mathcal{A}), d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}/\mathcal{I}_S$$

de composantes des $\mathcal{A}[\mathcal{D}]$-module localement libres de rang fini.
Si $\mathfrak{g}$ est en degré zéro, le crochet des vecteurs locaux induit un crochet

$$[-,-] : \mathfrak{g}_S \boxtimes \mathfrak{g}_S \to \Delta_* \Theta_{\mathcal{A}}.$$

Définition/théorème de Noether: Un module gradué $\mathfrak{g}_S$ de symétries de jauge sur pour $S \in h(\mathcal{A})$ est un module générateur d'une résolution cofibrante

$$\mathcal{A}' = (\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}_S[2] \oplus \Theta^{\ell}_{\mathcal{A}}[1] \oplus \mathcal{A}), d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}/\mathcal{I}_S$$

de composantes des $\mathcal{A}[\mathcal{D}]$-module localement libres de rang fini.
Si $\mathfrak{g}$ est en degré zéro, le crochet des vecteurs locaux induit un crochet

$$[-,-] : \mathfrak{g}_S \boxtimes \mathfrak{g}_S \to \Delta_* \Theta_{\mathcal{A}}.$$

Batalin et Vilkovisky définissent une “réduction de Poisson”

$$\mathrm{Crit}(S)/\mathfrak{g} := \mathbb{R}\mathrm{Spec}(\mathcal{A}/\mathcal{I}_S)/\mathfrak{g},$$

Définition/théorème de Noether: Un module gradué $\mathfrak{g}_S$ de symétries de jauge sur pour $S \in h(\mathcal{A})$ est un module générateur d'une résolution cofibrante

$$\mathcal{A}' = (\mathrm{Sym}(\mathfrak{g}_S[2] \oplus \Theta^{\ell}_{\mathcal{A}}[1] \oplus \mathcal{A}), d) \overset{\sim}{\to} \mathcal{A}/\mathcal{I}_S$$

de composantes des $\mathcal{A}[\mathcal{D}]$-module localement libres de rang fini.
Si $\mathfrak{g}$ est en degré zéro, le crochet des vecteurs locaux induit un crochet

$$[-,-] : \mathfrak{g}_S \boxtimes \mathfrak{g}_S \to \Delta_* \Theta_{\mathcal{A}}.$$

Batalin et Vilkovisky définissent une "réduction de Poisson"

$$\mathrm{Crit}(S)/\mathfrak{g} := \mathbb{R}\mathrm{Spec}(\mathcal{A}/\mathcal{I}_S)/\mathfrak{g},$$

en résolvant $\{S_{cm}, S_{cm}\} = 0$ dans l'algèbre de Poisson locale bigraduée

$$\mathcal{A}_{BV} = \mathrm{Sym}_{bigrad}\left(\begin{bmatrix} \mathfrak{g}_S[2] & \oplus & \Theta^{\ell}_{\mathcal{A}}[1] & \oplus & \mathcal{A} \\ & & & & \oplus \\ & & & & {}^t\mathfrak{g}^{\circ}_S[-1] \end{bmatrix}\right).$$

Pour quantifier, on doit fixer une lagrangienne (dérivée) dans l'espace de Poisson impair BV

$$X_{BV} = \mathbb{R}\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_{BV}, \{S_{cm}, -\}).$$

Fixation de jauge

Pour quantifier, on doit fixer une lagrangienne (dérivée) dans l'espace de Poisson impair BV

$$X_{BV} = \mathbb{R}\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_{BV}, \{S_{cm}, -\}).$$

En pratique, on peut ajouter des générateurs à cohomologie triviale pour que les lagrangiennes dérivées deviennent graduées.

Fixation de jauge

Pour quantifier, on doit fixer une lagrangienne (dérivée) dans l'espace de Poisson impair BV

$$X_{BV} = \mathbb{R}\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_{BV}, \{S_{cm}, -\}).$$

En pratique, on peut ajouter des générateurs à cohomologie triviale pour que les lagrangiennes dérivées deviennent graduées.

Le formalisme n'est pas encore totalement compris en termes de géométrie dérivée.

Notre apport

Notre apport est de donner une formulation mathématique précise de la méthode de BV, permettant de comprendre les conditions de finitude nécessaires à sa validité.

Notre apport

Notre apport est de donner une formulation mathématique précise de la méthode de BV, permettant de comprendre les conditions de finitude nécessaires à sa validité.

Theoreme: Une théorie de jauge supersymmétrique $S \in h(\mathcal{A})$ (avec les conditions de finitude évoquées) permet de construire $S_{cm} \in h(\mathcal{A}_{BV})$ vérifiant l'équation master classique

$$\{S_{cm}, S_{cm}\} = 0.$$

Notre apport est de donner une formulation mathématique précise de la méthode de BV, permettant de comprendre les conditions de finitude nécessaires à sa validité.

Theoreme: Une théorie de jauge supersymmétrique $S \in h(\mathcal{A})$ (avec les conditions de finitude évoquées) permet de construire $S_{cm} \in h(\mathcal{A}_{BV})$ vérifiant l'équation master classique

$$\{S_{cm}, S_{cm}\} = 0.$$

Autre résultat mathématique précis: construction détaillée et géométrique de la fixation de jauge, en toute généralité.