Les groupes d'homotopie du spectre K(2)-local de Moore modulo p>3, revisités.

Olivier Lader

IRMA Strasbourg

Vendredi 26 octobre 2012

Soient n un entier naturel non nul et p un nombre premier. Soit $K(n)$ la n-ème K-théorie de Morava.

$$K(n)_* = \mathbb{F}_p[v_n^{\pm 1}]$$

Théorème (convergence chromatique)

Soit X un spectre p-local et L_nX sa localisation par rapport à la théorie d'homologie de Johnson-Wilson, alors l'application naturelle

$$X \longrightarrow \operatorname{holim} L_nX$$

est une équivalence faible.

Pullback homotopique :

$$\begin{tikzcd}
L_nX \arrow[r] \arrow[d] & L_{K(n)}X \arrow[d] \\
L_{n-1}X \arrow[r] & L_{n-1}L_{K(n)}X
\end{tikzcd}$$

Soit $V(0)$ le spectre de Moore modulo p,

$$\pi_*(L_{K(n)}V(0)) \quad \simeq \quad ?$$

Soit $V(0)$ le spectre de Moore modulo p,

$$\pi_*(L_{K(n)}V(0)) \quad \simeq \quad ?$$

- Lorsque $n = 1$, $\pi_* L_{K(1)} S^0$ est bien compris.
- Lorsque $n = 2$ et $p \geq 3$, Shimomura et ses coauteurs : $\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{BP}_*\mathrm{BP}}(\mathrm{BP}_*, v_2^{-1}\mathrm{BP}_*/(p, v_1^\infty))$.

Soit $V(0)$ le spectre de Moore modulo p,

$$\pi_*(L_{K(n)}V(0)) \quad \simeq \quad ?$$

- Lorsque $n=1$, $\pi_* L_{K(1)} S^0$ est bien compris.
- Lorsque $n=2$ et $p \geq 3$, Shimomura et ses coauteurs : $\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{BP}_*\mathrm{BP}}(\mathrm{BP}_*, v_2^{-1}\mathrm{BP}_*/(p, v_1^\infty))$.

Suite spectrale d'Adams-Novikov :

$$E_2^{s,t} := H^s(\mathbb{G}_n, (E_n)_t/(p)) \Rightarrow \pi_{t-s} L_{K(n)} V(0)$$

Soit $V(0)$ le spectre de Moore modulo p,

$$\pi_*(L_{K(n)}V(0)) \quad \simeq \quad ?$$

- Lorsque $n = 1$, $\pi_* L_{K(1)} S^0$ est bien compris.
- Lorsque $n = 2$ et $p \geq 3$, Shimomura et ses coauteurs : $\mathrm{Ext}^*_{\mathrm{BP}_*\mathrm{BP}}(\mathrm{BP}_*, v_2^{-1}\mathrm{BP}_*/(p, v_1^\infty))$.

Suite spectrale d'Adams-Novikov :

$$E_2^{s,t} := H^s(\mathbb{G}_n, (E_n)_t/(p)) \Rightarrow \pi_{t-s} L_{K(n)} V(0)$$

Lorsque $n = 2$:

- $p = 3$, P. Goerss, H-W. Henn, M. Mahowald et C. Rezk en 2005 donnent l'existence d'une résolution projective. H-W. Henn, N. Karamanov et M. Mahowald en 2008, déterminent les groupes d'homotopie en utilisant la résolution précédente.
- $p > 3$, H-W. Henn démontre l'existence d'une résolution projective constituée de modules de permutation en 2007.

Nous supposons que $p > 3$,

Proposition

La suite spectrale

$$E_2^{s,t} := H^s(\mathbb{G}_2, (E_2)_t/(p)) \Rightarrow \pi_{t-s} L_{K(2)} V(0)$$

n'a pas de différentielles ni extensions.

- Pour que $E_2^{s,t}$ soit non nul, il faut que t soit un multiple de $2(p-1)$.
- Le p-Sylow du groupe stabilisateur de Morava $\mathbb{G}_2$ est un groupe à dualité de Poincaré de dimension 4 (Ce n'est pas le cas lorsque $p = 3$). Les groupes de cohomologie non nuls de la page E_2 sont concentrés sur les 4 premières lignes ($s = 0, 1, 2, 3$).

Nous supposons que $p > 3$,

Proposition

La suite spectrale

$$E_2^{s,t} := H^s(\mathbb{G}_2, (E_2)_t/(p)) \Rightarrow \pi_{t-s} L_{K(2)} V(0)$$

n'a pas de différentielles ni extensions.

- Pour que $E_2^{s,t}$ soit non nul, il faut que t soit un multiple de $2(p-1)$.
- Le p-Sylow du groupe stabilisateur de Morava $\mathbb{G}_2$ est un groupe à dualité de Poincaré de dimension 4 (Ce n'est pas le cas lorsque $p = 3$). Les groupes de cohomologie non nuls de la page E_2 sont concentrés sur les 4 premières lignes ($s = 0, 1, 2, 3$).

- $\exists \mathbb{G}_2^1 \triangleleft \mathbb{G}_2 : \quad \mathbb{G}_2 \simeq \mathbb{G}_2^1 \times \mathbb{Z}_p$

Théorème (Isomorphisme de Künneth)

Il existe une classe $\zeta \in H^1(\mathbb{G}_2, (E_2)_*/(p))$ telle que le produit extérieur

$$H^*(\mathbb{G}_2^1, ((E_2)_*/(p)) \otimes \Lambda_{\mathbb{Z}_p}\zeta \longrightarrow H^*(\mathbb{G}_2, (E_2)_*/(p))$$

induit un isomorphisme.

Loi de groupe formel de Honda

Théorème-définition

Soit $\Gamma_2(x, y)$ la *loi de groupe formel p-typique de Honda* sur $\mathbb{F}_{p^2}$ caractérisée par

$$[p]_{\Gamma_2}(x) := x \underset{\Gamma_2}{+} \ldots \underset{\Gamma_2}{+} x = x^{p^2}$$

Tout endomorphisme $f(x)$ de Γ_2 peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$f(x) = \sum_{i \geq 0}^{\Gamma_2} a_i x^{p^i}$$

Loi de groupe formel de Honda

Théorème-définition

Soit $\Gamma_2(x, y)$ la *loi de groupe formel p-typique de Honda* sur $\mathbb{F}_{p^2}$ caractérisée par

$$[p]_{\Gamma_2}(x) := x \underset{\Gamma_2}{+} \ldots \underset{\Gamma_2}{+} x = x^{p^2}$$

Tout endomorphisme $f(x)$ de Γ_2 peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$f(x) = \sum_{i \geq 0}^{\Gamma_2} a_i x^{p^i}$$

On pose $\mathbb{W} := \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^2})$ l'anneau de Witt au-dessus de $\mathbb{F}_{p^2}$ et pour tout $a \in \mathbb{W}$, a^σ l'image par l'automorphisme de Frobenius ($a^\sigma \equiv a^p$ $[p]$).

Loi de groupe formel de Honda

Théorème-définition

Soit $\Gamma_2(x,y)$ la *loi de groupe formel p-typique de Honda* sur $\mathbb{F}_{p^2}$ caractérisée par

$$[p]_{\Gamma_2}(x) := x \underset{\Gamma_2}{+} \dots \underset{\Gamma_2}{+} x = x^{p^2}$$

Tout endomorphisme $f(x)$ de Γ_2 peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$f(x) = \sum_{i \geq 0}^{\Gamma_2} a_i x^{p^i}$$

On pose $\mathbb{W} := \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^2})$ l'anneau de Witt au-dessus de $\mathbb{F}_{p^2}$ et pour tout $a \in \mathbb{W}$, a^σ l'image par l'automorphisme de Frobenius ($a^\sigma \equiv a^p\ [p]$).

Théorème (Dieudonné-Lubin)

L'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{End}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\Gamma_2), \underset{\Gamma_2}{+}, \circ) & \longrightarrow & \mathcal{O}_2 := \mathbb{W}\langle S\rangle/(S^2 = p, Sa = a^\sigma S) \\ x^p & & S \end{array}$$

est un isomorphisme continue de $\mathbb{Z}_p$-algèbres.

Loi de groupe formel de Honda

Théorème-définition

Soit $\Gamma_2(x,y)$ la *loi de groupe formel p-typique de Honda* sur $\mathbb{F}_{p^2}$ caractérisée par

$$[p]_{\Gamma_2}(x) := x \underset{\Gamma_2}{+} \dots \underset{\Gamma_2}{+} x = x^{p^2}$$

Tout endomorphisme $f(x)$ de Γ_2 peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$f(x) = \sum_{i \geq 0}^{\Gamma_2} a_i x^{p^i}$$

On pose $\mathbb{W} := \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^2})$ l'anneau de Witt au-dessus de $\mathbb{F}_{p^2}$ et pour tout $a \in \mathbb{W}$, a^σ l'image par l'automorphisme de Frobenius ($a^\sigma \equiv a^p$ $[p]$).

