Transferts et orientation en $\mathbb{A}^1$-homotopie stable.

F. Déglise

24/12/2012

Rappels sur la théorie de Morel-Voevodsdky

topologie	géométrie algébrique (k corps)
CW-complexes	variétés algébriques lisses sur k
intervalle [0,1]	droite affine $\mathbb{A}^1_k$
sphère S^1	droite projective $\mathbb{P}^1_k$
	$\mathbb{P}^1_k = S^1 \wedge \mathbb{G}_m$ *deux sphères*

dictionnaire ($k = \mathbb{C}$)

X^{an} topologie analytique $\leftarrow\!\!\shortmid$	$X/\mathbb{C}$
$\mathbb{CP}^1 \simeq S^2$	$\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

différence essentielle

point $*$	points: E/k extension de corps

E spectre: *stable homotopy groups*: $\pi_i^s(E) = \varinjlim_{r \in \mathbb{N}} [S^{i+r}, E_i]$.

Théorème

Si $\pi_i^s(E) = 0$ *pour* $i \neq 0$, $A = \pi_0^s(E)$,
alors $E = K(A)$, *spectre d'Eilenberg-Mac Lane de groupe* A.

Autrement dit, E est *ordinaire*.

Géométrie algébrique

E un $\mathbb{P}^1$-spectre: pour toute extension K/k,

$$\underline{\pi}^s_{i,n}(E)(K) = \varinjlim_{r\in\mathbb{N}} [S^{i+r} \wedge \mathbb{G}_m^{-n+r} \wedge \mathrm{Spec}(K)_+, E_r] \ .$$

Théorème (conj. Morel, preuve D., [3])

Supposons que k est un corps parfait.
Soit E tel que $\underline{\pi}^s_{i,*}(E) = 0$ si $i \neq 0$.
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *l'application de Hopf η agit par 0 sur E.*

(ii) *E est orientable.*

(iii) *E admet des transferts.*

(iii) peut se traduire: E est un motif (au sens de Voevodsky).

Plan

1. Application de Hopf et homotopie des sphères.
2. Orientation.
3. Transferts.
4. Coefficients rationnels.

Application de Hopf

Fibration sur S^2 de fibre S^1:

$$\begin{array}{ccc} S^3 \simeq \mathbb{C}^2 - \{0\} & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \simeq S^2 \\ (x, y) & \mapsto & [x : y]. \end{array}$$

(générateur de $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$).

Definition (Morel)

On définit l'application de Hopf sur k comme le morphisme:

$$\mathbb{A}^2_k - \{0\} \xrightarrow{\eta} \mathbb{P}^1_k, (x, y) \mapsto [x : y].$$

Application de Hopf en homotopie stable

À $\mathbb{A}^1$-homotopie près, $\mathbb{A}^2_k - \{0\} = \mathbb{P}^1_k \wedge \mathbb{G}_m$.
Donc, $\mathbb{P}^1$-stablement:

$$\eta : \Sigma^\infty \mathbb{G}_m \to \Sigma^\infty S^0.$$

Une unité $x \in k^\times = \mathbb{G}_m(k)$ induit:

$$[x] : \Sigma^\infty S^0 \to \Sigma^\infty \mathbb{G}_m.$$

Théorème (Morel, [4])

Supposons k parfait. L'anneau gradué

$$\underline{\pi}^s_{0,*}(S^0)(k) = \mathrm{Hom}(\Sigma^\infty S^0, \Sigma^\infty S^0 \wedge \mathbb{G}_m^*)$$

est engendré par η (degré -1) et $[x]$ (degré 1) pour $x \in k^\times$.

- si $k = \mathbb{C}$, $2.\eta = 0$ (stablement, comme en topologie).

Orientation: définition

Cohomologie à coefficients dans un $\mathbb{P}^1$-spectre E:
pour $(n,i) \in \mathbb{Z}^2$, X variété lisse pointée:

$$\tilde{E}^{n,i}(X) = \mathrm{Hom}\left(\Sigma^\infty X, S^{n-2i} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge,i} \wedge E\right).$$

On note $\mathbb{P}^\infty_k$ la colimite de la tour d'inclusions:

$$\mathbb{P}^1_k \xrightarrow{i_1} \mathbb{P}^2_k \to \cdots$$

Definition

Soit E spectre en anneau, d'unité u_E.
Une orientation de E est une classe $c_1 \in \tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^\infty_k)$ telle que:
$c_1|_{\mathbb{P}^1_k} = u_E$ via l'isomorphisme de stabilité: $\tilde{E}^{n,i}(\mathbb{P}^1_k) \simeq E^{0,0}(k)$.

Autrement dit, c_1 est un relèvement le long de $\mathbb{P}^1_k \to \mathbb{P}^\infty_k$ de:

$$\mathbb{P}^1_k \xrightarrow{Id \wedge u_E} \mathbb{P}^1_k \wedge E.$$

Orientation et application de Hopf

$$\mathbb{P}^\infty_k = \operatorname{colim}\left(\mathbb{P}^1_k \xrightarrow{i_1} \mathbb{P}^2_k \to \cdots\right)$$

Proposition (Morel, [4])

Supposons k parfait. Il existe une suite homotopique exacte:

$$\mathbb{A}^2_k - \{0\} \xrightarrow{\eta} \mathbb{P}^1_k \xrightarrow{i_1} \mathbb{P}^2_k.$$

On en déduit une suite exacte:

$$\tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^2_k) \xrightarrow{i_1^*} \tilde{E}^{2,1}(\mathbb{P}^1_k) \xrightarrow{\eta^*} \tilde{E}^{2,1}(\mathbb{A}^2_k - \{0\}).$$

Ainsi, l'action de η sur la cohomologie de E représente la première obstruction à l'orientabilité de E.

