L. Flaminio

Topologie et Géométrie

A.A. 2014-2015

22 décembre 2014

Table des matières

Partie I
Topologie

Chapitre 1
Topologie

1.1 Topologie quotient

Soit X un espace topologique fixé dont la topologie (c.-à.d. la famille de parties ouvertes dans X) sera notée τ_X. Soit $f\colon X \to Y$ une fonction. Alors la famille

$$\tau_Y := \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \tau_X\} \tag{1.1}$$

est une topologie sur Y qui rend f continue. De plus si τ est une autre topologie sur Y pour laquelle $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau)$ est continue alors $\tau \subset \tau_Y$: en effet $E \in \tau$ implique $f^{-1}E \in \tau_X$ et donc $E \in \tau_Y$. Réciproquement si τ est une autre topologie sur Y telle que $\tau_Y \subsetneq \tau$ alors il existe $E \in \tau$ tel que $f^{-1}(E)$ n'est pas ouvert dans X. En conclusion τ_Y définie ci dessus est *la plus forte* topologie sur Y qui rend l'application f continue.

La topologie τ_Y définie par la formule (1.1) est dite *l'image (directe) de la topologie de X par f* ou *topologie finale.*

La topologie image directe est caractérisée par le théorème suivant :

Théorème 1.1.1. *Soit $f\colon X \to Y$ une fonction de l'espace topologique (X,τ_X) dans un ensemble Y ; notons τ_Y la l'image directe de topologie de X par f.*

Une application $g\colon (Y,\tau_Y) \to (Z,\tau_Z)$ est continue si et seulement si l'application composée $g \circ f\colon (X,\tau_X) \to (Z,\tau_Z)$ est continue.

Preuve. Puisque $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ est continue, si $g\colon (Y,\tau_Y) \to (Z,\tau_Z)$ est continue, il est ainsi de $g \circ f\colon (X,\tau_X) \to (Z,\tau_Z)$.

Supposons donc que $g \circ f\colon (X,\tau_X) \to (Z,\tau_Z)$ soit continue. Alors pour tout ouvert E de Z nous avons que l'ensemble $(g\circ f)^{-1}E = f^{-1}g^{-1}E$ est ouvert dans X ; par définition cela signifie $g^{-1}E \in \tau_Y$, ce qui montre que g est continue.

Théorème 1.1.2. *Soit $f\colon X \to Y$ une fonction de X, espace topologique de topologie τ_X, dans un ensemble Y ; supposons que τ est une topologie sur T telle que :*

1. *l'application $f\colon (X,\tau_X) \to (Y,\tau)$ est continue ;*

2. *pour toute application* $g\colon Y \to Z$*, si la fonction composée* $g \circ f\colon (X, \tau_X) \to (Z, \tau_Z)$ *est continue, alors* $g\colon (Y, \tau) \to (Z, \tau_Z)$ *est continue.*

Alors τ *coïncide avec l'image directe par* f *de la topologie* τ_X.

Preuve. Notons τ_Y la topologie image directe par f de la topologie τ_X. Nous avons déjà remarqué que toute topologie τ sur Y pour laquelle l'affirmation (1) ci-dessus est vraie est plus faible de la topologie τ_Y, c-à-d. $\tau \subset \tau_Y$.

Soit $(Z, \tau_Z) = (Y, \tau_Y)$ et soit $g\colon (Y, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ avec g l'application identique de Y dans lui-même. Puisque l'application $g \circ f\colon (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ est continue la condition (2) ci-dessus implique que la fonction $g\colon (Y, \tau) \to (Y, \tau_Y)$ est continue, c.-à.d. que la topologie τ est plus forte de la topologie τ_Y.

En conclusion, on a $\tau = \tau_Y$.

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble X. On écrit $x\mathscr{R}y$ si x et y sont équivalent ou simplement $x \sim y$ lorsque il n'y a pas d'ambiguïté. La classe d'équivalence de $x \in X$ est notée $[x]_{\mathscr{R}}$ ou $[x]$. L'espace quotient $X/\mathscr{R}$ est l'ensemble des classes d'équivalence. La projection canonique $p\colon X \to X/\mathscr{R}$ associe à chaque point x de X sa classe d'équivalence $[x]_{\mathscr{R}}$.

