Topologie 2

Exercice 2.1 (Lemme de la maille). Soit (X, d) un espace métrique compact et $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in X$ il existe $\alpha \in I$ tel que la boule ouverte $B(x,\delta)$ est contenue dans U_α.

Exercice 2.2 ($\mathbb{S}^n$ est simplement connexe pour $n > 1$). Soit $n > 1$, $\mathbb{S}^n$ la sphère unité dans $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\mathbb{S}^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots |x_{n+1}^2 = 1\}$$

On pose $U_1 = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} > -1/2\}$ et $U_2 = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{S}^n \mid x_{n+1} < 1/2\}$ et $U = U_1 \cap U_2$.

(1) Montrer que U_1 et U_2 sont simplement connexes et que $U_1 \cap U_2$ est connexe par arcs.

(2) Montrer que si $\gamma\colon [0,1] \to S^n$ est un lacet alors il esiste $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k < t_{k+1} = 1$ tel que pour tout $i = 0, \dots, k$ l'image $\Gamma_1 = \gamma([t_i, t_{i+1}])$ est contenue dans un des deux ouverts U_j. Expliquer pourquoi on peut supposer que, si Γ_i est contenue dans une deux ouverts U_j, alors Γ_{i+1} est contenu dans l'autre.

(3) Soit $a \in U$. Montrer que pour tout $i = 0, \dots, k$ il existe un chemin α_i dans U allant de a à t_i. (On pose $\alpha_{k+1} = \alpha_0$).

(4) Soit γ_i le chemin obtenu par restriction de γ à l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$. Considérer les chemins

$$\alpha_i * \gamma_i * \alpha_{i+1}^{-1}$$

pour $i = 0, \dots, k$ et conclure que $\mathbb{S}^n$ est simplement connexe.

Exercice 2.3. Le cône au dessus d'un espace topologique X est l'espace $C(X)$ défini par

$$C(X) = X \times [0,1]/\sim$$

où $\sim$ est la relation $(x,t) \sim (y,s) \iff [(x,t) = (y,s) \text{ ou } t = s = 1]$.

(1) Montrer que le cône au dessus d'un espace séparé est séparé

(2) Montrer que le cône au dessus d'un espace X est connexe par arcs et simplement connexe.

(3) Montrer que le cône au dessus d'un espace X est localement connexe par arcs (resp. localement simplement connexe) si et seulement si X est localement connexe par arcs (resp. localement simplement connexe).

Exercice 2.4. La suspension $\Sigma(X)$ d'un espace X est l'espace $C(X)$ défini par

$$\Sigma(X) = X \times [-1,1]/\sim$$

où $\sim$ est la relation $(x,t) \sim (y,s) \iff [(x,t) = (y,s) \text{ ou } t = s = 1 \text{ ou } t = s = -1]$. (C'est donc la réunion de deux cônes au dessus de X).

(1) Montrer que la suspension $\Sigma(\mathbb{S}^n)$ est homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^{n+1}$, $(n = 0,1,2\dots)$.

(2) Montrer que la suspension d'un espace compact séparé et connexe par arcs est simplement connexe.

Exercice 2.5. Montrer que le l'application

$$f\colon (s,t)\in\mathbb{R}^2 \mapsto \big(\cos(2\pi t)(2+\cos(2\pi s)), \sin(t)(2+\cos(2\pi s)), \sin(2\pi s)\big)\in\mathbb{R}^3$$

définit, par passage au quotient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, un homéomorphisme du tore $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ sur son image.

Exercice 2.6. Soit Γ le groupe engendré par les deux isométries S et T du plan euclidien $\mathbb{E}^2$ définies par

$$S(x,y)=(x+1,-y),\quad T(x,y)=(x,y+1),\quad \forall (X,y)\in\mathbb{E}^2$$

(1) Montrer que Γ possède un sous-groupe d'indice 2 isomorphe à $\mathbb{Z}^2$.

(2) Montrer que Γ est un sous-groupe discret du groupe d'isométrie du plan euclidien.

(3) Montrer que Γ agit librement et de façon totalement discontinue sur $\mathbb{E}^2$.

Le *domaine de Dirichlet basé en* $p\in\mathbb{E}^2$ *pour l'action de* Γ *sur* $\mathbb{E}^2$ est défini par

$$D=\{q\in\mathbb{E}^2 \mid d(q,p)\le d(g.q,p), \forall g\in\Gamma\}.$$

où d dénote la distance euclidienne.

(4) Dessiner le domaine de Dirichlet D_0 basé en $p=(0,0)$.

(1) Reproduire le dessin du chat ci-dessous dans le domaine D_0.

(5) Dessiner l'orbite du chat sous l'action de Γ.