

AUTO-GLISSEMENTS ET LE PROBLÈME D'ISOTOPIE DES 1-FORMES FERMÉES NON SINGULIÈRES

Carlos MORAGA FERRÁNDIZ

Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, Université de Nantes

Rencontre annuelle du GDR
« Topologie Algébrique et Applications »

Lille, 24 octobre 2012

Plan de l'exposé

- ① **Le problème**
 - Problème similaire pour les fonctions
 - Énoncé du théorème principal

- ② **L -incidence**
 - Matrice de pré-élimination

- ③ **Schéma de preuve du théorème principal**
 - Glissements et auto-glissements. Effet algébrique

Contexte mathématique

Soient M^{n+1} une variété fermée et $0 \neq u \in H_{\text{dR}}^1(M, \mathbb{R})$.

Considérons :

Représentants de la classe u

① $\Omega^u := \left\{ \alpha \text{ 1-forme} \mid \begin{array}{l} d\alpha = 0 \\ [\alpha] = u \end{array} \right\}$ muni de la topologie \mathcal{C}^∞ ,
et son sous-espace :

② $\Omega_{NS}^u := \{ \alpha \in \Omega^u \mid Z(\alpha) = \emptyset \}$,

où $Z(\alpha) := \{ p \in M \mid \alpha(p) = 0 \in T_p^*M \}$.

On se place dans la situation où Ω_{NS}^u est non vide.

Remarque

$\alpha_0, \alpha_1 \in \Omega_{NS}^u$ sont isotopes $\iff \alpha_0, \alpha_1$ sont homotopes dans Ω_{NS}^u .

Le problème. Historique

Que peut-on dire sur l'espace des composantes connexes de Ω_{NS}^u ?

Problème

Calcul de $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$.

On ne connaît que très peu de résultats :

- si $\dim M = 3$, alors $\pi_0(\Omega_{NS}^u) = \{*\}$ (*Laudenbach - Blank, 1979*),
- si $M = \mathbb{T}^m$, $m \geq 6$ et u est rationnelle, $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$ est infini (*Laudenbach, 1976*).

Nous avons abordé le problème pour M dans la dimension grande ($\dim(M) \geq 4$).

Le problème. Approche « à la Cerf »

Problème

Calcul de $\pi_0(\Omega_{NS}^u)$.

Comme Ω^u est convexe, on déduit une bijection

$$\pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\Omega_{NS}^u).$$

L'objectif, non encore atteint, est de fabriquer une obstruction algébrique non-triviale

$$\Sigma : \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u) \rightarrow G$$

pour qu'un chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ dans Ω^u à extrémités non singulières, se déforme entièrement sur les 1-formes non singulières.

La stratégie : analogie avec les fonctions

Un problème analogue est celui de l'étude du $\pi_0(\mathcal{E}_M)$, où \mathcal{E}_M est l'espace des fonctions différentiables

$$\mathcal{E}_M := \left\{ f : M \times [0, 1] \rightarrow [0, 1] \mid \begin{array}{l} f(M \times \{i\}) = i, \text{ si } i = 0, 1 \\ f \text{ sans point critique} \end{array} \right\}.$$

L'espace $\mathcal{C}_M := C^\infty(M \times [0, 1])$ est convexe et on a

$$\pi_1(\mathcal{C}_M, \mathcal{E}_M) \xrightarrow{\sim} \pi_0(\mathcal{E}_M).$$

On cherche un résultat similaire au suivant :

Hatcher & Wagoner 1973 : *Pseudo-Isotopies of Compact Manifolds*

Si $\dim M \geq 5$, il y a une surjection $\rho : \pi_1(\mathcal{C}_M, \mathcal{E}_M) \rightarrow \text{Wh}_2(\pi_1 M)$.

Où $\text{Wh}_2(\pi_1 M)$ est un groupe quotient de $K_2(\mathbb{Z}[\pi_1 M])$.

Chemins génériques dans Ω^u et \mathcal{C}_M

Proposition

La propriété des chemins $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ dans Ω^u énoncée ci-dessous est générique.

Il existe S fini $\subset]0, 1[$, de temps dits de *naissance* ou *d'élimination* tel que :

- ① pour $t \notin S$, tout zéro p_t de α_t est de *Morse* ou *quadratique*,
- ② pour $t_j \in S$, même situation sauf pour un seul zéro p_{t_j} qui est *cubique*.

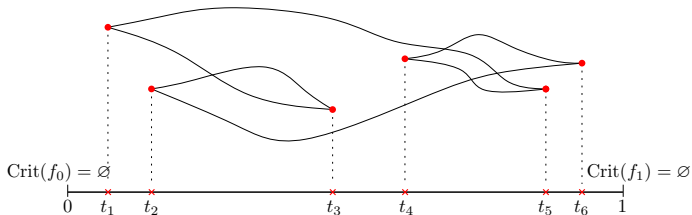
Représentation des chemins dans \mathcal{C}_M : graphique de Cerf

Pour représenter $(f_t)_{t \in [0,1]}$ générique dans $(\mathcal{C}_M, \mathcal{E}_M)$, on utilise le graphique de Cerf.

Graphique de Cerf associé à $(f_t)_{t \in [0,1]}$

Il s'agit du sous-ensemble de $[0, 1] \times [0, 1]$ donné par

$$\text{Gr}(f_\bullet) := \bigcup_{t \in [0,1]} \{t\} \times f_t(\text{Crit}(f_t)).$$



Forme normale. Théorème principal

Forme normale

Un $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique est en *forme normale* si les relevés qui sont nés ensemble s'éliminent ensemble.

Forme normale. Théorème principal

Forme normale

Un $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique est en *forme normale* si les relevés qui sont nés ensemble s'éliminent ensemble.

Le théorème concerne un type de chemins génériques : ceux qui ont deux indices critiques $i, i + 1$.

Théorème principal

Pour tout $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique à deux indices $i, i + 1$ où $1 < i < n - 1$, il existe $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ de même nature tel que :

- ① $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$,
- ② $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ est en *forme normale*.

Forme normale s'exprime algébriquement à travers la notion de L-incidence.

L-incidence

Pour la définir, nous avons besoin des concepts ci-dessous.

- Équipements L -transverses (champs de vecteurs $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$).
- Liaisons $\mathcal{L}^\xi(p, q)$ (orbites des ξ).
- Enroulement et u -enroulement des liaisons.

Équipements

Le chemin de champs de vecteurs $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipe $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ si

- 1 $\alpha_t(\xi_t) < 0$ hors de $Z(\alpha_t)$, pour tout $t \in [0, 1]$,
- 2 condition non dégénérescence sur $Z(\alpha_t)$ quand α_t de Morse.

Si ξ équipe α , on a les variétés stable/instable d'un $p \in Z(\alpha)$:

$$W^s(p; \xi) := \{x \in M \mid \lim_{s \rightarrow +\infty} \xi^s(x) = p\},$$

$$W^u(p; \xi) := \{x \in M \mid \lim_{s \rightarrow -\infty} \xi^s(x) = p\},$$

Un tel ξ est dit *Morse-Smale* si

$W^u(p) \pitchfork W^s(q), \forall p, q \in Z(\alpha)$ ou de façon équivalente, si

$$W^u(P) \pitchfork W^s(gQ), \forall P, Q \in B, g \in \pi_1 M.$$

Liaisons, enroulement et u -enroulement

Notons $\mathcal{L}^\xi(p, q)$ l'espace de liaisons (orbites) de ξ allant de p à q .