Soit X un espace topologique, $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X et $p\colon X \to X/\mathscr{R}$ la projection canonique. La topologie image directe par p de la topologie de X est une topologie sur $X/\mathscr{R}$ dite *topologie quotient*. On summarise cette discussion dans la définition suivante.

Définition 1.1.3. Soit X un espace topologique et $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Notons $X/\mathscr{R}$ l'espace quotient et $p\colon X \to X/\mathscr{R}$ la projection canonique. La *topologie quotient sur* $X/\mathscr{R}$ est la plus forte topologie sur $X/\mathscr{R}$ qui rend l'application p continue, c'est-à dire la famille

$$\tau_{X/\mathscr{R}} := \{U \subset X/\mathscr{R} \mid p^{-1}(U) \text{ ouvert dans } X\}.$$

Dorénavant l'espace $X/\mathscr{R}$, quotient d'un espace topologique X par une relation d'équivalence $\mathscr{R}$, sera toujours muni de la topologie quotient.

Rappelons que si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $f\colon X \to Y$ est une fonction sur X, on dit que *l'application* f *passe au quotient* $X/\mathscr{R}$ si $x\mathscr{R}y$ implique que $f(x) = f(y)$, autrement dit si f est constante sur chaque classe d'équivalence. Dans ce cas on définit *l'application quotient* $\tilde{f}\colon X/\mathscr{R} \to Y$ par $\tilde{f}([x]_{\mathscr{R}}) = f(x)$. En d'autres mots, une application $f\colon X \to Y$ passe au quotient $X/\mathscr{R}$ si et seulement s'il existe une application $\tilde{f}\colon X/\mathscr{R} \to Y$ telle que $f = \tilde{f} \circ p$, où p désigne la projection canonique $p\colon X \to X/\mathscr{R}$.

Le Théorème 1.1.1 nous donne alors le résultat suivant.

Théorème 1.1.4. *Soient* X *et* Y *deux espaces topologiques,* $\mathscr{R}$ *une relation d'équivalence sur* X *et* $f\colon X \to Y$ *une application qui passe au quotient* $X/\mathscr{R}$*. Alors l'application* $f\colon X \to Y$ *est continue si et seulement si l'application quotient* $\tilde{f}\colon X/\mathscr{R} \to Y$ *l'est.*

La topologie quotient est rarement une bonne topologie.

À illustration de cela, considérons la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ définie par $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$, (la droite réelle étant munie de la topologie ordinaire). L'espace quotient, qui d'habitude est noté $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, n'est pas séparé. En effet si U et V sont deux voisinages ouverts de deux points distincts $[x]$ et $[y]$ de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ leurs pré-image U' et V' dans $\mathbb{R}$ sont ouvertes (par définition) et denses (car il contiennent respectivement les ensemble $x + \mathbb{Q}$ et $y + \mathbb{Q}$ qui sont denses dans $\mathbb{R}$) ; donc U' et V' ont une intersection non vide ce qui implique que U et V se rencontrent.

Une condition nécessaire pour que l'espace quotient soit sépare est la suivante. Rappelons que le *graphe d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$*, définie sur un ensemble X, est le sous-ensemble de $X \times X$ donné par

$$\Gamma(\mathscr{R}) = \{(x, y) \in X \times X \mid x\mathscr{R}y\}.$$

Proposition 1.1.5. *Si la topologie quotient sur $X/\mathscr{R}$ est séparée alors le graphe de la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ est un sous-ensemble fermé de $X \times X$.*

Preuve. On écrira $x \sim y$ pour signifier que x et y sont points équivalents de X pour la relation $\mathscr{R}$. Montrons que si $X/\mathscr{R}$ est séparé alors le complémentaire $\Gamma(\mathscr{R})^c$ du graphe de $\mathscr{R}$ est ouvert dans $X \times X$.