Théorème (Dieudonné-Lubin)

L'homomorphisme

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{End}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\Gamma_2), \underset{\Gamma_2}{+}, \circ) & \longrightarrow & \mathcal{O}_2 := \mathbb{W}\langle S \rangle / (S^2 = p, Sa = a^\sigma S) \\ x^p & & S \end{array}$$

est un isomorphisme continue de $\mathbb{Z}_p$-algèbres.

$$\sum_{i \geq 0}^{\Gamma_2} a_i x^{p^i} \quad \mapsto \quad \sum_{i \geq 0} \tilde{a}_i S^i$$

Groupes de Morava

Définition

- $\mathbb{S}_2 := \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\Gamma_2) \simeq \mathcal{O}_2^\times$ le **groupe stabilisateur classique de Morava**.
- $\mathbb{G}_2 := \mathbb{S}_2 \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_p)$ le **groupe stabilisateur de Morava**.
- $C_{p^2-1} := \{\, x \in \mathbb{W}^\times :\ x^{p^2-1} = 1 \,\} = \langle \omega \rangle$.
- $F := C_{p^2-1} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_p)$.

Groupes de Morava

Définition

- $\mathbb{S}_2 := \mathrm{Aut}_{\mathbb{F}_{p^2}}(\Gamma_2) \simeq \mathcal{O}_2^\times$ le **groupe stabilisateur classique de Morava**.
- $\mathbb{G}_2 := \mathbb{S}_2 \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_p)$ le **groupe stabilisateur de Morava**.
- $C_{p^2-1} := \{\, x \in \mathbb{W}^\times :\ x^{p^2-1} = 1 \,\} = \langle \omega \rangle$.
- $F := C_{p^2-1} \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_p)$.

Le déterminant réduit $\mathbb{G}_2 \to \mathbb{Z}_p^\times/\mu_{p-1}$ est un homomorphisme qui envoie (x, σ^i) sur $[\det(.x)]$

Définition

- $\mathbb{G}_2^1$ le noyau du déterminant réduit et $\mathbb{S}_2^1 = \mathbb{G}_2^1 \cap \mathbb{S}_2$.
- $S_2^1 := \{ g = g_0 + g_1 S + \ldots \in \mathbb{S}_2^1;\ g \equiv 1 \bmod (S) \}$
- $F_{i/2} S_2^1 := \{ g \in S_2^1;\ g \equiv 1 \bmod (S^i) \}$

Lemme

$$\mathbb{G}_2^1 \simeq S_2^1 \rtimes F$$

M. Lazard, *Groupes p-adiques analytiques*. Inst. Hautes Etudes Sc. Publ. Math. **26** (1965), 389-603.

M. Lazard, *Groupes p-adiques analytiques*. Inst. Hautes Etudes Sc. Publ. Math. **26** (1965), 389-603.

- S_2^1 est un pro-p-groupe p-valué de rang 3.

M. Lazard, *Groupes p-adiques analytiques*. Inst. Hautes Etudes Sc. Publ. Math. **26** (1965), 389-603.

- S_2^1 est un pro-p-groupe p-valué de rang 3.
- $\mathbb{Z}_p[[S_2^1]]$ est un anneau local complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.

M. Lazard, *Groupes p-adiques analytiques*. Inst. Hautes Etudes Sc. Publ. Math. **26** (1965), 389-603.

- S_2^1 est un pro-p-groupe p-valué de rang 3.
- $\mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!]$ est un anneau local complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.
- Pour tout $x \in \mathbb{W}$, on définit :

$$a(x) := (1 - x^{\sigma+1}p)^{-1/2}(1 + xS) \in S_2^1$$

alors,

$$a(x) \equiv 1 + xS + \frac{x^{\sigma+1}}{2}S^2 \mod (S^3)$$

- Soient $\epsilon_\pm := \omega \pm \omega^p \in \mathbb{W}$ et

$$a_0 := a(\epsilon_+), \quad b_0 := a(\epsilon_-) \quad \text{et} \quad c_0 = [a_0, b_0]$$

- (a_0, b_0, c_0) est une base ordonnée de S_2^1.

M. Lazard, *Groupes p-adiques analytiques*. Inst. Hautes Etudes Sc. Publ. Math. **26** (1965), 389-603.

- S_2^1 est un pro-p-groupe p-valué de rang 3.
- $\mathbb{Z}_p[[S_2^1]]$ est un anneau local complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique.
- Pour tout $x \in \mathbb{W}$, on définit :

$$a(x) := (1 - x^{\sigma+1}p)^{-1/2}(1 + xS) \in S_2^1$$

alors,

$$a(x) \equiv 1 + xS + \frac{x^{\sigma+1}}{2}S^2 \mod (S^3)$$

- Soient $\epsilon_\pm := \omega \pm \omega^p \in \mathbb{W}$ et

$$a_0 := a(\epsilon_+), \quad b_0 := a(\epsilon_-) \quad \text{et} \quad c_0 = [a_0, b_0]$$

- (a_0, b_0, c_0) est une base ordonnée de S_2^1.

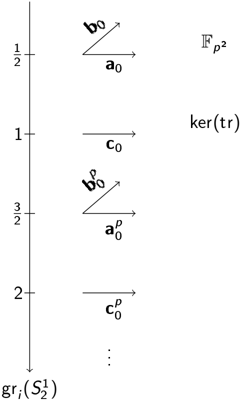


Figure: Gradué de S_2^1

Proposition

Soient $i, j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$, si i n'est pas entier alors, l'homomorphisme

$$\mathrm{gr}_i\, S_2^1 \otimes \mathrm{gr}_j\, S_2^1 \longrightarrow \mathrm{gr}_{i+j}\, S_2^1$$

qui envoie $a \otimes b$ sur $ab^{p^{2i}} - a^{p^{2j}}b$, induit par le commutateur, est surjectif.

Proposition

Soient $i, j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$, si i n'est pas entier alors, l'homomorphisme

$$\mathrm{gr}_i\, S_2^1 \otimes \mathrm{gr}_j\, S_2^1 \longrightarrow \mathrm{gr}_{i+j}\, S_2^1$$

qui envoie $a \otimes b$ sur $ab^{p^{2i}} - a^{p^{2j}}b$, induit par le commutateur, est surjectif.

$$0 \longrightarrow (IF_{i/2}S_2^1) \to \mathbb{Z}_p[\![F_{i/2}S_2^1]\!] \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

Proposition

Soient $i, j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$, si i n'est pas entier alors, l'homomorphisme

$$\operatorname{gr}_i S_2^1 \otimes \operatorname{gr}_j S_2^1 \longrightarrow \operatorname{gr}_{i+j} S_2^1$$

qui envoie $a \otimes b$ sur $ab^{p^{2i}} - a^{p^{2j}} b$, induit par le commutateur, est surjectif.

$$0 \longrightarrow (IF_{i/2} S_2^1) \to \mathbb{Z}_p[\![F_{i/2} S_2^1]\!] \to \mathbb{Z}_p \to 0$$

Corollaire

1. *Soit $i \geq 1$, alors*
$$(IF_{i/2} S_2^1) \subset (IS_2^1)^i$$
2. *Soit i un entier naturel non nul, alors*
$$\overline{[F_{i/2} S_2^1, F_{i/2} S_2^1]} = \begin{cases} F_i S_2^1 & \text{si } i \text{ est impair} \\ F_{i+1/2} S_2^1 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. *Soient $i, j \in \frac{1}{2}\mathbb{N}^*$. Si i n'est pas un entier, alors*
$$(IF_{i+j} S_2^1) \subseteq (IF_i S_2^1)(IF_j S_2^1) + (IF_j S_2^1)(IF_i S_2^1)$$

$$H_1(S_2^1, \mathbb{Z}_p) \simeq S_2^1 / \overline{[S_2^1, S_2^1]} \simeq \mathbb{Z}/(p)\overline{a}_0 \oplus \mathbb{Z}/(p)\overline{b}_0 \qquad H_1(F_1 S_2^1, \mathbb{Z}_p) \simeq \mathbb{Z}/(p^2)\overline{c}_0 \oplus \mathbb{Z}/(p)\overline{a}_0^p \oplus \mathbb{Z}/(p)\overline{b}_0^p$$

Déformations de loi de groupe formel

- (k, Γ) : k corps de caractéristique p et $\Gamma(x, y)$ loi de groupe formel sur k.

Déformations de loi de groupe formel

- (k, Γ) : k corps de caractéristique p et $\Gamma(x, y)$ loi de groupe formel sur k.
- Une **déformation** de (k, Γ) vers un anneau local complet séparé B (de projection $\pi : B \to B/\mathfrak{m}$) est une paire (G, i) où G est une loi de groupe formel sur B et $i : k \to B/\mathfrak{m}$ un homomorphisme de corps vérifiant : $i_*\Gamma = \pi_* G$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{FGL}(B) \arrow[d, "\pi_*"] \\ \mathcal{FGL}(k) \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{FGL}(B/_{\mathfrak{m}}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G(x,y) \arrow[d] \\ \Gamma(x,y) \arrow[r] & i_*\Gamma(x,y) = \pi_* G(x,y) \end{tikzcd}$$

- Un morphisme de déformations $(G_1, i_1) \longrightarrow (G_2, i_2)$ est défini seulement si $i_{1*}\Gamma = i_{2*}\Gamma$, et dans ce cas c'est la donné d'un isomorphisme $f : G_1 \to G_2$ de lois de groupe formel tel que

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly, "\pi_*"] & G_2 \arrow[d, squiggly, "\pi_*"] \\ i_{1*}\Gamma \arrow[r, "x"] & i_{2*}\Gamma \end{tikzcd}$$

On appelle un tel f un $\star$-**isomorphisme**.

