Géométrie 3

1. L'espace projectif réel

Exercice 4.1. Soit donné la relation suivante sur $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$: $(x_0,\dots,x_n)\sim(y_0,\dots,y_n)$ si et seulement s'il existe $\lambda\neq 0$ tel que $(y_0,\dots,y_n)=(\lambda x_0,\dots,\lambda x_n)$.

- Vérifier que la relation donnée est une relation d'équivalence et que les classes d'équivalence sont en correspondance bijective avec le droites passant par l'origine 0. On note $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'espace quotient $\mathbb{R}^{n+1}/\sim$.
- On note $[x_0:x_1:\cdots:x_n]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la classe d'équivalence de $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Vérifier que l'ensemble
$$U_i=\{[x_0:x_1:\cdots:x_n]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{R})\mid x_i\neq 0\}$$
est bien défini et ouvert.
- Montrer que l'application
$$\phi_i:[x_0:x_1:\cdots:x_n]\in U_i\mapsto\left(\tfrac{x_0}{x_i},\tfrac{x_1}{x_i},\dots,\tfrac{x_{i-1}}{x_i},\tfrac{x_{i+1}}{x_i},\dots,\tfrac{x_n}{x_i}\right)\in\mathbb{R}^n$$
est bien définie et établit un homéomorphisme de U_i sur $\mathbb{R}^n$, dont l'inverse est l'application
$$\phi_i:(t_0,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_n)\in\mathbb{R}^n\mapsto[t_0:\cdots:t_{i-1}:1:t_{i+1}:\cdots:t_n]\in U_i.$$
La carte (U_i,ϕ_i) est dite une *carte affine de* $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.
- Donner une interprétation géométrique des cartes affines de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$. (Indication : tracer l'hyperplan d'équation $x_i=1$).
- Montrer que les applications $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ sont des difféomorphismes d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sur un ouvert $\mathbb{R}^n$. En déduire que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une variété différentielle de classe C^∞.

Exercice 4.2. Le sous-groupe à deux éléments de $\mathrm{SO}(n+1)$ donné par $G=\{I,-I\}$ opère sur la sphère $\mathbb{S}^n=\{(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_0^2+\cdots+x_n^2=1\}$. L'espace quotient $\mathbb{S}^n/\{I,-I\}$ s'identifie à l'ensemble des paires non ordonnées de points antipodaux de $\mathbb{S}^n$.

- Montrer que G agit proprement par des difféomorphismes C^∞ de $\mathbb{S}^n$. (Indication : une application f définie sur une sous-variété M de $\mathbb{R}^k$ est différentiable de classe C^ℓ si et seulement si pour tout $p\in M$ il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^k$, voisinage de p, et une application différentiable F de classe C^ℓ définie sur U qui prolonge $f_{|U\cap M}$).
- En déduire que $\mathbb{S}^n\to\mathbb{S}^n/\{I,-I\}$ est un revêtement galoisien à deux feuillets et que l'espace $\mathbb{S}^n/\{I,-I\}$ est une variété différentielle de classe C^∞.
- Montrer que l'application l'application qui associe à une paire $\{x,-x\}$ de de points antipodaux de $\mathbb{S}^n$ la droite passant par ces points est un difféomorphisme de $\mathbb{S}^n/\{I,-I\}$ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.3. Soit $\mathbb{D}^n$ le disque fermé unité de $\mathbb{R}^n$
$$\mathbb{D}^n=\{(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid t_1^2+\cdots+t_n^2\leq 1\}.$$
On pose $\partial\mathbb{D}^n=\{(t_1,\dots,t_n)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid t_1^2+\cdots+t_n^2=1\}=\mathbb{S}^{n-1}$.

– Montrer que $\mathbb{D}^n$ est homéomorphe à H, l'hémisphère supérieur de $\mathbb{S}^n$ défini par :
$$H = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1, x_0 \geq 0\}.$$
– Soit $\mathbb{D}^n/\sim$ l'espace obtenu en identifiant points opposés de $\partial\mathbb{D}^n$. Montrer que $\mathbb{D}^n/\sim$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$.

Exercice 4.4. Munissons $\mathbb{R}^3$ d'une orientation. Pour tout $w \in \mathbb{R}^3$, non nul, le plan orthogonal à w est orienté par le choix d'une base (e_1, e_2) telle que (e_1, e_2, w) soit un trièdre positivement orientée de $\mathbb{R}^3$. L'orientation du plan orthogonal à w nous permet de parler de rotation d'angle ϕ (orientée dans le sens trigonométrique) dans ce plan.