Si $x \not\sim y$ il existe dans $X/\mathscr{R}$ deux ouverts disjoints U et V voisinages respectivement de $[x]$ et $[y]$. Soient $U' = p^{-1}(U)$ et $V' = p^{-1}(V)$ les pré-images dans X de U et V via la projection canonique $p\colon X \to X/\mathscr{R}$. L'ensemble $U' \times V'$ est un voisinage ouvert de (x, y) dans $X \times X$. Si $(x', y') \in U' \times V'$ alors $[x'] \in U$ et $[y'] \in V$ et donc on a $[x'] \neq [y']$ car U et V sont disjoints. Ceci équivaut à dire $x' \not\sim y'$ ou bien $(x', y') \in \Gamma(\mathscr{R})^c$. Donc $U' \times V'$ est un voisinage ouvert de (x, y) dans $X \times X$ contenu dans $\Gamma(\mathscr{R})^c$, ce qui prouve que $\Gamma(\mathscr{R})^c$ est ouvert et termine la preuve. □

Le théorème suivant montre que l'hypothèse que le graphe d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ soit entraîne une propriété de séparation faible de l'espace quotient, c'est-à dire que les singletons de l'espace quotient $X/\mathscr{R}$ sont fermés.

Théorème 1.1.6. *Soit X un espace topologique et soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X avec graphe fermé dans $X \times X$. Alors les classes d'équivalence $[x]$, $x \in X$, sont fermées. Par conséquent, les singletons de l'espace quotient $X/\mathscr{R}$ sont fermés.*

Preuve. Soient x un point de X et y un point de l'adhérence $\overline{[x]}$. Soit $U \times V$ un voisinage de (x, y) dans $X \times X$. Puisque $y \in \overline{[x]}$ il existe un point y' tel que $y' \in V \cap [x]$. Alors $(x, y') \in \Gamma(\mathscr{R})$ ce qui implique $(x, y') \in (U \times V) \cap \Gamma(\mathscr{R}) \neq \emptyset$. Donc (x, y) est adhérent à $\Gamma(\mathscr{R})$. Le graphe $\Gamma(\mathscr{R})$ étant fermé on conclut que $y \in [x]$. □

Avec des hypothèses beaucoup plus fortes des celles ci-dessus on peut néanmoins obtenir une réciproque partielle de la Proposition 1.1.5.

Définition 1.1.7. Une relation d'équivalence sur un espace topologique X est dite *ouverte* (respectivement *fermée*) si la projection canonique est une application ouverte (respectivement fermée).

Définition 1.1.8. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *saturé par la relation d'équivalence* $\mathscr{R}$ sur X s'il est une réunion de classes d'équivalence. Autrement dit, si $p : X \to X/\mathscr{R}$ désigne la projection canonique, un ensemble $A \subset X$ est saturé s'il existe $B \subset X/\mathscr{R}$ tel que $A = p^{-1}(B)$. Le *saturé d'un ensemble* $A \subset X$ est l'ensemble $[A] = p^{-1}(p(A))$.

Lemme 1.1.9. *Soient $A, B \subset X$ tel que A est saturé et $A \cap B = \emptyset$. Alors $A \cap [B] = \emptyset$.*

Preuve. Si $x \in A \cap [B]$ alors il existe $y \in B$ tel que $x \sim y$. Puisque A est saturé, $x \in A$ et $x \sim y$ impliquent que $y \in A$. Donc $A \cap B \neq \emptyset$. □

Évidemment l'espace quotient $X/\mathscr{R}$ est séparé si et seulement si pour tout $x, y \in X$ avec $x \not\sim y$ il existe deux ouverts disjoints et saturés, voisinages respectivement de x et y.