Enroulement : $\mathcal{L}^\xi(p, q) \xrightarrow{e} \pi_1 M$

$$e(\ell) = g \iff \tilde{\ell} \text{ va de } P \text{ à } gQ, \text{ où } P, Q \in B.$$

La classe u induit un morphisme $u : \pi_1 M \rightarrow \mathbb{R}$.

u -enroulement : $\mathcal{L}^\xi(p, q) \xrightarrow{u \circ e} \mathbb{R}$

Pour $L > 0$, on note $\mathcal{L}_L^\xi(p, q) := \{\ell \in \mathcal{L}^\xi(p, q) \mid u(e(\ell)) \geq -L\}$.

Si ξ_\bullet est également L -transverse de α_\bullet :

L -incidence

Pour $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$, l'ensemble $\mathcal{L}_L^\xi(p, q)$ est fini. On définit :

$$\langle p, q \rangle_L := \sum_{\ell \in \mathcal{L}_L^\xi(p, q)} s(\ell) e(\ell) \in \mathbb{Z}[\pi_1 M].$$

Si ξ_\bullet est également L -transverse de α_\bullet :

L-incidence

Pour $\text{ind}(p) = \text{ind}(q) + 1$, l'ensemble $\mathcal{L}_L^\xi(p, q)$ est fini. On définit :

$$\langle p, q \rangle_L := \sum_{\ell \in \mathcal{L}_L^\xi(p, q)} s(\ell) e(\ell) \in \mathbb{Z}[\pi_1 M].$$

On associe ainsi à tout instant $t \notin S \cup R$ (non accidentel) :

- $C_*(\alpha_t)$ le $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ -module libre engendré par B_t , gradué par l'indice,
- $\partial_*^\xi : C_*(\alpha_t) \rightarrow C_{*-1}(\alpha_t)$ l'application $\mathbb{Z}[\pi_1 M]$ -linéaire telle que $P \mapsto \sum_{Q \in (B_t)_{*-1}} \langle p, q \rangle_L Q$.

On note par A_*^t les matrices de L -incidence, qui ne changent que lors du passage par $S \cup R$.

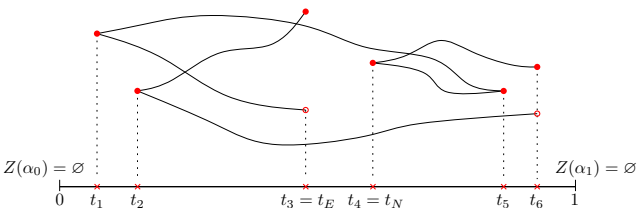
Nous avons étudié les variations des A_*^t au passage par $t \in S \cup R$.

Redressement

Proposition

Soit $L > 0$. Tout chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à deux indices $i, i + 1$ où $1 < i < n - 1$ se déforme, à extrémités fixes, en $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ tel que :

- ① les naissances précèdent les éliminations ($t_N < t_E$),
- ② il admet $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipement L -transverse tel que
 - les instants de glissement vérifient $R \subset]t_N, t_E[$,
 - toute naissance/élimination p est L -indépendante : $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$ pour tout $q \in Z(\alpha)$.

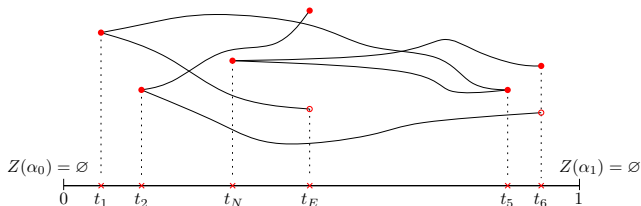


Redressement

Proposition

Soit $L > 0$. Tout chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à deux indices $i, i + 1$ où $1 < i < n - 1$ se déforme, à extrémités fixes, en $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ tel que :

- les naissances précèdent les éliminations ($t_N < t_E$),
- il admet $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipement L -transverse tel que
 - les instants de glissement vérifient $R \subset]t_N, t_E[$,
 - toute naissance/élimination p est L -indépendante : $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$ pour tout $q \in Z(\alpha)$.

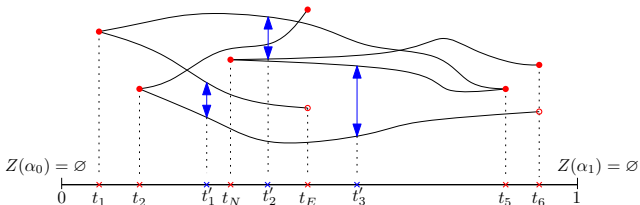


Redressement

Proposition

Soit $L > 0$. Tout chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à deux indices $i, i + 1$ où $1 < i < n - 1$ se déforme, à extrémités fixes, en $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ tel que :

- ① les naissances précèdent les éliminations ($t_N < t_E$),
- ② il admet $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipement L -transverse tel que
 - les instants de glissement vérifient $R \subset]t_N, t_E[$,
 - toute naissance/élimination p est L -indépendante : $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$ pour tout $q \in Z(\alpha)$.

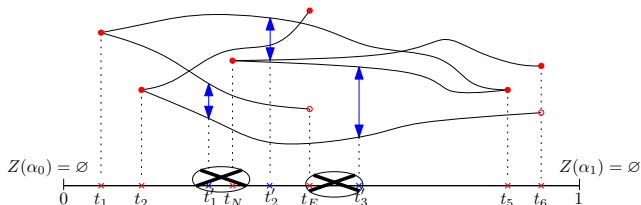


Redressement

Proposition

Soit $L > 0$. Tout chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à deux indices $i, i + 1$ où $1 < i < n - 1$ se déforme, à extrémités fixes, en $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ tel que :

- ① les naissances précèdent les éliminations ($t_N < t_E$),
- ② il admet $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipement L -transverse tel que
 - les instants de glissement vérifient $R \subset]t_N, t_E[$,
 - toute naissance/élimination p est L -indépendante :
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$ pour tout $q \in Z(\alpha)$.

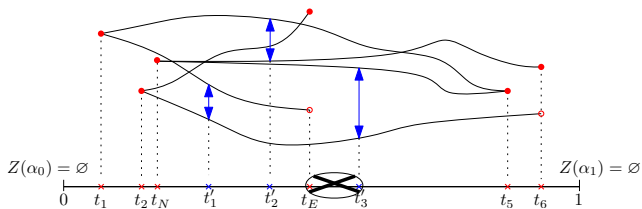


Redressement

Proposition

Soit $L > 0$. Tout chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à deux indices $i, i+1$ où $1 < i < n-1$ se déforme, à extrémités fixes, en $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ tel que :

- ① les naissances précèdent les éliminations ($t_N < t_E$),
- ② il admet $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipement L -transverse tel que
 - les instants de glissement vérifient $R \subset]t_N, t_E[$,
 - toute naissance/élimination p est L -indépendante : $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$ pour tout $q \in Z(\alpha)$.

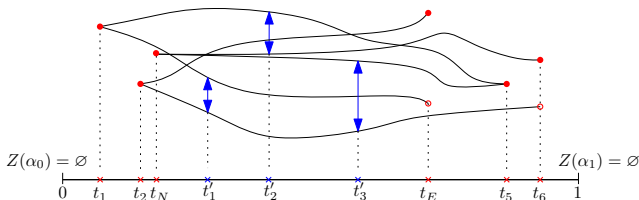


Redressement

Proposition

Soit $L > 0$. Tout chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à deux indices $i, i + 1$ où $1 < i < n - 1$ se déforme, à extrémités fixes, en $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ tel que :

- ① les naissances précèdent les éliminations ($t_N < t_E$),
- ② il admet $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipement L -transverse tel que
 - les instants de glissement vérifient $R \subset]t_N, t_E[$,
 - toute naissance/élimination p est L -indépendante :
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$ pour tout $q \in Z(\alpha)$.