Déformations de loi de groupe formel

- (k, Γ) : k corps de caractéristique p et $\Gamma(x, y)$ loi de groupe formel sur k.
- Une **déformation** de (k, Γ) vers un anneau local complet séparé B (de projection $\pi : B \to B/\mathfrak{m}$) est une paire (G, i) où G est une loi de groupe formel sur B et $i : k \to B/\mathfrak{m}$ un homomorphisme de corps vérifiant : $i_*\Gamma = \pi_* G$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{FGL}(B) \arrow[d, "\pi_*"] \\ \mathcal{FGL}(k) \arrow[r, "i_*"] & \mathcal{FGL}(B/_{\mathfrak{m}}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G(x,y) \arrow[d] \\ \Gamma(x,y) \arrow[r] & i_*\Gamma(x,y) = \pi_* G(x,y) \end{tikzcd}$$

- Un morphisme de déformations $(G_1, i_1) \longrightarrow (G_2, i_2)$ est défini seulement si $i_{1*}\Gamma = i_{2*}\Gamma$, et dans ce cas c'est la donné d'un isomorphisme $f : G_1 \to G_2$ de lois de groupe formel tel que

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, squiggly, "\pi_*"] & G_2 \arrow[d, squiggly, "\pi_*"] \\ i_{1*}\Gamma \arrow[r, "x"] & i_{2*}\Gamma \end{tikzcd}$$

  On appelle un tel f un **$\star$-isomorphisme**.
- On note $\mathrm{Def}_\Gamma(B)$ la catégorie des déformations de Γ vers B.

Théorème de Lubin-Tate

($\mathbb{W} := \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^2})$ anneau de Witt qui est local complet de corps résiduel $\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{W}/_{(p)}$)

Théorème (Lubin-Tate, 1966)

Il existe une déformation universelle G_2 sur $(E_2)_0 = \mathbb{W}[[u_1]]$ telle que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}_{\mathcal{LCS}(\mathbb{F}_{p^2})}}(\,(E_2)_0,\ B\,) & \longrightarrow & \pi_0(\mathrm{Def}_{\Gamma_2}(B)) \\ \phi & \longmapsto & [\phi_* G_2,\ \bar{\phi}] \end{array}$$

est une bijection et pour toute déformation (G,i), $\pi_1(\mathrm{Def}_{\Gamma_2}(B),(G,i)) = \{1\}$. De plus,

$$[p]_{G_2}(x) = px \underset{G_2}{+} u_1 x^p \underset{G_2}{+} x^{p^2}$$

Théorème de Lubin-Tate

($\mathbb{W} := \mathbb{W}(\mathbb{F}_{p^2})$ anneau de Witt qui est local complet de corps résiduel $\mathbb{F}_{p^2} = \mathbb{W}/_{(p)}$)

Théorème (Lubin-Tate, 1966)

Il existe une déformation universelle G_2 sur $(E_2)_0 = \mathbb{W}[[u_1]]$ telle que l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}_{\mathcal{LCS}(\mathbb{F}_{p^2})}}(\,(E_2)_0,\ B\,) & \longrightarrow & \pi_0(\mathrm{Def}_{\Gamma_2}(B)) \\ \phi & \longmapsto & [\phi_* G_2,\ \bar{\phi}] \end{array}$$

est une bijection et pour toute déformation (G,i), $\pi_1(\mathrm{Def}_{\Gamma_2}(B),(G,i)) = \{1\}$. *De plus,*

$$[p]_{G_2}(x) = px \underset{G_2}{+} u_1 x^p \underset{G_2}{+} x^{p^2}$$

Definition

On pose $(E_2)_* := \mathbb{W}[[u_1]][u^{\pm 1}]$, avec $|u_1| = 0$, $|u| = -2$, l'**anneau gradué de Lubin-Tate**.

L'anneau gradué de Lubin-Tate représente une catégorie de déformations plus riche : $\mathrm{Def}^*_\Gamma(B)$

- Un objet de $\mathrm{Def}^*_\Gamma(B)$ est un triplet (G,i,u), où (G,i) est une déformation et u est une unité de B.
- Un $\star$-isomorphisme ϕ de (G,i,u) vers (H,j,v) est un $\star$-isomorphisme de (G,i) vers (H,j) tel que

$$\phi'(0)v = u$$

$$\mathbb{S}_2 = (\mathbb{W}\langle S\rangle / (S^2 = p, Sa = a^\sigma S))^\times, \qquad (E_2)_* = \mathbb{W}[[u_1]][u^{\pm 1}]$$

$$\mathbb{S}_2 = (\mathbb{W}\langle S\rangle/(S^2 = p, Sa = a^\sigma S))^\times, \qquad (E_2)_* = \mathbb{W}[[u_1]][u^{\pm 1}]$$

Soit $g \in \mathbb{S}_2$,

$$h_g(x) = \sum_{i\geq 0}^{G_2} t_i(g) x^{p^i} : \quad \begin{tikzcd} g_* G_2 \arrow[r, "e_g"] \arrow[d, squiggly] & G_2^{\tilde{g}} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, squiggly] & G_2 \arrow[d, squiggly, "\mathrm{mod}\,(p,u_1)"] \\ \Gamma_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \Gamma_2 \arrow[r, "g"] & \Gamma_2 \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \quad h_g([p]_{g_* G}\, x) = [p]_G(h_g x)$$

$$([p]_{G_2}(x) = px \underset{G_2}{+} u_1 x^p \underset{G_2}{+} x^{p^2})$$

$$\mathbb{S}_2 = (\mathbb{W}\langle S\rangle/(S^2 = p, Sa = a^\sigma S))^\times, \qquad (E_2)_* = \mathbb{W}[[u_1]][u^{\pm 1}]$$

Soit $g \in \mathbb{S}_2$,

$$h_g(x) = \sum_{i\geq 0}^{G_2} t_i(g)x^{p^i} : \quad \begin{tikzcd} g_* G_2 \arrow[r, "e_g"] \arrow[d, squiggly] & G_2^{\tilde{g}} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, squiggly] & G_2 \arrow[d, squiggly, "\mathrm{mod}\,(p,u_1)"] \\ \Gamma_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \Gamma_2 \arrow[r, "g"] & \Gamma_2 \end{tikzcd} \qquad \Rightarrow \quad h_g([p]_{g_* G}\, x) = [p]_G(h_g x)$$

$$([p]_{G_2}(x) = px \underset{G_2}{+} u_1 x^p \underset{G_2}{+} x^{p^2})$$

Lemme

$$\begin{aligned} g_* u_1 &= t_0^{p-1}(g)u_1 + (p - p^p)t_0^{-1}(g)t_1(g) \\ g_* u &:= h_g'(0)u = t_0(g)u \end{aligned}$$

- Soit σ le générateur de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^2}, \mathbb{F}_p)$, alors quel que soit x dans $\mathbb{W}$,

$$\sigma_* u = u, \quad \sigma_* u_1 = u_1 \quad \text{et} \quad \sigma_* x = x^\sigma$$

- Pour tout $g \in C_{p^2-1}$:

$$g_* u_1 = g^{p-1}\, u_1 \quad \text{et} \quad g_* u = g\, u$$

- Pour tout g dans $\mathbb{Z}_p^\times = Z(\mathbb{G}_2)$,

$$g_* u_1 = u_1 \quad \text{et} \quad g_* u = gu$$

La loi de groupe formel G_2

Soit $\log(x)$ (resp. $\exp(x)$) le logarithme (resp. l' exponentielle) de $\mathbb{Q} \otimes G_2(x, y)$. D'après les **relations de Araki**, on a

$$\log(x) \equiv x + \lambda_1 x^p + \lambda_2 x^{p^2} \equiv x + \frac{u_1}{p - p^p} x^p + \frac{1}{p - p^{p^2}} \left(1 + \frac{u_1^{p+1}}{p - p^p} \right) x^{p^2} \mod (x)^{p^3}$$

La loi de groupe formel G_2

Soit $\log(x)$ (resp. $\exp(x)$) le logarithme (resp. l' exponentielle) de $\mathbb{Q} \otimes G_2(x,y)$. D'après les **relations de Araki**, on a

$$\log(x) \equiv x + \lambda_1 x^p + \lambda_2 x^{p^2} \equiv x + \frac{u_1}{p - p^p} x^p + \frac{1}{p - p^{p^2}} \left(1 + \frac{u_1^{p+1}}{p - p^p} \right) x^{p^2} \mod (x)^{p^3}$$