Théorème 1.1.10. *Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un espace topologique X dont le graphe est fermé dans $X \times X$. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

1. *La relation $\mathscr{R}$ est ouverte ;*
2. *L'espace X est compact et séparé.*

Alors l'espace quotient $X/\mathscr{R}$ est séparé ;

Preuve. (1) Supposons que l'application quotient $p\colon X \to X/\mathscr{R}$ soit ouverte et que le graphe $\Gamma(\mathscr{R})$ de $\mathscr{R}$ soit fermé dans $X \times X$. Si $x \not\sim y$ on a $(x, y) \notin \Gamma(\mathscr{R})$, et puisque $\Gamma(\mathscr{R})$ est fermé il existe deux voisinages ouverts U et V de x et y tels que $x' \not\sim y'$ pour tout point $(x', y') \in U \times V$. Les images $p(U)$ et $p(V)$ de U et V dans $X/\mathscr{R}$ sont alors deux ouverts disjoints, voisinages respectivement de $[x] = p(x)$ et de $[y] = p(y)$. Donc $X/\mathscr{R}$ est séparé.

(2) Supposons que l'espace X soit compact et que graphe $\Gamma(\mathscr{R})$ soit fermé dans $X \times X$ et donc compact. Soient $u, v \in X/\mathscr{R}$ tels que $u \neq v$. Par le Théorème 1.1.6 les classes d'équivalence $C_1 = p^{-1}(\{u\})$ et $C_2 = p^{-1}(\{q\})$ sont fermées dans X et disjointes. Donc il existe deux ouverts disjoint $U \subset X$ et $V \subset X$, voisinages respectivement des ensembles fermés $p^{-1}(\{u\})$ et $p^{-1}(\{q\})$ (car tout espace compact séparé est normal).

Soient $U' = X \setminus p^{-1}(p(X \setminus U))$ et $V' = X \setminus p^{-1}(p(X \setminus V))$. Les ensembles U' et V' sont saturés et contenus respectivement dans U et V, donc disjoints. Pour conclure la preuve il suffit de démontrer qu'il sont deux voisinages ouverts respectivement de C_1 et C_2.

Pour montrer qu'ils sont ouverts il suffit de vérifier que si $F \subset X$ est fermé alors le saturé de F est fermé. Or, si $P_2 : (x, y) \in X \times X \mapsto y \in X$ désigne la projection sur la deuxième coordonnée, le saturé de F est donné par $p^{-1}(p(F)) = P_2\big((F \times X) \cap \Gamma(\mathscr{R})\big)$ (en effet $p^{-1}(p(F))$ est l'ensemble des $y \in X$ tels qu'il existe

$x \in F$ avec $(x, y) \in \Gamma(\mathscr{R})$). Puisque $F \times X$ et $\Gamma(\mathscr{R})$ sont compacts, il en est de même des ensembles $(F \times X) \cap \Gamma(\mathscr{R})$ et $P_2\big((F \times X) \cap \Gamma(\mathscr{R})\big)$ car P_2 est continue. En conclusion $p^{-1}(p(F))$ est compact et donc fermé.

Il reste à vérifier que $C_1 \subset U'$ et $C_2 \subset V'$. Or, puisque C_1 est saturé et disjoint de $X \setminus U$, par le Lemme 1.1.9 on a $C_1 \cap [X \setminus U]$, c'est-à dire $C_1 \subset U'$. De même $C_2 \subset V'$. $\square$

1.2 Groupes topologiques

Pour un groupe G on note e_G l'élément neutre de G.

Définition 1.2.1. Un *groupe topologique* est un groupe G muni d'une topologie τ_G satisfaisant les conditions suivantes :

1. La topologie τ_G est séparée.
2. Les applications $(g, h) \in G^2 \mapsto gh \in G$ et $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$ sont continues.

Il est facile de voir que les deux applications de l'axiome 2 ci-dessus sont continues si et seulement si l'application $(g, h) \in G^2 \mapsto gh^{-1} \in G$ est continue.

Exemple 1.2.2. Tout groupe muni de la topologie discrète est un groupe topologique.

Exemple 1.2.3. Tout sous-groupe de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$, avec $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, est un groupe topologique pour la topologie induite de $\mathbb{F}^{n^2}$.

Exemple 1.2.4. Le groupe quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ muni de la topologie quotient n'est pas un groupe topologique car il n'est pas séparé.