À tout vecteur w de $\mathbb{D}^3$ on peut associer une rotation $\Phi(w) = g \in \mathrm{SO}(3)$ dans la façon suivante. Si $w = 0$, on pose $\Phi(w) = I$. Si w est non nul, l'axe de rotation de g sera la droite engendrée par w ; dans le plan orienté orthogonal à w, l'application g sera une rotation d'angle $\pi \parallel w \parallel$. On admettra que l'application $\Phi : \mathbb{D}^3 \to \mathrm{SO}(3)$ ainsi définie est continue.

– Montrer que l'application Φ est injective sur la boule ouverte $B(0,1) \subset \mathbb{R}^3$.
– Montrer qu'on a $\Phi(v) = \Phi(w)$ si et seulement si v et w sont deux points opposé de $\mathbb{S}^n$, c'est à dire si et seulement si $\parallel w \parallel = \parallel v \parallel = 1$ et $v = -w$.
– En déduire que $\mathrm{SO}(3)$ est homéomorphe à $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.
– Déterminer $\pi_1(\mathrm{SO}(3))$.

Exercice 4.5. Montrer que l'application
$$\Phi\colon (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \begin{pmatrix} ix & y+iz \\ -y+iz & -ix \end{pmatrix}$$
est un isomorphisme linéaire de $\mathbb{R}^3$ sur l'espace vectoriel $\mathfrak{h}$ des matrices des matrices antihermitiennes de trace nulle dans $M(2,\mathbb{C})$. On note $\mathrm{SU}(2)$ le groupe unitaire spécial de $\mathbb{C}^2$

– Montrer que $\mathrm{SU}(2)$ agit sur $\mathfrak{h}$ par $(g, H) \in \mathrm{SU}(2) \times \mathfrak{h} \mapsto gHg^{-1}$.
– Vérifier que $\det \Phi(w) = \parallel w \parallel$, pour tout $w \in \mathbb{R}^3$. En déduire un homomorphisme $\phi\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3)$.
– Montrer que le morphisme ϕ est surjectif et que $\ker\phi = \pm I$.
– Conclure que ϕ est un revêtement à deux feuillets de $SO(3)$.

2. Groupe fondmentale, revêtements

Exercice 4.6. Soit X une espace topologique (loc. connexe par arcs, connexe) avec groupe fondamentale fini. Montrer que toute application continue de X dans un tore $\mathbb{T}^d$, $(d > 0)$, est homotope à une application constante (autrement dit est homotopiquement triviale).

Exercice 4.7. Soit G un groupe topologique localement connexe par arcs, connexe et soit $p\colon X \to G$ un revêtement.

– Soit e un point sur la fibre de l'élément neutre de G. Pour tout x_1, x_2 dans X soient $\gamma_i\colon [0,1] \to X$ des chemins de e à x_i. Soit γ_3 **le** relèvement à X du chemin $t \in [0,1] \mapsto p(\gamma_1(t))p(\gamma_2(t)) \in G$ satisfaisant $\gamma_3(0) = e$. Montrer que $\gamma_3(1)$ ne dépend que des classes d'homotopie de γ_1 et γ_2.
– Montrer qu'il existe une unique structure de groupe topologique sur X (à isomorphisme près) telle que p soit un épimorphisme de groupes.

Exercice 4.8. Soit $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ une application continue telle que l'image $f_*(\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})))$ ne soit pas le sous-groupe trivial de $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$. Montrez que f se relève en une application $\hat{f} : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ telle que $\hat{f}(-x) = -\hat{f}(x)$.

Exercice 4.9 (Espaces lenticulaires). Soient p, q deux entiers positifs premiers entre eux et soit ω une racine primitive p-ième de l'unité (par exemple $\omega = \exp(2\pi i/p)$). On note $\mathbb{S}^3$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2$:

$$\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Posons

$$j.(z_1, z_2) = (\omega^j z_1, \omega^{jq} z_2), \qquad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

– Vérifier que l'application $(j, (z_1, z_2)) \mapsto j.(z_1, z_2)$ définit, par passage au quotient, une action du groupe $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^3$.
– Montrer que l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{S}^3$ ainsi définie est libre. En déduire que le quotient de $\mathbb{S}^3$ par l'action ci-dessus définie est une variété différentielle C^∞, dite *espace lenticulaire* $L(p, q)$.
– Vérifier que $L(2, 1) = \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.