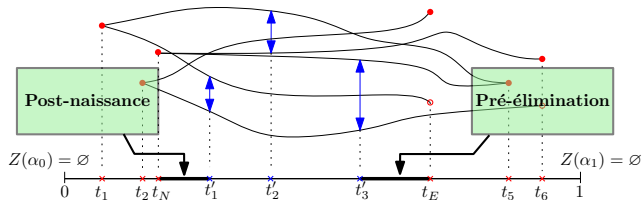


Redressement

Proposition

Soit $L > 0$. Tout chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à deux indices $i, i + 1$ où $1 < i < n - 1$ se déforme, à extrémités fixes, en $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ tel que :

- ① les naissances précèdent les éliminations ($t_N < t_E$),
- ② il admet $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ équipement L -transverse tel que
 - les instants de glissement vérifient $R \subset]t_N, t_E[$,
 - toute naissance/élimination p est L -indépendante :
 $\mathcal{L}_L(p, q) \cup \mathcal{L}_L(q, p) = \emptyset$ pour tout $q \in Z(\alpha)$.

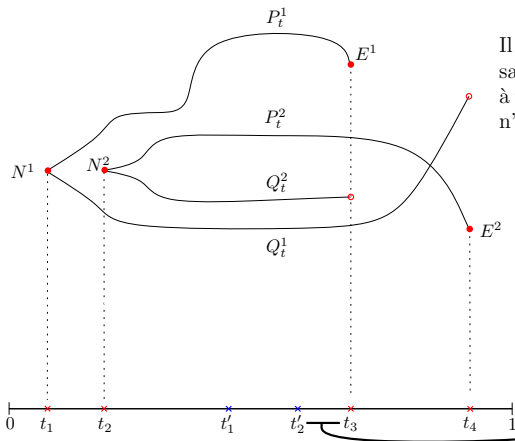


Forme normale à travers la L -incidence

Un α_{\bullet} comme dans la conclusion de la proposition de redressement est dit redressé.

Un α_{\bullet} redressé est en forme normale si sa matrice de L -incidence A_{i+1}^t , pour t un temps de pré-élimination, est l'identité.

Exemple. Chemin redressé

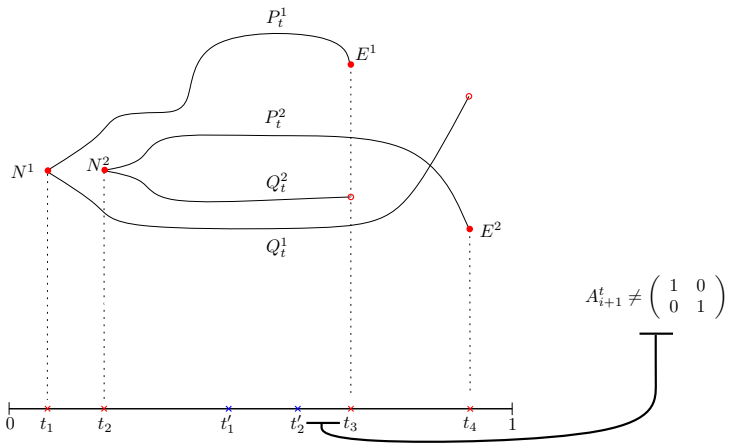
Prenons $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ redressé.

Il n'est pas en forme normale :
sa matrice de L-incidence A_{i+1}^t
à un instant de pré-élimination
n'est pas l'identité.

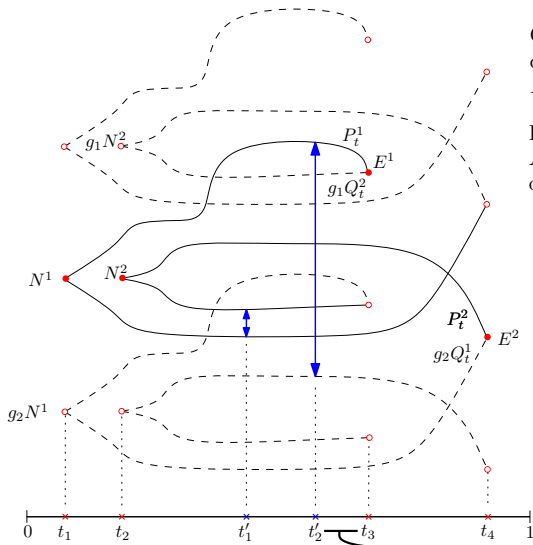
$$A_{i+1}^t \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple. Chemin redressé

On trouve $g_1, g_2 \in \pi_1 M$ tels que P_t^1 s'élimine avec $g_1 Q_t^2$ et P_t^2 s'élimine avec $g_2 Q_t^1$.



Exemple. Chemin redressé

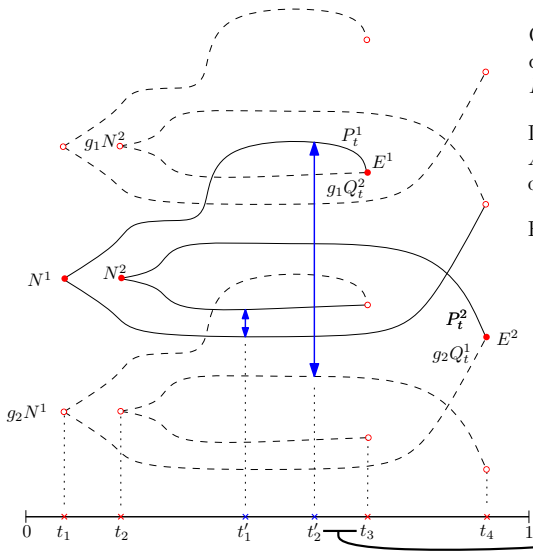


On trouve $g_1, g_2 \in \pi_1 M$ tels que P_t^1 s'élimine avec $g_1 Q_t^2$ et P_t^2 s'élimine avec $g_2 Q_t^1$.

La matrice de L -incidence A_{i+1}^t devrait être comme ci-dessous.

$$A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} * & g_1 + * \\ g_2 + * & * \end{pmatrix}$$

Exemple. Chemin redressé



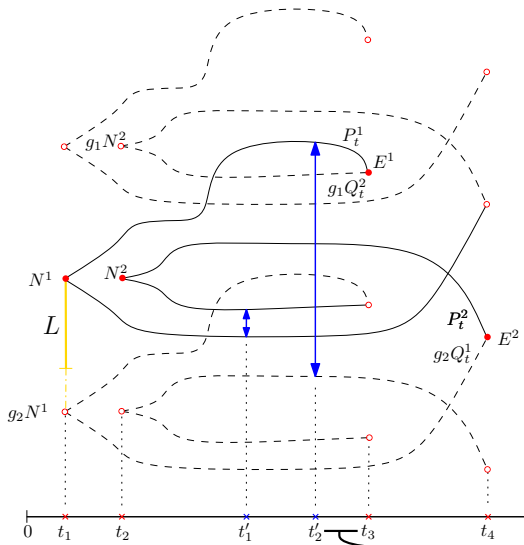
On trouve $g_1, g_2 \in \pi_1 M$ tels que P_t^1 s'élimine avec $g_1 Q_t^2$ et P_t^2 s'élimine avec $g_2 Q_t^1$.