Une application de la série de Bürmann-Lagrange :

Lemme

$$\exp(x) \equiv x - \lambda_1 x^p f(\lambda_1 x^{p-1}) - \lambda_2 x^{p^2} \mod (x^{p^2+1})$$

où

$$f(x) = \sum_{n=0}^{p+1} \frac{(-1)^n}{n+1} \binom{p(n+1)}{n} x^n$$

Proposition

Il existe $P_{p+i(p-1)}(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ homogène de degré $p + i(p-1)$, telle que

$$G_2(x,y) \equiv x + y - \frac{1}{1 - p^{p-1}} u_1 C_p(x,y) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_1^{i+1} P_{p+i(p-1)}(x,y) - p\lambda_2 C_{p^2}(x,y)$$

modulo $(x,y)^{p^2+1}$.

$$h_g([p]_{g_* G}\, x) = [p]_G(h_g x)$$

$$h_g([p]_{g_*G}\, x) = [p]_G(h_g x)$$

Proposition (cf. [HKM] 4.3)

Soient $g \in \mathbb{S}_2$. *Modulo* (p),

a) $g_* u_1 = t_0^{p-1} u_1$

b) $t_0 + t_0^{p(p-1)} t_1 u_1^p = u_1 t_1^p + t_0^{p^2}$

c) $t_1 \equiv t_1^{p^2} + t_2^p u_1 - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} u_1^{i+1} t_1^{pi} t_0^{p^2(p-i)} \mod (u_1^{p+1})$

Corollaire (cf. [HKM] 4.5)

Si $g \equiv 1 + g_1 S + g_2 S^2 \mod [S^3]$,

$$t_0(g) \equiv 1 + g_1^p u_1 - g_1 u_1^p + (g_2 - g_2^p) u_1^{p+1} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} g_1^{pi} u_1^{p+1+i} + g_1^2 u_1^{2p} \mod (u_1^{2p+1})$$

$$h_g([p]_{g_* G}\, x) = [p]_G(h_g x)$$

Proposition (cf. [HKM] 4.3)

Soient $g \in \mathbb{S}_2$. *Modulo* (p),

a) $g_* u_1 = t_0^{p-1} u_1$

b) $t_0 + t_0^{p(p-1)} t_1 u_1^p = u_1 t_1^p + t_0^{p^2}$

c) $t_1 \equiv t_1^{p^2} + t_2^p u_1 - \sum_{i=0}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} u_1^{i+1} t_1^{pi} t_0^{p^2(p-i)} \mod (u_1^{p+1})$

Corollaire (cf. [HKM] 4.5)

Si $g \equiv 1 + g_1 S + g_2 S^2 \mod [S^3]$,

$$t_0(g) \equiv 1 + g_1^p u_1 - g_1 u_1^p + (g_2 - g_2^p) u_1^{p+1} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{p}\binom{p}{i} g_1^{pi} u_1^{p+1+i} + g_1^2 u_1^{2p} \mod (u_1^{2p+1})$$

Pour tout $g \in F_1 S_2^1$,

$$(g-1)_* u \equiv (g-1)_* u_1 \equiv 0 \mod (u_1^{p+1})$$

Puissance de t_0

$$g_* u^i = (g_* u)^i = t_0(g)^i u^i$$
$$g_* u_1^i \equiv t_0(g)^{(p-1)i} u_1^i \mod (p)$$

Puissance de t_0

$$g_* u^i = (g_* u)^i = t_0(g)^i u^i$$
$$g_* u_1^i \equiv t_0(g)^{(p-1)i} u_1^i \mod (p)$$

Proposition

Soit x un élément d'un anneau topologique séparé tel que les puissances $(x-1)^k$ tendent vers zéro lorsque k tend vers l'infini. Alors x est une unité et la fonction puissance associée admet un développement en série de Taylor, i.e : quel que soit l'entier relatif n, on a :

$$x^n = \sum_{k \geq 0} \binom{n}{k} (x-1)^k$$

Lemme

Soient $x \in \mathbb{W}$ et k un entier, notons g l'élément $a(x)$ de S_2^1, alors

a) $t_0(g^k) \equiv 1 + kx^p u_1 - kx u_1^p \mod (u_1^{p+2})$

b) $t_0(g)^k \equiv (1 + x^p u_1)^k - kx u_1^p - k(k-1)x^{p+1} u_1^{p+1} \mod (u_1^{p+2})$

Définition

On pose $\Lambda_i = \mathbb{W}$ muni de la structure de F-module suivante :

$$\forall x \in \Lambda_i, \qquad \omega_* x = \omega^i x \quad \text{et} \quad \sigma_* x = x^\sigma$$

Définition

On pose $\Lambda_i = \mathbb{W}$ muni de la structure de F-module suivante :

$$\forall x \in \Lambda_i, \qquad \omega_* x = \omega^i x \quad \text{et} \quad \sigma_* x = x^\sigma$$

- Λ_i est libre de rang deux en tant que $\mathbb{Z}_p$-module.
- $\Lambda_i \simeq \mathbb{W}u^i \subset (E_2)_*$.
- Λ_{1-p} est cyclique.

Définition

On pose $\Lambda_i = \mathbb{W}$ muni de la structure de F-module suivante :

$$\forall x \in \Lambda_i, \qquad \omega_* x = \omega^i x \quad \text{et} \quad \sigma_* x = x^\sigma$$

- Λ_i est libre de rang deux en tant que $\mathbb{Z}_p$-module.
- $\Lambda_i \simeq \mathbb{W}u^i \subset (E_2)_*$.
- Λ_{1-p} est cyclique.

Théorème ([Hen07], théorème 6)

Il existe une résolution projective de $\mathbb{Z}_p$ au dessus de $\mathbb{G}_2^1$ de la forme suivante :

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

où $C_0 = C_3 = \mathbb{Z}_p\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$ *et* $C_1 = C_2 = \Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$.

Définition

On pose $\Lambda_i = \mathbb{W}$ muni de la structure de F-module suivante :

$$\forall x \in \Lambda_i, \qquad \omega_* x = \omega^i x \quad \text{et} \quad \sigma_* x = x^\sigma$$

- Λ_i est libre de rang deux en tant que $\mathbb{Z}_p$-module.
- $\Lambda_i \simeq \mathbb{W}u^i \subset (E_2)_*$.
- Λ_{1-p} est cyclique.

Théorème ([Hen07], théorème 6)

Il existe une résolution projective de $\mathbb{Z}_p$ au dessus de $\mathbb{G}_2^1$ de la forme suivante :

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

où $C_0 = C_3 = \mathbb{Z}_p\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$ et $C_1 = C_2 = \Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$.

- La preuve ne donne pas de construction explicite de ∂_3 et ∂_2.
- Comme $\mathbb{G}_2^1 \simeq S_2^1 \rtimes F$, en tant que S_2^1-modules,

$$\mathbb{Z}_p\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1} \simeq \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!] \underset{F}{\otimes} \mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!] \quad \text{et} \quad \Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1} \simeq \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!] \underset{F}{\otimes} \Lambda_{1-p} \simeq \mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!]^{\oplus 2}$$

- $H_*(S_2^1, \mathbb{Z}_p) \simeq (\mathbb{Z}_p, \Lambda_{1-p} \otimes \mathbb{F}_p,\ 0,\ \mathbb{Z}_p\ , 0, \dots)$ $\qquad H_*(F_1S_2^1, \mathbb{Z}_p) \simeq (\mathbb{Z}_p, F_1S_2^1/F_{5/2}S_2^1,\ 0,\ \mathbb{Z}_p\ , 0, \dots)$

Critère de surjectivité

Lemme (de type Nakayama)

Soient G un pro-p-fini finiment engendré et K un $\mathbb{Z}_p[\![G]\!]$-module complet de type fini tel que $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}_p[\![G]\!]}(\mathbb{F}_p, K) = \mathbb{F}_p \otimes_G K$ est trivial alors K est trivial.

Critère de surjectivité

Lemme (de type Nakayama)

Soient G un pro-p-fini finiment engendré et K un $\mathbb{Z}_p[\![G]\!]$-module complet de type fini tel que $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}_p[\![G]\!]}(\mathbb{F}_p, K) = \mathbb{F}_p \otimes_G K$ est trivial alors K est trivial.

Corollaire ([GHMR05], lemme 4.3)

Soit G une pro-p-groupe finiment engendré et $f : M \to N$ un homomorphisme de $\mathbb{Z}_p[\![G]\!]$-modules complets.

- *Si*
$$\mathbb{F}_p \otimes f : \mathbb{F}_p \otimes_G M \to \mathbb{F}_p \otimes_G N$$
est surjectif alors f est surjectif.
- *Si*
$$\mathrm{Tor}_q(\mathbb{F}_p, f) : \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}_p[\![G]\!]}(\mathbb{F}_p, M) \to \mathrm{Tor}_q^{\mathbb{Z}_p[\![G]\!]}(\mathbb{F}_p, N)$$
est un isomorphisme pour $q = 0$ et est surjectif pour $q = 1$, alors f est un isomorphisme.