Il suit de la définition que pour un groupe topologique G et tout $h \in G$ les applications $L_h : g \in G \mapsto hg$, $R_h : g \in G \mapsto gh$ et $C_h : g \in G \mapsto hgh^{-1}$ sont des homéomorphismes de G. Il sont dits respectivement la *translation à gauche par h*, la *translation à droite par h* et la *conjugaison par h*. Une conséquence facile de cela est le lemme suivant.

Lemme 1.2.5. *Dans un groupe topologique G les voisinages de $g \in G$ sont donnés par les ensembles gV (ou bien Vg), où V est un voisinage de l'élément neutre e_G de G.*

Tout sous-groupe H d'un groupe topologique G est un groupe topologique pour la topologie induite sur H par G. En plus on a

Proposition 1.2.6. *Soit H un sous-groupe d'un groupe topologique G. L'adhérence de H est un sous-groupe de G. Si H est distingué dans G l'adhérence $\overline{H}$ est sous-groupe distingué de G.*

Preuve. Il suffit de montrer que si $g \in \overline{H}$ et $h \in \overline{H}$ alors $gh^{-1} \in \overline{H}$. Par la continuité de l'application $(g_1, h_1) \in G \times G \to g_1 h_1^{-1} \in G$, pour tout voisinage V de gh^{-1} il existe un voisinage V_1 de g et un voisinage V_2 de h tel que $g_1 h_1^{-1} \in V$ pour tout $(g_1, h_1) \in V_1 \times V_2$. Puisque $g \in \overline{H}$ et $h \in \overline{H}$ il existe $g_1 \in V_1 \cap H$ et $h_1 \in V_2 \cap H$. Donc $g_1 h_1^{-1} \in V \cap H \neq \emptyset$, ce qui démontre que $gh^{-1} \in \overline{H}$.

Supposons que H soit distingué dans G. Puisque pour tout $g \in G$ la conjugation $h \in G \mapsto ghg^{-1} \in G$ est un homéomorphisme de G, on a, pour tout $g \in G$, $g\overline{H}g^{-1} = \overline{gHg^{-1}} = \overline{H}$, ce qui démontre que $\overline{H}$ est distingué dans G. □

Rappelons que, si H est un sous-groupe d'un groupe G, la relation définie par $x \sim y \iff y^{-1}x \in H$ est une relation d'équivalence sur G. La classe d'équivalence de $g \in G$ par cette relation est l'ensemble $gH = \{gh \mid h \in H\}$ est dite la *classe à gauche de g suivant H*. L'ensemble quotient de cette relation d'équivalence, l'ensemble classes à gauche suivant H de tous les éléments de G, est noté G/H. La définition de *classe à droite suivant H* est similaire et l'ensemble classes à droite Hg suivant H est noté $H\backslash G$.

Proposition 1.2.7. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. On muni G/H de la topologie quotient. L'application quotient $p\colon G \to G/H$ est ouverte.*

Preuve. Soit U un ouvert de G; il faut montrer que $p(U)$ est ouvert, ce qui équivaut à montrer que $p^{-1}\big(p(U)\big)$ est ouvert dans G. Or $p(U) = \{gH \in G/H \mid g \in U\}$ d'où $p^{-1}\big(p(U)\big) = \{gh \in G \mid g \in U, h \in H\} = \bigcup_{x \in H} Ux$; puisque Ux est ouvert pour tout $x \in G$ l'ensemble $p^{-1}\big(p(U)\big)$ une réunion d'ouverts et donc ouvert. □

Proposition 1.2.8. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. Le graphe de la relation de classe à gauche de H dans G est fermé dans $G \times G$ si et seulement si H est sous-groupe fermé de G.*

Preuve. Le graphe de la relation de classes à gauche de H dans G est la pré-image de H par l'application $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ de $G \times G$ dans G. La continuité de cette application implique que si H est est fermé dans G Le graphe de la relation de classes à gauche est fermé dans $G \times G$.