La matrice de L -incidence A_{i+1}^t devrait être comme ci-dessous.

En effet A_{i+1}^t est monômiale.

$$A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemple. L trop petit



Mais attention !
Prendre L trop petit peut entraîner une perte d'informations.

Par exemple :
si $0 < L < -u(g_2)$, la matrice de L-incidence A_{i+1}^t ne voit plus l'élimination de P_t^2 .

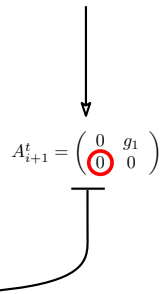


Schéma de preuve

Théorème principal

Pour tout $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique à deux indices $i, i+1$ où $1 < i < n-1$, il existe $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ de même nature tel que

- ① $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$,
- ② $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ est en *forme normale*.

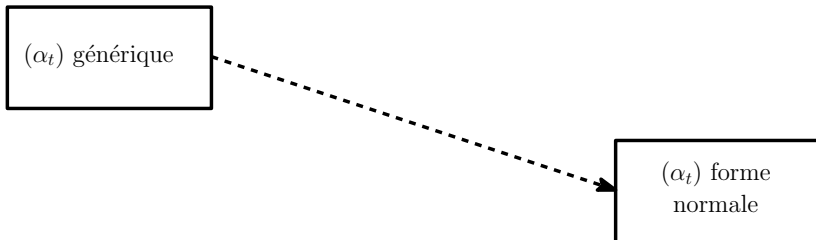


Schéma de preuve

Théorème principal

Pour tout $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique à deux indices $i, i+1$ où $1 < i < n-1$, il existe $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ de même nature tel que

- 1 $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$,
- 2 $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ est en *forme normale*.

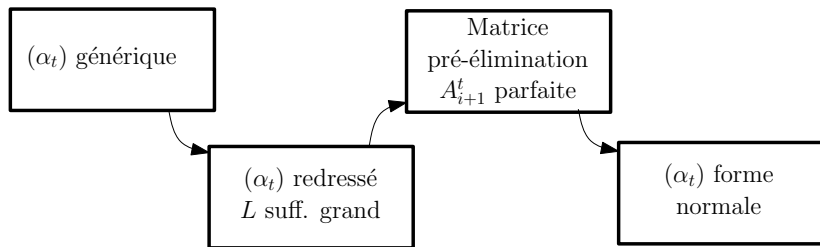


Schéma de preuve

Théorème principal

Pour tout $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique à deux indices $i, i+1$ où $1 < i < n-1$, il existe $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ de même nature tel que

- ① $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$,
- ② $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ est en *forme normale*.

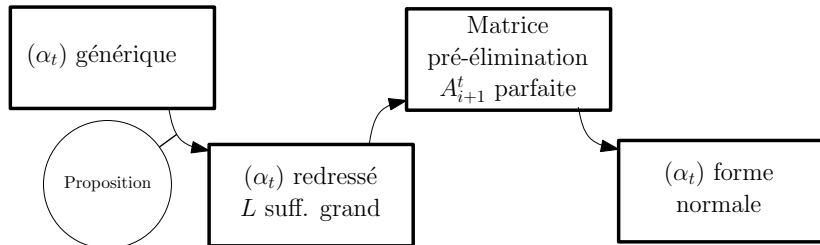


Schéma de preuve

Théorème principal

Pour tout $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique à deux indices $i, i+1$ où $1 < i < n-1$, il existe $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ de même nature tel que

- ① $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$,
- ② $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ est en *forme normale*.

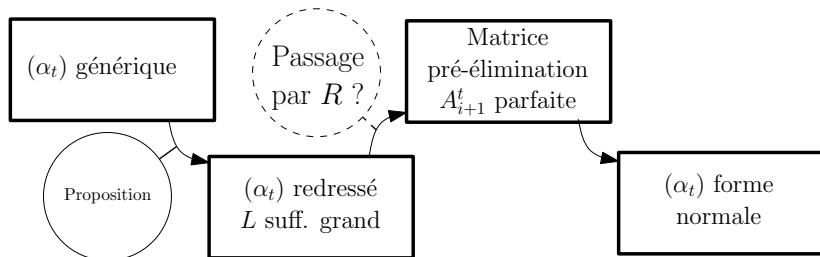
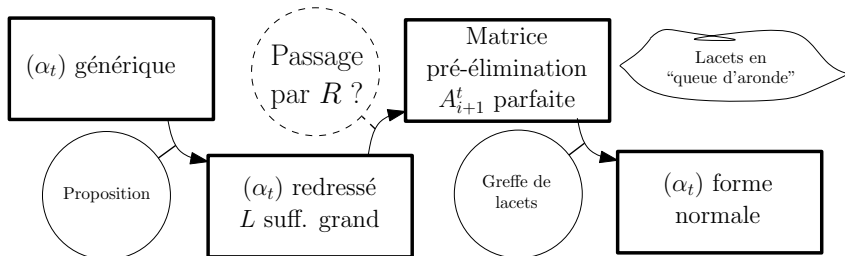


Schéma de preuve

Théorème principal

Pour tout $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ générique à deux indices $i, i+1$ où $1 < i < n-1$, il existe $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ de même nature tel que

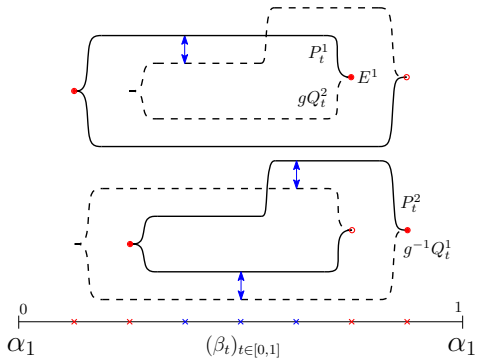
- ① $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$,
- ② $(\alpha'_t)_{t \in [0,1]}$ est en *forme normale*.



Lacets en queue d'aronde

À partir de α_1 non-singulière et $g \in \pi_1 M$ quelconques, nous avons construit un lacet contractile :

β_\bullet basé en α_1 dont la matrice de pré-élimination est $\begin{pmatrix} 0 & -g \\ g^{-1} & 0 \end{pmatrix}$.

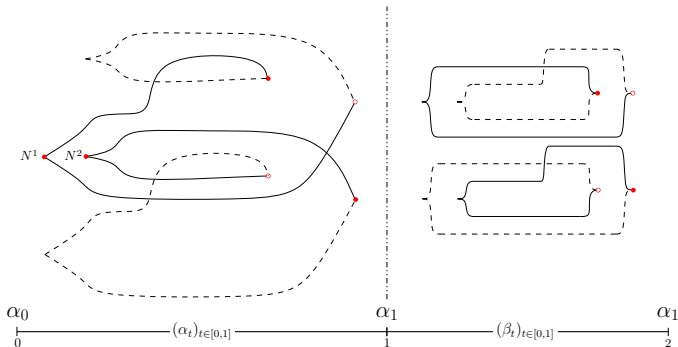


Greffe des lacets. Exemple

La concaténation $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$ a les mêmes extrémités que α_\bullet .