Corollaire

Soit G une pro-p-groupe finiment engendré et M un $\mathbb{Z}_p[\![G]\!]$-module complet.

a) *Si $\mathbb{F}_p \otimes_G M$ est de type fini, alors M l'est aussi.*

b) *Si M est de type fini et est projectif, alors M est libre.*

Le premier homomorphisme

Soit N_0 le noyau de $\epsilon = \mathrm{Id}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$.

$$\begin{tikzcd}
C_1 = \Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1} \arrow[rr, dashed, "\partial_1"] \arrow[drr, dashed, "\text{Shapiro}"] & & C_0 \simeq \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!] \underset{F}{\otimes} \mathbb{Z}_p \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \\
\Lambda_{1-p} \arrow[u] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{tr}(d_1)"] & & \mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!] \arrow[u, "\simeq"] \arrow[ur, "\epsilon"'] & \\
& N_0 \simeq (IS_2^1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Le premier homomorphisme

Soit N_0 le noyau de $\epsilon = \mathrm{Id}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$.

$$\begin{tikzcd}
C_1 = \Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1} \arrow[rr, dashed, "\partial_1"] \arrow[drr, dashed, "\text{Shapiro}"] & & C_0 \simeq \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!] \underset{F}{\otimes} \mathbb{Z}_p \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \\
\Lambda_{1-p} \arrow[u] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{tr}(d_1)"] & & \mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!] \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[ur, "\epsilon"'] & \\
& N_0 \simeq (IS_2^1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

Le module N_0 est engendré par $a_0 - 1$ et $b_0 - 1$ en tant que S_2^1-module.

$$H_0(S_2^1, N_0) \simeq \mathbb{F}_p \otimes \Lambda_{1-p}$$

Le premier homomorphisme

Soit N_0 le noyau de $\epsilon = \mathrm{Id}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$.

$$
\begin{tikzcd}
C_1 = \Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1} \arrow[rr, dashed, "\partial_1"] \arrow[drr, dashed, "\text{Shapiro}"] & & C_0 \simeq \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!] \underset{F}{\otimes} \mathbb{Z}_p \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \\
\Lambda_{1-p} \arrow[u] \arrow[dr, dashed, "\mathrm{tr}(d_1)"] & & \mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!] \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[ur, "\epsilon"'] & \\
& N_0 \simeq (IS_2^1) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Le module N_0 est engendré par $a_0 - 1$ et $b_0 - 1$ en tant que S_2^1-module.

$$H_0(S_2^1, N_0) \simeq \mathbb{F}_p \otimes \Lambda_{1-p}$$

On note $(e_1)_\pm := \epsilon_\pm$ éléments de $C_1 = \Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$, ils induisent une base en tant que S_2^1-module.

Proposition

L'homomorphisme $\partial_1 := \mathrm{tr}(d_1)\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}$ *caractérisé par*

$$\partial_1(e_1)_+ = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} \lambda_i(a_i - 1) + \mu_i(b_i - 1)$$

est surjectif sur N_0.

Le second homomorphisme

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[dr, dashed] & & C_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr, two heads] & & C_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0 \\
& N_1 \arrow[ur, hook] & & N_0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Le second homomorphisme

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[dr, dashed] & & C_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr] & & C_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0 \\
& N_1 \arrow[ur] & & N_0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Pour tout $X \in \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!]$ et $x \in \Lambda_{1-p}$:

$$\partial_1(X\,x) = \frac{1}{(p+1)} \sum_{i=0}^{p} \lambda(\omega^{(1-p)^i}x)\, X\,(a_i - 1) + \mu(\omega^{(1-p)^i}x)\, X\,(b_i - 1)$$

Le second homomorphisme

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[dr, dashed] & & C_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr] & & C_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0 \\ & N_1 \arrow[ur, hook] & & N_0 \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

Pour tout $X \in \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!]$ et $x \in \Lambda_{1-p}$:

$$\partial_1(X\,x) = \frac{1}{(p+1)} \sum_{i=0}^{p} \lambda(\omega^{(1-p)i}x)\,X\,(a_i - 1) + \mu(\omega^{(1-p)i}x)\,X\,(b_i - 1)$$

Comme $H_2(S_2^1, \mathbb{Z}_p) = H_1(S_2^1, N_0) = 0$, on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow N_1/(I\,S_2^1)N_1 \simeq H_0(S_2^1, N_1) \longrightarrow \Lambda_{1-p} \xrightarrow{\partial_{1*}} \mathbb{F}_p \otimes \Lambda_{1-p} \longrightarrow 0$$

Le second homomorphisme

$$\begin{tikzcd} C_2 \arrow[dr, dashed] & & C_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr] & & C_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0 \\ & N_1 \arrow[ur, hook] & & N_0 \arrow[ur, hook] & & & \end{tikzcd}$$

Pour tout $X \in \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!]$ et $x \in \Lambda_{1-p}$:

$$\partial_1(X\,x) = \frac{1}{(p+1)} \sum_{i=0}^{p} \lambda(\omega^{(1-p)i}x)\,X\,(a_i - 1) + \mu(\omega^{(1-p)i}x)\,X\,(b_i - 1)$$

Comme $H_2(S_2^1, \mathbb{Z}_p) = H_1(S_2^1, N_0) = 0$, on a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow N_1/(I\,S_2^1)N_1 \simeq H_0(S_2^1, N_1) \longrightarrow \Lambda_{1-p} \xrightarrow{\partial_{1*}} \mathbb{F}_p \otimes \Lambda_{1-p} \longrightarrow 0$$

N_1 peut être engendré par deux éléments congrus à $p\epsilon_\pm$ modulo $(IS_2^1)C_1$.

$$\begin{tikzcd}
C_2 = \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!] \otimes_F \Lambda_{1-p} \arrow[dr, dashed] & & C_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr] & & C_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0 \\
& N_1 \arrow[ur, hook] & & N_0 \arrow[ur, hook] & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $\mathcal{I}$ un "idéal" inclus dans $(p,(IS_2^1))$, supposons que l'on a trouvé $\kappa_\pm \in C_1$ tels que :

- $\partial_1(\kappa_\pm) \equiv 0 \mod \mathcal{I}N_0$

Comme N_0 est engendré par $\partial_1(\epsilon_\pm)$ en tant que S_2^1-module, il existe $x_\pm, y_\pm \in \mathcal{I}$ tels que

- $\partial_1(\kappa_\pm) \equiv x_\pm \partial_1(\epsilon_+) + y_\pm \partial_1(\epsilon_-)$

D'où, $\kappa'_\pm := \kappa_\pm - x_\pm\epsilon_+ - y_\pm\epsilon_-$ sont deux générateurs de N_1.

$$
\begin{tikzcd}
C_2 = \mathbb{Z}_p[\![\mathbb{G}_2^1]\!] \otimes_F \Lambda_{1-p} \arrow[dr, dashed] & & C_1 \arrow[rr, "\partial_1"] \arrow[dr] & & C_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0 \\
 & N_1 \arrow[ur, hook] & & N_0 \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}
$$

Soit $\mathcal{I}$ un "idéal" inclus dans $(p, (IS_2^1))$, supposons que l'on a trouvé $\kappa_\pm \in C_1$ tels que :

- $\partial_1(\kappa_\pm) \equiv 0 \mod \mathcal{I}N_0$

Comme N_0 est engendré par $\partial_1(\epsilon_\pm)$ en tant que S_2^1-module, il existe $x_\pm, y_\pm \in \mathcal{I}$ tels que

- $\partial_1(\kappa_\pm) \equiv x_\pm \partial_1(\epsilon_+) + y_\pm \partial_1(\epsilon_-)$

D'où, $\kappa'_\pm := \kappa_\pm - x_\pm \epsilon_+ - y_\pm \epsilon_-$ sont deux générateurs de N_1.

Posons $I = (IS_2^1)$ et $J = (IF_1 S_2^1)$. Pour trouver $\kappa_\pm$ avec une précision suffisante, on a procédé en deux étapes :

- Résolution dans le cas $\mathcal{I} = (p,\ J)$.
- Amélioration vers le cas $\mathcal{I} = (p,\ IJ + JI)$.

Puissance p-adique

Soit t un générateur du groupe $U_1 = 1 + p\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p^\times$ isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Soit

$$\rho : \mathbb{Z}_p \longrightarrow U_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\![U_1]\!]$$

définit par $\rho(\lambda) = t^\lambda$ pour tout entier p-adique λ.

Proposition (Interpolation de la puissance p-adique)

Quel que soit le nombre p-adique λ, on a dans $\mathbb{Z}_p[\![U_1]\!]$

$$t^\lambda = \sum_{n \geq 0} \binom{\lambda}{n} (t-1)^n$$

Puissance p-adique

Soit t un générateur du groupe $U_1 = 1 + p\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}_p^\times$ isomorphe à $\mathbb{Z}_p$. Soit

$$\rho : \mathbb{Z}_p \longrightarrow U_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\![U_1]\!]$$

définit par $\rho(\lambda) = t^\lambda$ pour tout entier p-adique λ.