Si le graphe de la relation de classes à gauche de H dans G est fermé dans $G \times G$ alors la classe de l'élément neutre est H; elle est fermée dans G par le Théorème 1.1.6. □

Théorème 1.2.9. *Soit G un groupe topologique et H un sous-groupe de G. La topologie quotient sur G/H est séparée si et seulement si H est sous-groupe fermé de G.*

Preuve. Si H est est fermé dans G par les Propositions 1.2.7 et 1.2.8 l'application quotient est ouverte et la relation de classes à gauche de H dans G a un graphe fermé dans $G \times G$. Par le Théorème 1.1.10 la topologie quotient sur G/H est séparée.

Si la topologie quotient sur G/H est séparée alors, par la Proposition 1.1.5 la relation de classes à gauche de H dans G a un graphe fermé. La classe de l'élément neutre est H et elle est fermée dans G. □

Définition 1.2.10. Un sous-groupe Γ d'un groupe G est dit discret si la topologie induite par G sur Γ est la topologie discrète.

La définition précédente est équivalente à dire que tout singleton de Γ est ouvert et donc que tout élément de Γ est un pont isolé.

Lemme 1.2.11. *Soit X un espace topologique séparé et $A \subset X$. Si $x \in \overline{A}$ et V est un voisinage de x tel que $V \cap A$ est un ensemble fini, alors $x \in A$.*

Preuve. Soit $\{y_1, \dots, y_n\} := V \cap A \setminus \{x\}$. Il existe un voisinage W de x tel que $W \cap \{y_1, \dots, y_n\} = \emptyset$ car X est séparé. L'ensemble $W \cap V$ est un voisinage de x, ce qui implique que $W \cap V \cap A \neq \emptyset$, car $x \in \overline{A}$. Donc $W \cap V \cap A = \{x\}$. $\square$

Théorème 1.2.12. *Un sous-groupe discret Γ d'un groupe G est fermé.*

Preuve. Soit W un voisinage de l'élément neutre e_G de G tel que $W \cap \Gamma = \{i_G\}$. Il existe un voisinage V de i_G tel que $V^{-1}V \subset W$. Supposons que $g \in G$ soit adhérent à Γ. Alors $gV \cap \Gamma \neq \emptyset$. S'il existe au moins deux points distincts h_1 et h_2 in $gV \cap \Gamma$ on a $h_2^{-1}h_1 \in (V^{-1}V) \cap \Gamma \subset W \cap \Gamma = \{i_G\}$, une contradiction. Donc $gV \cap \Gamma$ est un singleton, ce qui implique, par le lemme, que $g \in \Gamma$. $\square$

Corollaire 1.2.13. *Si G est un groupe topologique et Γ un sous-groupe discret de G alors G/Γ, muni de la topologie quotient, est un espace topologique séparé.*

1.2.1 Groupes topologiques localement compacts

La classe de groupes topologiques est trop grande pour être utile. En général on se limite à étudier les groupes topologiques G localement compact.

On rappelle que un espace séparé est localement compact si tout point possède un voisinage compact. Pour un groupe cela revient à dire que l'élément neutre du groupe possède un voisinage compact.

Les sous-groupes fermés de $GL(n,\mathbb{R})$, dits *(*groupes linéaires), forment une classe importante de groupes topologiques localement compacts. La topologie de ces groupes est induite par la topologie de $\mathbb{R}^{n^2}$.

Un groupe sous-groupe H de $GL(n,\mathbb{R})$ est fermé dans $GL(n,\mathbb{R})$ si et seulement s'il est fermé dans $\mathbb{R}^{n^2}$. Si H est un sous-groupes fermé de $GL(n,\mathbb{R})$, l'élément neutre e_H de H possède un voisinage ouvert V dans $\mathbb{R}^{n^2}$ dont l'adhérence $\overline{V}$ est compacte (par exemple une boule ouverte). Puisque H est fermé $V \cap H$ est un voisinage ouvert de i_H dans H, dont l'adhérence est compacte, car incluse dans l'ensemble compact $\overline{V} \cap H$. Ceci démontre que les groupes linéaires sont localement compacts.

Comme exemple important de groupes topologiques non localement compacts citons celui des espaces de Banach de dimension infinie ; en effet. l'addition muni un tel espace d'une structure de groupe topologique ; un exercice classique montre que un espace de Banach est localement compact si et seulement si sa dimension est finie.