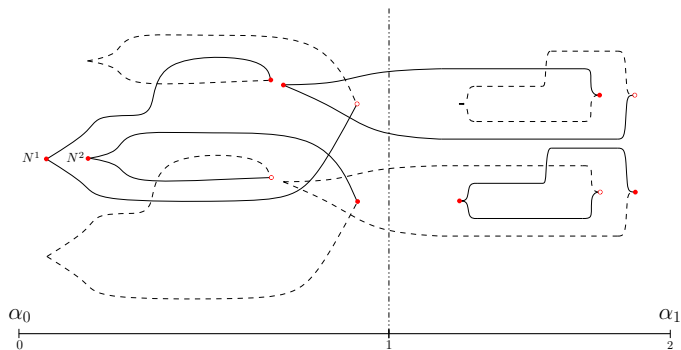
La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur α'_\bullet .

Nous avons $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega^u_{NS})$.



Greffe des lacets. Exemple

La concaténation $\alpha_{\bullet} * \beta_{\bullet}$ a les mêmes extrémités que α_{\bullet} .
La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur α'_{\bullet} .
Nous avons $[\alpha_{\bullet}] = [\alpha'_{\bullet}] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega^u_{NS})$.

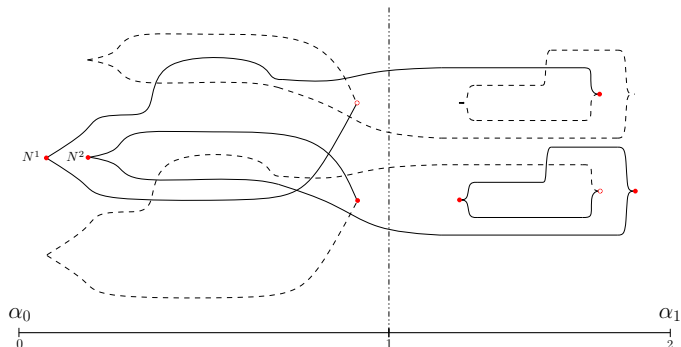


Greffe des lacets. Exemple

La concatéation $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$ a les mêmes extrémités que α_\bullet .

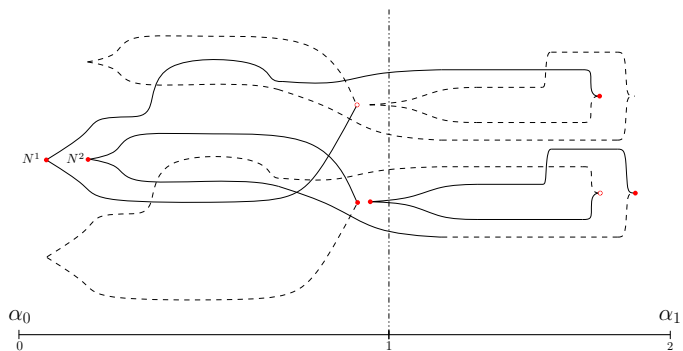
La greffe déforme la concatéation, à extrémités fixes, sur α'_\bullet .

Nous avons $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$.



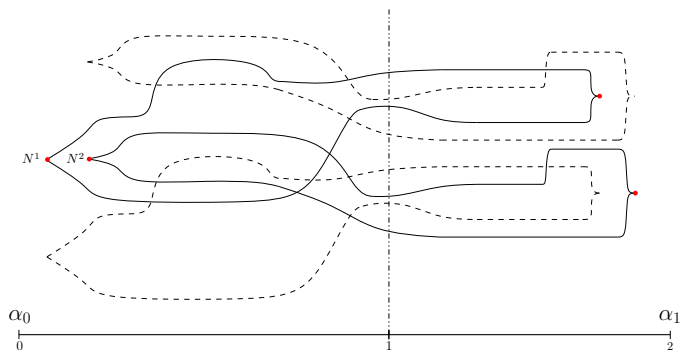
Greffe des lacets. Exemple

La concaténation $\alpha_{\bullet} * \beta_{\bullet}$ a les mêmes extrémités que α_{\bullet} .
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur α'_{\bullet} .
 Nous avons $[\alpha_{\bullet}] = [\alpha'_{\bullet}] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega^u_{NS})$.



Greffe des lacets. Exemple

La concaténation $\alpha_\bullet * \beta_\bullet$ a les mêmes extrémités que α_\bullet .
 La greffe déforme la concaténation, à extrémités fixes, sur α'_\bullet .
 Nous avons $[\alpha_\bullet] = [\alpha'_\bullet] \in \pi_1(\Omega^u, \Omega_{NS}^u)$.



Effet algébrique des greffes

Supposons que $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ g_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$.

Nous avons montré que la greffe a la vertu de transformer la matrice de pré-élimination en : $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & -g_j g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$.

Effet algébrique des greffes

Supposons que $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ g_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$.

Nous avons montré que la greffe a la vertu de transformer la matrice de pré-élimination en : $A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & -g_j g_1 & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}$.

On se ramène de proche en proche à la matrice

$$A_{i+1}^t = \begin{pmatrix} \text{Id}_{s-1} & 0 \\ 0 & (-1)^\sigma \prod_{i=1}^s g_i \end{pmatrix}.$$

Mais les commutateurs se décomposent comme suit :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [h_1, h_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1^{-1} & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2^{-1} & 0 \\ 0 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 h_1 & 0 \\ 0 & (h_2 h_1)^{-1} \end{pmatrix},$$

et finalement en un produit de deux greffes :

$$\begin{pmatrix} h^{-1} & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & h^{-1} \\ -h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Relation des A_i^t lors du passage par R

Soit $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ à indices $i, i-1$ redressé. Soit $t_0 \in R$.

Prenons p^j, p^k d'indice i tels que $\mathcal{L}_L^{t_0}(p^j, p^k) = \{\ell\}$. Notons A^\pm la matrice de L -incidence juste avant/après t_0 .

Voyons que $A^+ = \text{tr}_L(E_{jk}^{\delta(\ell)} A^-)$ où

- $\text{tr}_L : \mathbb{Z}[\pi_1 M] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi_1 M]$ est la troncature :

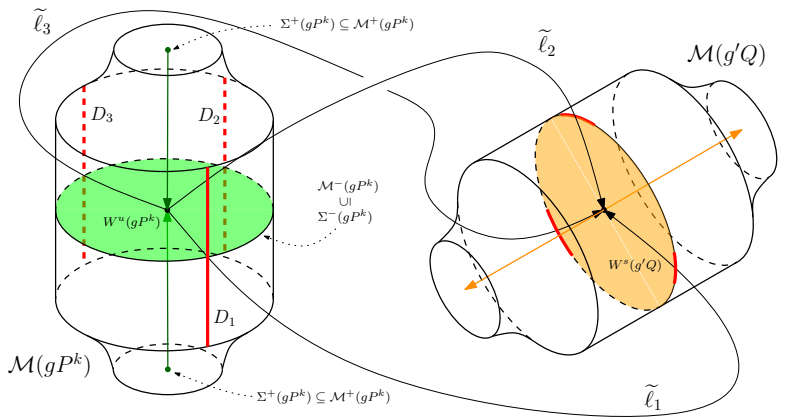
$$\sum_{g \in \pi_1 M} n_g g \mapsto \sum_{u(g) \geq -L} n_g g.$$

- $E_{jk}^{\delta(\ell)}$ est une matrice élémentaire/auto-élémentaire.

Étudions la variation de $\mathcal{L}_L(p^j, q)$ lors du passage par t_0 , où q est d'indice $i-1$, .