Proposition (Interpolation de la puissance p-adique)

Quel que soit le nombre p-adique λ, on a dans $\mathbb{Z}_p[\![U_1]\!]$

$$t^\lambda = \sum_{n\geq 0} \binom{\lambda}{n} (t-1)^n$$

Remarque

Soit g dans un pro-p-groupe G, alors il existe un unique homomorphisme continue

$$\mathbb{Z}_p[\![U_1]\!] \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\![G]\!]$$

qui envoie t sur g. D'où

$$g^\lambda = \sum_{n\geq 0} \binom{\lambda}{n} (g-1)^n$$

Théorème-définition

$$\begin{aligned}\kappa_+ &:= N(a_0)(e_1)_+ + \frac{1}{4\epsilon_-^2}\Big((b_0-1)(w(e_1)_+ - v(e_1)_-) + (c_0-1)(e_1)_-\Big)\\ \kappa_- &:= N(b_0)(e_1)_- + \frac{1}{4\epsilon_+^2}\Big((a_0-1)(w(e_1)_+ - v(e_1)_-) + (c_0-1)(e_1)_+\Big)\end{aligned}$$

Ce sont deux éléments de C_1, qui à l'addition d'un vecteur $\kappa'_\pm$ de $(p, IJ+JI)C_1$ près, déterminent deux générateurs de N_1.

$$\begin{aligned}\kappa_+ + \kappa'_+ &\equiv N(a_0)(e_1)_+ \equiv p(e_1)_+ \mod (IS_2^1)C_1\\ \kappa_- + \kappa'_- &\equiv N(b_0)(e_1)_- \equiv p(e_1)_- \mod (IS_2^1)C_1\end{aligned}$$

De la suite exacte courte $H_0(S_2^1, N_1) \rightarrowtail \Lambda_{1-p} \twoheadrightarrow \bar{\Lambda}_{1-p}$, on déduit du lemme de type Nakayama que $(\kappa_+ + \kappa'_+, \kappa_- + \kappa'_-)$ engendre N_1 en tant que S_2^1-module. On pose $d_2 : \Lambda_{1-p} \to N_1$ l'homomorphisme défini par

$$d_2(\epsilon_\pm) := \kappa_\pm + \kappa'_\pm$$

Proposition-Définition

On pose

$$\partial_2 = \mathrm{tr}(d_2)\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1} : \ C_2 \longrightarrow N_1$$

C'est un homomorphisme de $\mathbb{G}_2^1$-modules surjectif.

(comme dans le cas $p = 3$ [HKM])
Soit G un groupe profini.
$\mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$: $g_* h := hg^{-1}$
$\Psi :\ \mathbb{Z}_p[\![G]\!] \to \mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$, $g \mapsto g^{-1}$, est un isomorphisme de G-modules.

(comme dans le cas $p = 3$ [HKM])
Soit G un groupe profini.
$\mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$: $g_* h := hg^{-1}$
$\Psi : \mathbb{Z}_p[\![G]\!] \to \mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$, $g \mapsto g^{-1}$, est un isomorphisme de G-modules.

Définition

Soient G un groupe profini et M un G-module, on pose

$$DM := D_G M := \mathrm{Hom}_G(M, \mathbb{Z}_p[\![G]\!])$$

muni de la structure de G-module définie par la relation suivante : $(g_*\phi)(m) := \phi(m)g^{-1}$.

(comme dans le cas $p = 3$ [HKM])
Soit G un groupe profini.
$\mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$: $g_* h := hg^{-1}$
Ψ : $\mathbb{Z}_p[\![G]\!] \to \mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$, $g \mapsto g^{-1}$, est un isomorphisme de G-modules.

Définition

Soient G un groupe profini et M un G-module, on pose

$$DM := D_G M := \mathrm{Hom}_G(M, \mathbb{Z}_p[\![G]\!])$$

muni de la structure de G-module définie par la relation suivante : $(g_*\phi)(m) := \phi(m)g^{-1}$.

Lemme

Soient G un groupe profini et M_1 et M_2 deux G-modules. Un homomorphisme $\alpha : M_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, \mathbb{Z}_p[\![G]\!])$ induit un homomorphisme de G-modules de M_1 dans DM_2 si et seulement si son adjoint $\hat{\alpha} : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\![G]\!]$ qui envoie (m_1, m_2) sur $\alpha(m_1)(m_2)$ vérifie les deux propriétés suivantes :

i) $\forall g \in G$, $\forall m_1 \in M_1$, $\forall m_2 \in M_2$: $\hat{\alpha}(m_1 \otimes gm_2) = g\hat{\alpha}(m_1 \otimes m_2)$.
ii) $\forall g \in G$, $\forall m_1 \in M_1$, $\forall m_2 \in M_2$: $\hat{\alpha}(gm_1 \otimes m_2) = \hat{\alpha}(m_1 \otimes m_2)g^{-1}$.

(comme dans le cas $p = 3$ [HKM])
Soit G un groupe profini.
$\mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$: $g_* h := hg^{-1}$
Ψ : $\mathbb{Z}_p[\![G]\!] \to \mathbb{Z}_p[\![G]\!]^{\circlearrowleft}$, $g \mapsto g^{-1}$, est un isomorphisme de G-modules.

Définition

Soient G un groupe profini et M un G-module, on pose

$$DM := D_G M := \mathrm{Hom}_G(M, \mathbb{Z}_p[\![G]\!])$$

muni de la structure de G-module définie par la relation suivante : $(g_*\phi)(m) := \phi(m)g^{-1}$.

Lemme

Soient G un groupe profini et M_1 et M_2 deux G-modules. Un homomorphisme $\alpha : M_1 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M_2, \mathbb{Z}_p[\![G]\!])$ induit un homomorphisme de G-modules de M_1 dans DM_2 si et seulement si son adjoint $\hat{\alpha} : M_1 \otimes M_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\![G]\!]$ qui envoie (m_1, m_2) sur $\alpha(m_1)(m_2)$ vérifie les deux propriétés suivantes :

i) $\forall g \in G$, $\forall m_1 \in M_1$, $\forall m_2 \in M_2$: $\quad \hat{\alpha}(m_1 \otimes gm_2) = g\hat{\alpha}(m_1 \otimes m_2)$.
ii) $\forall g \in G$, $\forall m_1 \in M_1$, $\forall m_2 \in M_2$: $\quad \hat{\alpha}(gm_1 \otimes m_2) = \hat{\alpha}(m_1 \otimes m_2)g^{-1}$.

Proposition

Soient H un sous-groupe fermé d'un groupe profini G et M_1, M_2 deux H-modules de types finis. Soit $\alpha : M_1 \longrightarrow D_H M_2$ un isomorphisme de H-modules, alors

$$\beta : \; M_1 \uparrow_H^G \xrightarrow{\alpha \uparrow_H^G} (D_H M_2)\uparrow_H^G \xrightarrow{\Psi \otimes (D_H M_2)} D_G(M_2 \uparrow_H^G)$$

défini par $\beta(X \otimes m_1)(Y \otimes m_2) = Y\alpha(m_1)(m_2)\Psi(X)$, est un isomorphisme de G-modules.

Le troisième homomorphisme

Proposition

a) *Il existe un homomorphisme $\bar{\epsilon}$ tel qu'on ait une suite exacte de $\mathbb{G}_2^1$-modules*

$$0 \longrightarrow DC_0 \xrightarrow{\partial_1^\vee} DC_1 \xrightarrow{\partial_2^\vee} DC_2 \xrightarrow{\partial_3^\vee} DC_3 \xrightarrow{\bar{\epsilon}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

b) *On pose $\delta_i := \alpha_i \partial_{4-i}^\vee \alpha_{i-1}^{-1}$ et $\epsilon' := \bar{\epsilon}\alpha_0$. Quitte à précomposer ∂_3 par un automorphisme $\mathbb{G}_2^1$-équivariant et à multiplier ϵ' par une unité p-adique, il existe un isomorphisme $f_\bullet : DC_{3-\bullet} \to C_\bullet$ de complexes de chaines telle que*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & C_3 \arrow[rr, dashed, "\delta_3"] \arrow[dl, "\alpha_3"'] \arrow[ddl, bend left, "="] & & C_2 \arrow[rr, dashed, "\delta_2"] \arrow[dl, "\alpha_2"'] \arrow[ddl, bend left] & & C_1 \arrow[rr, dashed, "\delta_1"] \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[ddl, bend left] & & C_0 \arrow[rr, dashed, "\epsilon'"] \arrow[dl, "\alpha_0"'] \arrow[ddl, bend left] & & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[dl, "="'] \arrow[ddl, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & DC_0 \arrow[rr, "\partial_1^\vee"] \arrow[d, "f_3"'] & & DC_1 \arrow[rr, "\partial_2^\vee"] \arrow[d, "f_2"'] & & DC_2 \arrow[rr, "\partial_3^\vee"] \arrow[d, "f_1"'] & & DC_3 \arrow[rr, "\bar{\epsilon}"] \arrow[d, "f_0"'] & & \mathbb{Z}_p \arrow[rr] \arrow[d, "="'] & & 0 \\
0 \arrow[r] & C_3 \arrow[rr, "\partial_3"] & & C_2 \arrow[rr, "\partial_2"] & & C_1 \arrow[rr, "\partial_1"] & & C_0 \arrow[rr, "\epsilon"] & & \mathbb{Z}_p \arrow[rr] & & 0
\end{tikzcd}$$

et $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!]}(\mathbb{Z}_p, f_2\alpha_2) = \mathrm{Id}$