Orientation et cobordisme

Cobordisme algébrique: spectre en anneaux MGL.

$$\{\text{orientation de } E\} \simeq \{\text{morph. anneaux } \varphi : \mathrm{MGL} \to E\}.$$

Théorème (Morel, [4])

La suite suivante est exacte:

$$\underline{\pi}^s_{0,*}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\eta_*} \underline{\pi}^s_{0,*}(S^0) \xrightarrow{u_{\mathrm{MGL}}} \underline{\pi}^s_{0,*}(\mathrm{MGL}) \to 0$$

Corollaire

Si E est un $\mathbb{P}^1$-spectre tel $\underline{\pi}^s_{i,*}(E) = 0$ pour $i \neq 0$.
Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *l'application de Hopf η agit par 0 sur E.*

(ii) *E admet une structure de MGL-module (i.e. est orientable).*

Transferts (motifs de Voevodsky)

(Approximativement) *motif de Voevodsky*:
spectre E sur k muni d'une action des correspondances finies $\alpha : X \bullet\!\!\longrightarrow Y$. Un diagramme:

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "\text{fini surjectif}"'] \arrow[dr, "\text{morphisme algébrique}"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "\alpha"] & & Y \end{tikzcd}$$

induit $\alpha^* : E^{**}(Y) \to E^{**}(X)$.

pour démontrer la condition (iii) de la conjecture de Morel:
construire des transferts sur les cohomologies orientées.

Transferts et dualité

Homologie à coefficients dans un $\mathbb{P}^1$-spectre E:
pour $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$, X variété lisse pointée:

$$E_{n,i}(X) = \mathrm{Hom}\left(S^{n-2i} \wedge (\mathbb{P}^1)^{\wedge, i}, \Sigma^\infty X_+ \wedge E\right).$$

Théorème (dualité, [2])

Soit E un MGL-module sur k, et X une variété projective lisse de dimension d.
Alors, il existe un isomorphisme de dualité:

$$d_X : E^{n,i}(X) \xrightarrow{\sim} E_{2d-n,d-i}(X)$$

(cap-produit par la classe fondamentale de X).

Transferts et dualité

On en déduit des transferts pour les morphismes finis $f : X \to Y$ entre variétés projectives lisses:

$$\begin{tikzcd} E^{**}(X) \arrow[r, dashed, "f_*"] \arrow[d, "d_X", "\sim"'] & E^{**}(Y) \arrow[d, "d_Y"', "\sim"] \\ E_{**}(X) \arrow[r] & E_{**}(Y) \end{tikzcd}$$

Remarque

C'est seulement un premier pas. Le problème vient du fait que dans la définition des transferts suivant Voevodsky, le schéma Z qui apparait peut être singulier.

Coefficients rationnels (topologie)

En topologie, le foncteur K, spectre d'Eilenberg-Mac Lane peut être prolongé à la catégorie dérivée (Dold-Kan):

$$K : D(\mathrm{Ab}) \to SH.$$

De la finitude des groupes d'homotopie stable des sphères résulte:

Théorème

Le foncteur

$$K \otimes \mathbb{Q} : (\mathbb{Q} - ev)^{\mathbb{Z}} \longrightarrow SH \otimes \mathbb{Q}$$

est une équivalence de catégories monoïdales.

Coefficients rationnels (géométrie algébrique)

catégorie abélienne des motifs mixtes $M(k)$ (conjecturale!)
$\leftrightarrow$ catégorie des groupes abéliens.
L'analogue du foncteur K dérivé est bien défini (non conjectural!):

$$K_{\mathcal{M}} : DM(k) \to SH(k).$$

Note: $K_{\mathcal{M}}(\mathbb{Z}) = \mathrm{H}_{\mathcal{M}}$, spectre de cohomologie motivique.

Théorème (Morel, Cisinski-D., [1])

Le foncteur $K_{\mathcal{M}} \otimes \mathbb{Q}$ est pleinement fidèle.
Il a pour image essentielle les spectres E vérifiant l'une des conditions équivalentes suivantes:

(i) *η agit trivialement sur E.*
(ii) *E est orientable.*
(iii) *E admet une structure de $\mathrm{H}_{\mathcal{M}}$-module (unique, strictifiable).*

$(k = \mathbb{C})$ $K_{\mathcal{M}} \otimes \mathbb{Q}$ équivalence de catégories.

Références

[1] D.-C. Cisinski and F. Déglise.
Triangulated categories of mixed motives.
arXiv:0912.2110, 2009.

[2] F. Déglise.
Around the Gysin triangle II.
Doc. Math., 13:613–675, 2008.

[3] F. Déglise.
Orientable homotopy modules.
Am. Journ. of Math., (to appear), 2011.

[4] F. Morel, *An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory*, Contemporary developments in algebraic K-theory, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, pp. 357–441 (electronic).