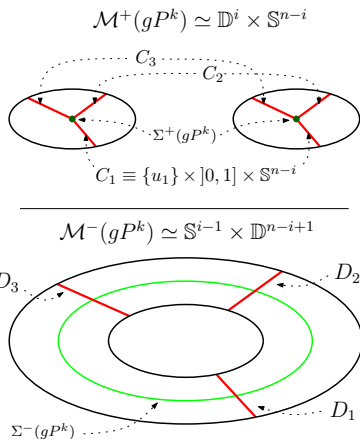
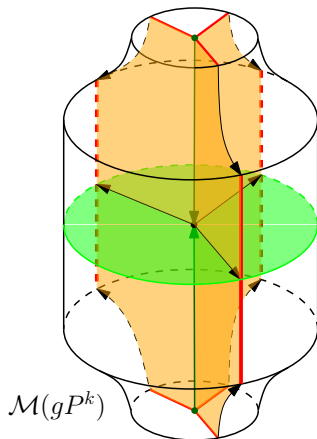
Modèles de Morse de $gP^k, g'Q$ adaptés à ξ_t

On voit $\mathcal{L}(gP^k, g'Q) = \{\tilde{\ell}_j\}_{j=1}^m$. On sait $W^s(g'Q) \simeq \mathbb{R}^{n+1-i+1}$; la trace $W^s(g'Q) \cap \mathcal{M}^-(gP^k)$ est une réunion de m disques D_j .



Trace de $W^s(g'Q)$ dans le bord supérieur $\mathcal{M}^+(gP^k)$

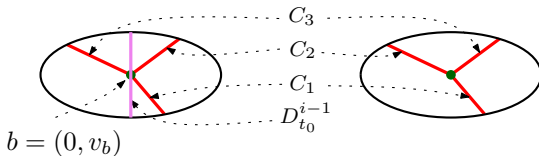
La trace de D_j dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$ est une couronne ouverte
 $C_j = \{u_j\} \times]0, 1] \times \mathbb{S}^{n-i}$.



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

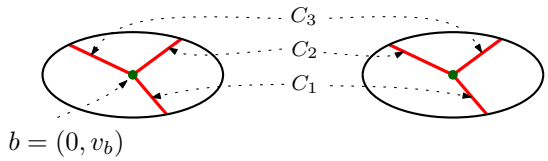
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

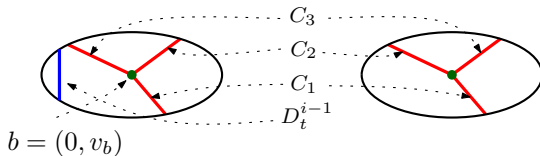
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

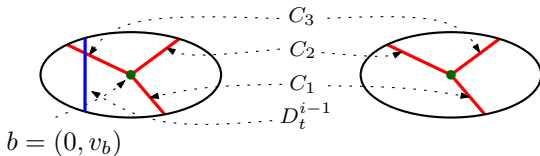
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

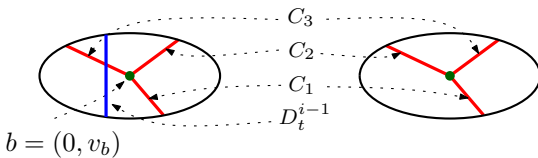
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

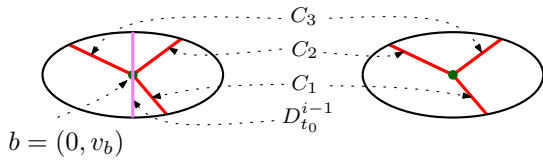
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

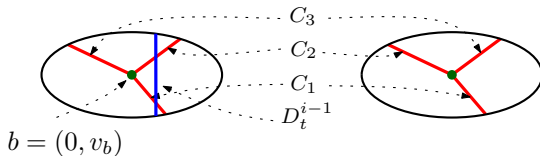
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

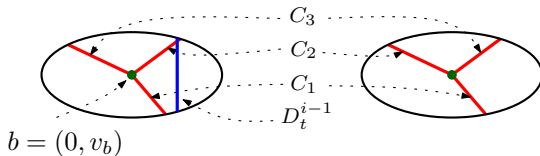
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

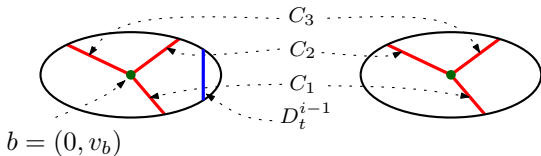
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,

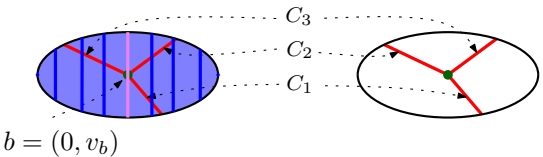


Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,

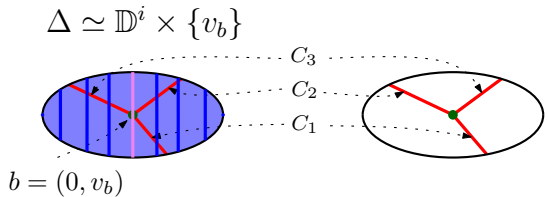
$$\Delta \simeq \mathbb{D}^i \times \{v_b\}$$



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,
- l'intersection de Δ avec la couronne C_j est l'intervalle $I_j = \{u_j\} \times]0, 1] \times \{v_b\}$.

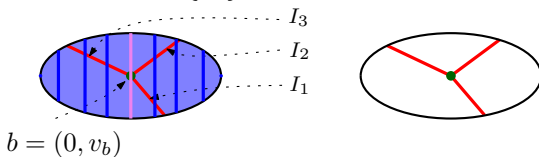


Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,
- l'intersection de Δ avec la couronne C_j est l'intervalle $I_j = \{u_j\} \times]0, 1] \times \{v_b\}$.

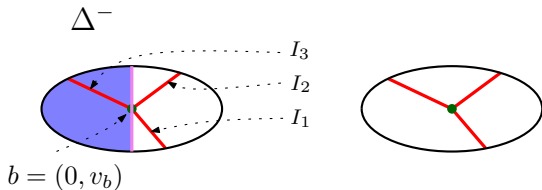
$$\Delta \simeq \mathbb{D}^i \times \{v_b\}$$



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

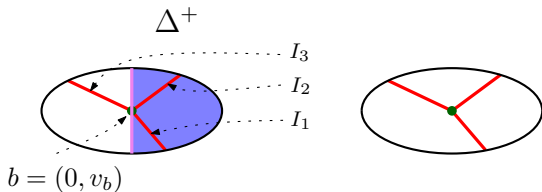
- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,
- l'intersection de Δ avec la couronne C_j est l'intervalle $I_j = \{u_j\} \times]0, 1] \times \{v_b\}$. Soit $I_j \subseteq \Delta^-$, soit $I_j \subseteq \Delta^+$.



Disque de balayage Δ : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $\mathcal{M}^+(gP^k)$

Posons $D_t^{i-1} := W^u(P_t^l) \cap \mathcal{M}^+(gP^k)$.

- Le disque $D_{t_0}^{i-1}$ coupe $\Sigma^+(gP^k)$ en un point $b = (0, v_b) \in \ell$,
- la réunion $\Delta := \bigcup_{[t^-, t^+]} D_t^{i-1}$ est un i -disque, dit de balayage,
- l'intersection de Δ avec la couronne C_j est l'intervalle $I_j = \{u_j\} \times]0, 1] \times \{v_b\}$. Soit $I_j \subseteq \Delta^-$, soit $I_j \subseteq \Delta^+$.