Le troisième homomorphisme

Proposition

a) *Il existe un homomorphisme $\bar{\epsilon}$ tel qu'on ait une suite exacte de $\mathbb{G}_2^1$-modules*

$$0 \longrightarrow DC_0 \xrightarrow{\partial_1^\vee} DC_1 \xrightarrow{\partial_2^\vee} DC_2 \xrightarrow{\partial_3^\vee} DC_3 \xrightarrow{\bar{\epsilon}} \mathbb{Z}_p \longrightarrow 0$$

b) *On pose $\delta_i := \alpha_i \partial_{4-i}^\vee \alpha_{i-1}^{-1}$ et $\epsilon' := \bar{\epsilon}\alpha_0$. Quitte à précomposer ∂_3 par un automorphisme $\mathbb{G}_2^1$-équivariant et à multiplier ϵ' par une unité p-adique, il existe un isomorphisme $f_\bullet : DC_{3-\bullet} \to C_\bullet$ de complexes de chaines telle que*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_3 \arrow[r, dashed, "\delta_3"] \arrow[d, "\alpha_3"'] \arrow[dd, bend left, "="] & C_2 \arrow[r, dashed, "\delta_2"] \arrow[d, "\alpha_2"'] \arrow[dd, bend left] & C_1 \arrow[r, dashed, "\delta_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[dd, bend left] & C_0 \arrow[r, dashed, "\epsilon'"] \arrow[d, "\alpha_0"'] \arrow[dd, bend left] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, "="'] \arrow[dd, bend left] & 0 \\
0 \arrow[r] & DC_0 \arrow[r, "\partial_1^\vee"] \arrow[d, "f_3"'] & DC_1 \arrow[r, "\partial_2^\vee"] \arrow[d, "f_2"'] & DC_2 \arrow[r, "\partial_3^\vee"] \arrow[d, "f_1"'] & DC_3 \arrow[r, "\bar{\epsilon}"] \arrow[d, "f_0"'] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] \arrow[d, "="'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_3 \arrow[r, "\partial_3"] & C_2 \arrow[r, "\partial_2"] & C_1 \arrow[r, "\partial_1"] & C_0 \arrow[r, "\epsilon"] & \mathbb{Z}_p \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et $\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}_p[\![S_2^1]\!]}(\mathbb{Z}_p, f_2\alpha_2) = \mathrm{Id}$

Proposition

Le homomorphisme $\mathbb{G}_2^1$-équivariant $\delta_3 : C_3 \longrightarrow C_2$ est caractérisé par
$\delta_3(e_3) = \frac{1}{2\epsilon_+^2}\Lambda(e_2)_+ + \frac{1}{4\epsilon_-^2\mu_1}(\omega^{-1}\Lambda\omega - \omega\Lambda\omega^{-1})(e_2)_-$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(\mathbb{Z}_p\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}, (E_2)_*) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(\Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}, (E_2)_*)$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(\mathbb{Z}_p\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}, (E_2)_*) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(\Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}, (E_2)_*)$$

Lemme

1. *Le sous-$\mathbb{Z}_p$-module $(E_2)_*^F$ des invariants sous l'action de F de $(E_2)_*$ est la $\mathbb{Z}_p$-algèbre engendrée par $v_1 = u_1 u^{1-p}$ et $v_2 = u^{1-p^2}$, complète pour la filtration (u_1^{p+1})-adique. On note*

$$(E_2)_*^F = \mathbb{Z}_p[[u_1^{p+1}]][v_1, v_2^{\pm 1}]$$

Un élément $u_1^n u^m$ de $(E_2)_*$ appartient à $(E_2)_*^F$ si et seulement si $p^2 - 1$ divise $n(p-1) + m$.

2. *On a l'isomorphisme de F-modules suivant :*

$$(E_2)_* \cong \bigoplus_{i=0}^{p^2-2} \mathbb{W}u^i \otimes (E_2)_*^F$$

3. $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[F]}(\Lambda_{1-p}, (E_2)_*) \cong (E_2)_*^F \otimes (\mathbb{Z}_p u^{1-p} \oplus \mathbb{Z}_p u^{p-1}) \subseteq (E_2)_*$$

Un élément $u_1^n u^m$ de $(E_2)_*$ appartient au module ci-dessus si et seulement si $p^2 - 1$ divise $(\pm 1 + n)(p-1) + m$.

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(\mathbb{Z}_p\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}, (E_2)_*) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(\Lambda_{1-p}\uparrow_F^{\mathbb{G}_2^1}, (E_2)_*)$$

Lemme

1. *Le sous-$\mathbb{Z}_p$-module $(E_2)_*^F$ des invariants sous l'action de F de $(E_2)_*$ est la $\mathbb{Z}_p$-algèbre engendrée par $v_1 = u_1 u^{1-p}$ et $v_2 = u^{1-p^2}$, complète pour la filtration (u_1^{p+1})-adique. On note*

$$(E_2)_*^F = \mathbb{Z}_p[[u_1^{p+1}]][v_1, v_2^{\pm 1}]$$

Un élément $u_1^n u^m$ de $(E_2)_*$ appartient à $(E_2)_*^F$ si et seulement si $p^2 - 1$ divise $n(p-1) + m$.

2. *On a l'isomorphisme de F-modules suivant :*

$$(E_2)_* \cong \bigoplus_{i=0}^{p^2-2} \mathbb{W}u^i \otimes (E_2)_*^F$$

3. $$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[F]}(\Lambda_{1-p}, (E_2)_*) \cong (E_2)_*^F \otimes (\mathbb{Z}_p u^{1-p} \oplus \mathbb{Z}_p u^{p-1}) \subseteq (E_2)_*$$

Un élément $u_1^n u^m$ de $(E_2)_*$ appartient au module ci-dessus si et seulement si $p^2 - 1$ divise $(\pm 1 + n)(p-1) + m$.

Soit $g \in \mathbb{S}_2$, alors

$$g_* v_1 \equiv t_0(g)^{p-1} u_1 t_0(g)^{1-p} u^{1-p} \equiv v_1 \mod (p)$$

et

$$(g-1)_* v_1^i v_2^j \equiv v_1^i (g-1)_* v_2^j \mod (p)$$

La première différentielle

$$\partial_1(e_1)_+ = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} \lambda_i(a_i - 1) + \mu_i(b_i - 1)$$

La première différentielle

$$\partial_1(e_1)_+ = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} \lambda_i(a_i - 1) + \mu_i(b_i - 1)$$

On pose $h_0 = u^{1-p}$ et $h_1 = u^{p-1}$, alors $h_0^p = h_1 v_2$, $h_1^p = h_0 v_2^{-1}$ et

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_0, (E_2)_*/(p)) \arrow[r, "\partial_1^*"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"', "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_1, (E_2)_*/(p)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_{(e_1)_+}"', "\simeq"] \\
(E_2)_*^F/(p) \arrow[r] & (E_2)_*^F/(p)(\mathbb{F}_p h_0 \oplus \mathbb{F}_p h_1)
\end{tikzcd}$$

Ainsi

$$\partial_1^*(v_1^i v_2^j) = (\partial_1(e_1)_+)_* v_1^i v_2^j$$

et ∂_1^* est v_1-linéaire.

La première différentielle

$$\partial_1(e_1)_+ = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} \lambda_i(a_i - 1) + \mu_i(b_i - 1)$$

On pose $h_0 = u^{1-p}$ et $h_1 = u^{p-1}$, alors $h_0^p = h_1 v_2$, $h_1^p = h_0 v_2^{-1}$ et

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_0, (E_2)_*/(p)) \arrow[r, "\partial_1^*"] \arrow[d, "\mathrm{ev}_1"', "\simeq"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_1, (E_2)_*/(p)) \arrow[d, "\mathrm{ev}_{(e_1)_+}"', "\simeq"] \\
(E_2)_*^F/(p) \arrow[r] & (E_2)_*^F/(p)(\mathbb{F}_p h_0 \oplus \mathbb{F}_p h_1)
\end{tikzcd}$$

Ainsi

$$\partial_1^*(v_1^i v_2^j) = (\partial_1(e_1)_+)_* v_1^i v_2^j$$

et ∂_1^* est v_1-linéaire.

