Géométrie 4

1. Groupes linéaires

Exercice 5.1. Le but de cet exercice est de démontrer que un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est une sous-variété différentiable de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$. On note $M(n,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel de matrices réelles $n\times n$.

– Montrer que pour tout $X,Y\in M(n,\mathbb{R})$ lorsque t tends vers zéro on a

$$\exp tX \exp tY = \exp(t(X+Y)+o(t^2))$$

En déduire que

$$\lim_n (\exp \tfrac{t}{n} X \exp \tfrac{t}{n} Y)^n = \exp t(X+Y).$$

– On pose

$$\mathfrak{g} = \left\{X\in M(n,\mathbb{R}) \mid \forall\, t\in\mathbb{R} : \exp tX \in G\right\}$$

Montrer que $\mathfrak{g}$ est un sous-espace vectoriel de $M(n,\mathbb{R})$.

– Soit $\mathfrak{h}$ un sous-espace de $M(n,\mathbb{R})$ complémentaire de $\mathfrak{g}$. Justifier l'affirmation suivante : Il existe un voisinage V de $0\in\mathfrak{g}$ et un voisinage W de $0\in\mathfrak{h}$ tels que l'application

$$(X,Y)\in V\times W \mapsto \exp X \exp Y \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$$

est un difféomorphisme de $V\times W$ sur un voisinage ouvert U de $I\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$.

– Soit $Y_i\in W$ une suite telle que $\lim_i Y_i = 0$. Justifier l'affirmation suivante : quitte à extraire une sous-suite on pourra supposer que la suite $Y_i/\parallel Y_i\parallel$ converge vers un élément non nul $Y\in\mathfrak{h}$. Ensuite on supposera cela.

– Pour tout $t>0$ soit $N_j(t)$ la partie entière de $t/\parallel Y_i\parallel$. Vérifier que

$$\exp tY = \lim_j \left(\exp(Y_j)\right)^{N_j(t)}$$

– Conclure que si $g\in U\cap G$ alors il existe $X\in V$ tel que $g=\exp X$. En particulier, l'application

$$X\in V\mapsto \exp X\in U\cap G$$

est un homéomorphisme. L'inverse de cet homéomorphisme est donc une carte (U_I,ϕ_I) définie sur le voisinage ouvert $U_I = U\cap G$ de $I\in G$ à valeurs dans un voisinage V de 0 dans $\mathfrak{g}$.

– Soit U_0 un voisinage ouvert de $I\in G$ tel que $U_0U_0^{-1}\subset U_I$. Pour tout $g\in G$ on pose $U_g = gU_0$. L'ensemble U_g est alors un voisinage ouvert de g dans G et on pose $\phi_g(h) = \phi_I(g^{-1}h)$ pour tout $h\in U_g$. L'atlas $(U_g,\phi_g)_{g\in G}$ est une atlas C^∞ de G.

Un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ est dit un groupe de Lie linéaire. Le sous-espace $\mathfrak{g}$ de $M(n,\mathbb{R})$ est dit l'algèbre de Lie de G.

Exercice 5.2. Soit G un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n,R)$ défini par

$$G := \{g\in\mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid f(g)=0\}$$

où f est une fonction différentiable sur $\mathrm{GL}(n,R)$. Montrer que l'algèbre de Lie de G est donnée par

$$\mathfrak{g} = \ker \mathrm{d} f_I$$

(Indication : Si, pour $h \in G$, on pose $f_h(g) = f(hg)$, on a $G = \{g \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R}) \mid f_h(g) = 0\}$).

Déterminer les algèbres de Lie des sous-groupes suivants :
$\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SO}(1,n)$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 5.3. Soit G un groupe de Lie linéaire et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

– Montrer que si $X \in \mathfrak{g}$ alors pour tout $g \in G$ on a $gXg^{-1} \in \mathfrak{g}$. On pose $\mathrm{Ad}(g)(X) = gXg^{-1}$.
– Montrer que l'application

$$\mathrm{Ad} : g \in G \mapsto \mathrm{Ad}(g)$$

est un morphisme du groupe G dans le groupe des automorphismes (linéaires) de $\mathfrak{g}$. Cette application est dite la représentation adjointe de G,
– Montrer que l'application Ad est différentiable et soit ad sa différentielle en $I \in G$. L'application ad est alors une application de $\mathfrak{g}$ dans les endomorphismes de $\mathfrak{g}$. Montrer que $\mathrm{ad}(X)(Y) = XY - YX$, pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.
– On pose $[X,Y] = \mathrm{ad}(X)(Y)$. Montrer l'identité de Jacobi :

$$[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]]$$

– Montrer que l'identité de Jacobi découle de l'identité

$$\mathrm{Ad}(g)([Y,Z]) = [\mathrm{Ad}(g)(Y), \mathrm{Ad}(g)(Z)].$$

L'algèbre de Lie est l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni du produit (non-associatif) $[\cdot,\cdot]$.

Exercice 5.4. Un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est une application linéaire $L \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ telle que

$$L([X,Y]) = [L(X), L(Y)], \qquad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$$

– Montrer que les algèbres de Lie de $\mathrm{SO}(3)$ et $SU(2)$ sont isomorphes engendré par trois éléments X, Y, Z satisfaisant

$$[X,Y] = Z, \quad [Y,Z] = X, \quad [Z,X] = Y.$$

– Montrer que les algèbres de Lie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ et $SO(1,2)$ sont isomorphes engendré par une base de trois éléments X, Y, K satisfaisant

$$[X,Y] = -K, \quad [K,X] = Y, \quad [K,Y] = -X.$$

Exercice 5.5. Soit $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ l'algèbre de Lie de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Rappelons que $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ agit sur $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ par la représentation adjointe Ad :

$$\mathrm{Ad}(g)W = gWg^{-1}, \quad W \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}), g \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}).$$

Montrer que la forme bilinéaire sur $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ définie par

$$\langle U, W \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{trace}\big(\mathrm{ad}(U) \circ \mathrm{ad}(W)\big)$$

est invariante par l'action de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Vérifier que la base X, Y, K est orthogonale et que

$$\langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle = -\langle K, K \rangle = 1$$

Conclure que $\mathrm{SL}(2,R)/\pm I$ est isomorphe à la composante connexe de $\mathrm{SO}(1,2)$.