Effet algébrique du glissement ($k \neq l$)

La nouvelle incidence vérifie

$$\langle p', q' \rangle_L^+ = \langle p', q' \rangle_L^- + \varepsilon \operatorname{tr}_L(g \langle p^k, q' \rangle_L^-).$$

Effet algébrique du glissement ($k \neq l$)

La nouvelle incidence vérifie

$$\langle p^l, q^l \rangle_L^+ = \langle p^l, q^l \rangle_L^- + \varepsilon \operatorname{tr}_L(g \langle p^k, q^l \rangle_L^-).$$

Matriciellement nous avons :

$$A^+ = A^- + \varepsilon \operatorname{tr}_L \left(\begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ g \langle p^k, q^l \rangle_L^- & \dots & g \langle p^k, q^s \rangle_L^- \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\operatorname{tr}_L} \right\} \text{Ligne } l\text{-ème}$$

$$= \operatorname{tr}_L(E_{lk}^{\varepsilon g} A^-).$$

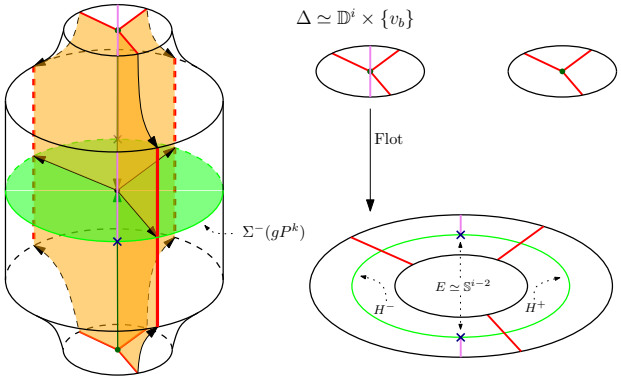
Remarque

Par $\pi_1 M$ -équivariance, $W^u(g'' P^l)$ glisse sur $W^u(g'' g P^k)$, pour tout $g'' \in \pi_1 M$.

Somme connexe plongée : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $N^-(gP^k)$

Posons $D_t^- := W^u(P_t^l) \cap N^-(gP^k)$.

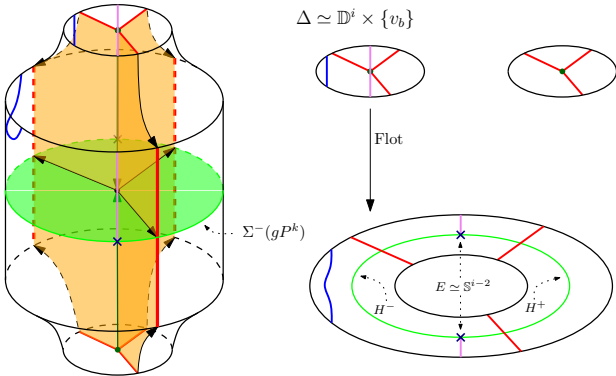
- La sphère $\Sigma^-(gP^k)$ décompose comme $H^- \sqcup E \sqcup H^+$,



Somme connexe plongée : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $N^-(gP^k)$

Posons $D_t^- := W^u(P_t^l) \cap N^-(gP^k)$.

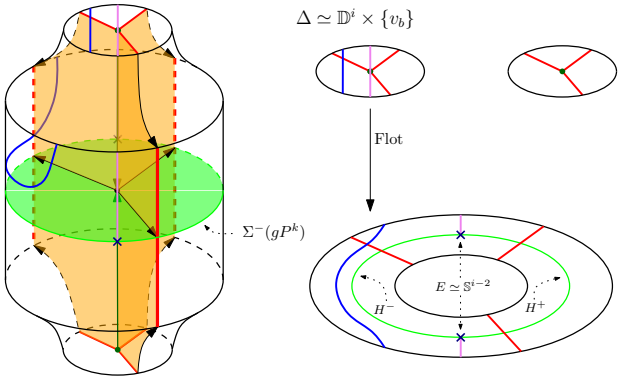
- La sphère $\Sigma^-(gP^k)$ décompose comme $H^- \sqcup E \sqcup H^+$,
- $D_{t^+}^-$ est isotope à la somme connexe $S_1 := D_{t^-}^- \#_{H^-} \Sigma^-(gP^k)$.



Somme connexe plongée : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $N^-(gP^k)$

Posons $D_t^- := W^u(P_t^l) \cap N^-(gP^k)$.

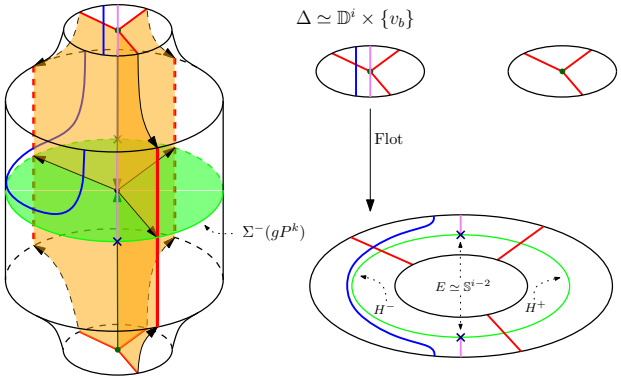
- La sphère $\Sigma^-(gP^k)$ décompose comme $H^- \sqcup E \sqcup H^+$,
- $D_{t^+}^-$ est isotope à la somme connexe $S_1 := D_{t^-}^- \#_{H^-} \Sigma^-(gP^k)$.



Somme connexe plongée : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $N^-(gP^k)$

Posons $D_t^- := W^u(P_t^l) \cap N^-(gP^k)$.

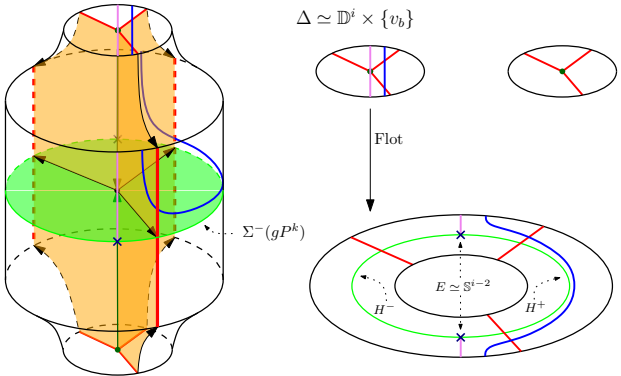
- La sphère $\Sigma^-(gP^k)$ décompose comme $H^- \sqcup E \sqcup H^+$,
- $D_{t^+}^-$ est isotope à la somme connexe $S_1 := D_{t^-}^- \#_{H^-} \Sigma^-(gP^k)$.



Somme connexe plongée : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $N^-(gP^k)$

Posons $D_t^- := W^u(P_t^l) \cap N^-(gP^k)$.

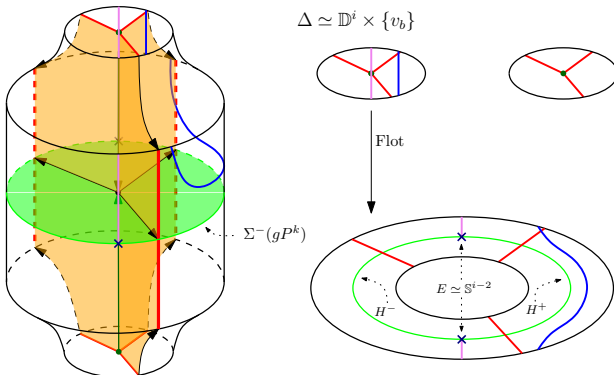
- La sphère $\Sigma^-(gP^k)$ décompose comme $H^- \sqcup E \sqcup H^+$,
- $D_{t^+}^-$ est isotope à la somme connexe $S_1 := D_{t^-}^- \#_{H^-} \Sigma^-(gP^k)$.