Lemme

Soient s un entier relatif et $q \in \mathbb{Z}$ le quotient de la division euclidienne de s par p, alors

$$\partial_1^*(v_2^s) \equiv s\, v_1 h_1 v_2^s + (q - s)\, v_1^p h_0 v_2^{s-1} \mod (u_1^{p+2})$$

La première différentielle

$$\partial_1(e_1)_+ = \frac{1}{p+1}\sum_{i=0}^{p} \lambda_i(a_i - 1) + \mu_i(b_i - 1)$$

On pose $h_0 = u^{1-p}$ et $h_1 = u^{p-1}$, alors $h_0^p = h_1 v_2$, $h_1^p = h_0 v_2^{-1}$ et

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_0, (E_2)_*/(p)) & \xrightarrow{\partial_1^*} & \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_1, (E_2)_*/(p)) \\
\mathrm{ev}_1 \downarrow \simeq & & \mathrm{ev}_{(e_1)_+} \downarrow \simeq \\
(E_2)_*^F/(p) & \longrightarrow & (E_2)_*^F/(p)(\mathbb{F}_p\, h_0 \oplus \mathbb{F}_p\, h_1)
\end{array}$$

Ainsi

$$\partial_1^*(\, v_1^i\, v_2^j\,) = (\partial_1(e_1)_+)_*\, v_1^i\, v_2^j$$

et ∂_1^* est v_1-linéaire.

Lemme

Soient s un entier relatif et $q \in \mathbb{Z}$ le quotient de la division euclidienne de s par p, alors

$$\partial_1^*(v_2^s) \equiv s\, v_1\, h_1\, v_2^s + (\, q - s\,)\, v_1^p\, h_0\, v_2^{s-1} \mod (u_1^{p+2})$$

$$\begin{aligned}
\partial_1^*(v_2^{sp^2}) &= \partial_1^*(v_2^s)^{p^2} \equiv s\, v_1^{p^2}\, h_1\, v_2^{sp^2-p+1} + (q-s) v_1^{p^3}\, h_0\, v_2^{sp^2-p^2+p-1} \mod (u_1^{p^2(p+2)}) \\
\partial_1^*(s v_1^{p^2-1} v_2^{sp^2-p+1}) &\equiv s v_1^{p^2}\, h_1\, v_2^{sp^2-p+1} - 2s v_1^{p^2+p-1}\, h_0\, v_2^{sp^2-p} \mod (u_1^{p^2+p+1})
\end{aligned}$$

Théorème

Il existe

i) $(\,(1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_0, (E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p)$.

ii) $(\,(h_0)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}} \cup (\,(h_1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_1, (E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p) \otimes (\mathbb{F}_p h_0 \oplus \mathbb{F}_p h_1)$.

iii) $(\,(g_0)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}} \cup (\,(g_1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_2, (E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p) \otimes (\mathbb{F}_p g_0 \oplus \mathbb{F}_p g_1)$.

iv) $(\,h_0 g_1\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_3, (E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*/(p)$.

Théorème

Il existe

i) $(\,(1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ v_1*-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_0,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p)$.

ii) $(\,(h_0)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}} \cup (\,(h_1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ v_1*-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_1,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p) \otimes (\mathbb{F}_p h_0 \oplus \mathbb{F}_p h_1)$.

iii) $(\,(g_0)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}} \cup (\,(g_1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ v_1*-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_2,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p) \otimes (\mathbb{F}_p g_0 \oplus \mathbb{F}_p g_1)$.

iv) $(\,h_0 g_1\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ v_1*-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_3,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*/(p)$.

telles que

1. *Pour tous* $X = 1, h_0, h_1, g_0, g_1, h_0 g_1$, $(X)_s$ *est homogène et il existe* $c \in \mathbb{F}_p^\times$ *tel que* $(X)_s \equiv c\, X\, v_2^s \mod (u_1)$

Théorème

Il existe

i) $(\,(1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_0,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p)$.

ii) $(\,(h_0)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}} \cup (\,(h_1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_1,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p) \otimes (\mathbb{F}_p h_0 \oplus \mathbb{F}_p h_1)$.

iii) $(\,(g_0)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}} \cup (\,(g_1)_s\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_2,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*^F/(p) \otimes (\mathbb{F}_p g_0 \oplus \mathbb{F}_p g_1)$.

iv) $(\,h_0 g_1\,)_{s\in\mathbb{Z}}$ *v_1-base topologique de* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_3,(E_2)_*/(p)) \simeq (E_2)_*/(p)$.

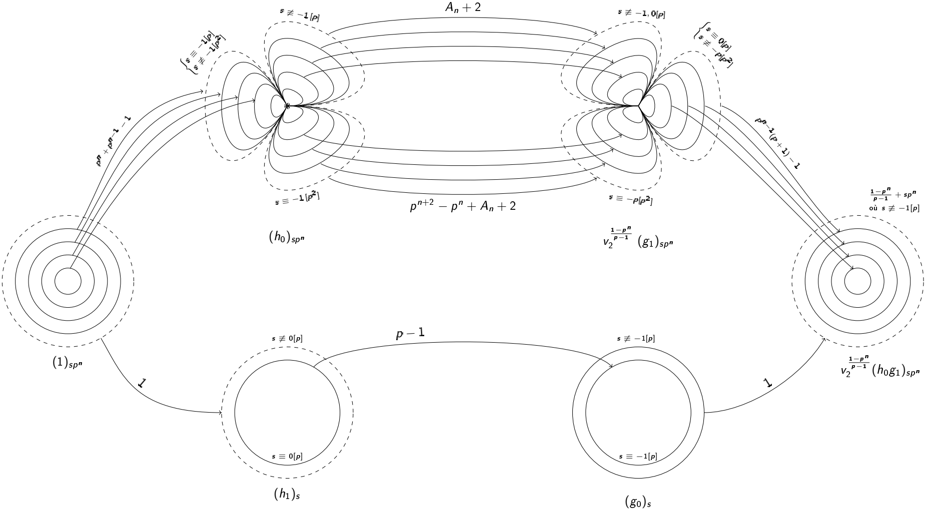
telles que

1. *Pour tous* $X = 1, h_0, h_1, g_0, g_1, h_0 g_1$, $(X)_s$ *est homogène et il existe* $c \in \mathbb{F}_p^\times$ *tel que* $(X)_s \equiv c\,X\,v_2^s \mod (u_1)$
2. *Les homomorphismes v_1-linéaires induit* $\partial_i^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}_2^1}(C_i,(E_2)_*/(p))$ *sont diagonales dans les bases précédentes :*

$$
\begin{aligned}
\partial_1^*(1)_{sp^n} &= \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0,\\ v_1 (h_1)_s & \text{si } n = 0,\ s \not\equiv 0\ [p]\\ v_1^{p^n+p^{n-1}-1}\,(h_0)_{(sp-1)p^{n-1}} & \text{si } n \geq 1,\ s \not\equiv 0\ [p] \end{cases}\\
\partial_2^*(h_0)_{sp^n} &= \begin{cases} 0 & \text{si } s = 0,\\ v_1^{A_n+2}\, v_2^{\frac{1-p^n}{p-1}}\,(g_1)_{sp^n} & \text{si } n \geq 0,\ s \not\equiv 0,-1\ [p]\\ v_1^{p^{n+2}-p^n+A_n+2}\, v_2^{\frac{1-p^n}{p-1}}\,(g_1)_{(s+1-p)p^n} & \text{si } n \geq 0,\ s \equiv -1\ [p^2] \end{cases}\\
\partial_2^*(h_1)_{sp} &= v_1^{p-1}(g_0)_{sp-1}\\
\partial_3^*((g_0)_s) &= v_1 (h_0 g_1)_s \qquad \text{si } s \not\equiv -1\ [p]\\
\partial_3^*(v_2^{\frac{1-p^{n-1}}{p-1}}(g_1)_{sp^n}) &= v_1^{p^{n-1}(p+1)-1} v_2^{\frac{1-p^n}{p-1}}(h_0 g_1)_{sp^n} \qquad \text{si } n \geq 1 \text{ et } s \not\equiv -1\ [p]
\end{aligned}
$$

où $A_n = \frac{p^n-1}{p-1}(p+1) = (p^{n-1}+\ldots+1)(p+1)$.

$$(E_2)^F_*/(p) \xrightarrow{\partial_1^*} (E_2)^F_*/(p) \otimes (\mathbb{F}_p h_0 \oplus \mathbb{F}_p h_1) \xrightarrow{\partial_2^*} (E_2)^F_*/(p) \otimes (\mathbb{F}_p g_0 \oplus \mathbb{F}_p g_1) \xrightarrow{\partial_3^*} (E_2)^F_*/(p)$$



References

P. Goerss, H.-W. Henn, M. Mahowald, and C. Rezk, *A resolution of the* $\mathrm{K}(2)$*-local sphere*, Annals of Mathematics **162** (2005), 777–822.

H-W. Henn, *On finite resolutions of* $\mathrm{K}(n)$*-local spheres, in Elliptic Cohomology*, London Math. Soc. LNS **342** (2007), 122–169.

H-W. Henn, N. Karamanov, and M. Mahowald, *The homotopy of the* $\mathrm{K}(2)$*-local Moore spectrum at the prime 3 revisited*, Preprint octobre 2008.

M. Lazard, *Groupes p-adiques analytiques*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **26** (1965), 389–603.