Somme connexe plongée : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $N^-(gP^k)$

Posons $D_t^- := W^u(P_t^l) \cap N^-(gP^k)$.

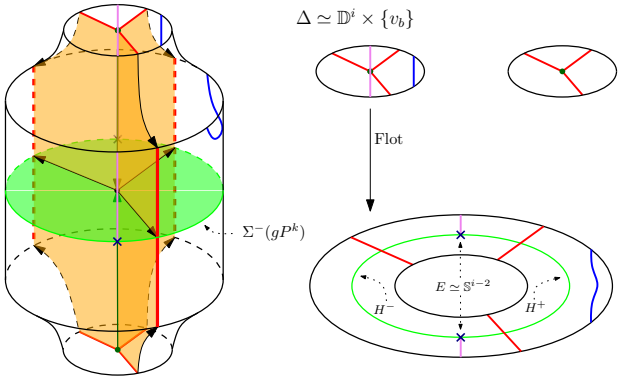
- La sphère $\Sigma^-(gP^k)$ décompose comme $H^- \sqcup E \sqcup H^+$,
- $D_{t^+}^-$ est isotope à la somme connexe $S_1 := D_{t^+}^- \#_{H^-} \Sigma^-(gP^k)$.



Somme connexe plongée : trace des $W^u(P_t^l)$ dans $N^-(gP^k)$

Posons $D_t^- := W^u(P_t^l) \cap N^-(gP^k)$.

- La sphère $\Sigma^-(gP^k)$ décompose comme $H^- \sqcup E \sqcup H^+$,
- $D_{t^+}^-$ est isotope à la somme connexe $S_1 := D_{t^-}^- \#_{H^-} \Sigma^-(gP^k)$.



Une dichotomie quand $k = l$

La liaison $g\tilde{\ell} \in \mathcal{L}(gP^k, g^2P^k)$ traverse $\Sigma^-(gP^k)$ en un point χ .
Mais $\chi \notin E$ génériquement. Nous avons deux cas :

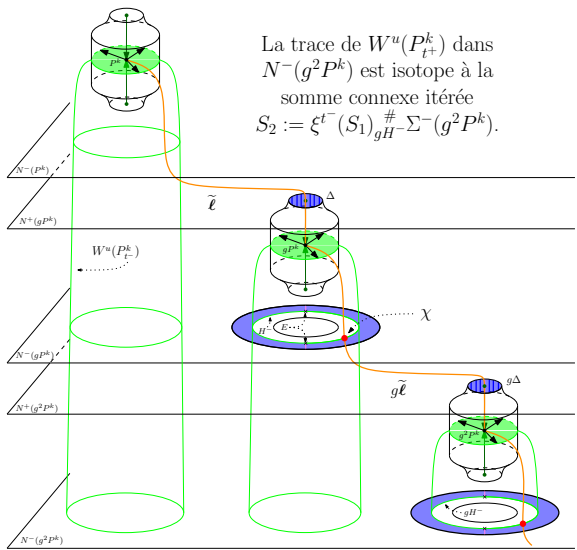
- 1 $\chi \in H^-$: l'effet du glissement de $W^u(gP^k)$ sur $W^u(g^2P^k)$ ne se répercute pas sur $W^u(P^k)$. Effet similaire au cas $k \neq l$.
- 2 $\chi \in H^+$: les liaisons entre P^k et g^2P^k se voient affectées. Mais la liaison $g^2\tilde{\ell}$ apporte aussi son effet et ainsi de suite...

L'effet algébrique du deuxième cas correspond au changement de base suivant :

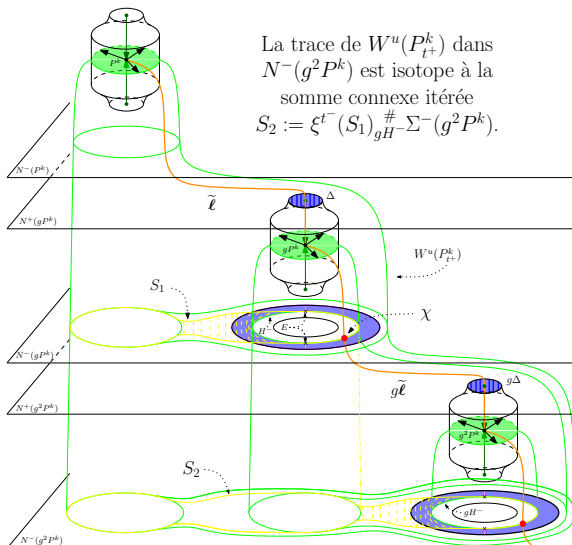
$$\begin{aligned} P^k &\mapsto P^k + \epsilon g(P^k + \epsilon g(P^k + \epsilon g(\dots = \\ &= (1 + \epsilon g + (\epsilon g)^2 + (\epsilon g)^3 + \dots)P^k = (1 + \lambda_{\epsilon g})P^k \end{aligned}$$

Trace de $W^u P^k$ en $t = t^-$. Cas $\chi \in H^+$

La trace de $W^u(P_{t^+}^k)$ dans $N^-(g^2 P^k)$ est isotope à la somme connexe itérée $S_2 := \xi^{t^-}(S_1) \#_{gH^-} \Sigma^-(g^2 P^k)$.



Trace de $W^u P^k$ en $t = t^+$. Sommes connexes itérées



La trace de $W^u(P^k_{t^+})$ dans $N^-(g^2 P^k)$ est isotope à la somme connexe itérée $S_2 := \xi^{t^-}(S_1)_{gH^-} \#_{gH^-} (g^2 P^k)$.

Effet algébrique du glissement ($\chi \in H^+$)

La nouvelle incidence vérifie

$$\langle p^k, q' \rangle_L^+ = \langle p^k, q' \rangle_L^- + \text{tr}_L(\lambda_{\varepsilon g} \langle p^k, q' \rangle_L^-).$$

Matriciellement nous avons :

$$\begin{aligned} A^+ &= A^- + \text{tr}_L \left(\begin{array}{ccc} 0 & \dots & 0 \\ \lambda_{\varepsilon g} \langle p^k, q^1 \rangle_L^- & \dots & \lambda_{\varepsilon g} \langle p^k, q^s \rangle_L^- \\ 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \} \text{Ligne } k\text{-ème} \\ &= \text{tr}_L \left(\left(\begin{array}{ccc} 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 + \lambda_{\varepsilon g} & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{array} \right) A^- \right) = \text{tr}_L(E_{kk}^{\lambda_{\varepsilon g}} A^-). \end{aligned}$$

Merci de votre attention !

Projets

Nous voulions définir $\Sigma : \pi_0(\Omega_{NS}^u) \rightarrow G$. L'application Σ se définit naturellement sur un chemin $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$ en forme normale.

Il nous faut :

- 1 trouver un candidat algébrique G :
on doit étudier les relations algébriques induites par les déformations à un paramètre d'équipements de $(\alpha_t)_{t \in [0,1]}$.
Relation imposée par les auto-glissements ?
- 2 Montrer que le candidat $\Sigma(\alpha_\bullet)$, est bien défini à homotopie près :
on doit étudier les relations algébriques induites par les singularités rencontrées par une famille à deux paramètres de 1-formes $(\alpha_{t,s})_{(t,s) \in [0,1] \times [0,1]}$.