Théorème 1.2.14. *Soit G un groupe topologique localement compact et H un sous-groupe fermé de G. La topologie quotient sur G/H est séparée et localement compacte.*

Preuve. Que la topologie quotient sur G/H soit séparée a été déjà démontré. Si U est un compact contenant le voisinage ouvert gV de g (l'ensemble V étant un voisinage ouvert de l'élément neutre), son image dans G/H est compacte et contient l'image de gV dans G/H, qui, à son tour, est un voisinage ouvert de gH. Donc chaque point gH de G/H possède une base de voisinages compacts.

1.3 Actions continues de groupes topologiques

1.3.1 Définitions

Définition 1.3.1. Une *action ou opération (à gauche) d'un groupe G sur un ensemble X* est une application

$$(g,x) \in G \times X \mapsto gx \in X \tag{1.2}$$

telle que pour tout $(g,h) \in G \times G$ et tout $x \in X$ on a $(gh)x = g(hx)$ et $e_G x = x$, où on a noté e_G l'élément neutre du groupe G.

L'*orbite de* $x \in X$ est l'ensemble $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ c'est à dire l'image de l'application

$$g \in G \mapsto gx \in X.$$

Désormais on supposera que X est un espace topologique et que G est un groupe topologique dont l'élément neutre est noté e_G.

Définition 1.3.2. Une action ou opération (à gauche) d'un groupe topologique G sur un espace topologique X est dite *continue*, si l'application

$$(g,x) \in G \times X \mapsto gx \in X$$

est continue lorsque on muni $G \times X$ de la topologie produit. Dans ce cas on dit aussi que G *opère continûment* ou *agit continûment* sur X.

En particulier si G agit continûment sur X pour tout $g \in G$, l'application

$$L_g : x \in X \mapsto gx \in X,$$

est un homéomorphisme de X dit *translation par* g.

L'application

$$g \in G \mapsto L_g \in \text{Homéo}(X)$$

est un homomorphisme de groupes (l'ensemble $\text{Homéo}(X)$ est un groupe pour le produit donné pas la composition des homéomorphismes). Réciproquement si on se donne un homomorphisme de groupes $L : g \in G \mapsto L_g \in \text{Homéo}(X)$ tel que l'application $(g,x) \in G \times X \mapsto L_g(x) \in X$ soit continue, on obtient une action continue de G sur X en définissant $gx = L_g(X)$.

Définition 1.3.3. On dit qu'une action de G sur X est *effective* ou *fidèle* si $gx = x$ pour tout $x \in X$ implique que $g = e_G$. De façon équivalente on peut dire qu'une action de G sur X est *effective* ou *fidèle* si le noyau de l'homomorphisme $g \in G \mapsto L_g \in \text{Homéo}(X)$ est trivial.

Si une action continue de G sur un espace *séparé* X n'est pas fidèle l'ensemble

$$G' = \{g \in G \mid gx = x, \text{ pour tout } x \in X\}$$

est un sous-groupe distingué et fermé de G. L'action du groupe G/G' donnée par $(gG')x = gx$ est bien définie, continue et fidèle. Donc en général on peut supposer qu'une action est fidèle en passant à une action d'un groupe quotient.

Une action d'un groupe G sur un ensemble X détermine une relation d'équivalence : deux points x et y sont équivalents si et seulement si ils appartiennent à la même orbite. Donc

$$x \sim y \iff \exists g \in G \text{ tel que } gx = y.$$

L'espace quotient par cette relation est dit l'*espace des orbites* est noté X/G, si cela ne donne pas lieux des ambiguïtés.

Exemple 1.3.4. On fait opérer le sous-groupe H de G sur G par $h.g = hg$, c'est à dire par translations à gauche. Alors $g_1 \sim g_2$ ssi il existe $h \in H$ tel que $hg_1 = g_2$, autrement dit si et seulement si $Hg_1 = Hg_2$. On voit donc que l'espace des orbites est l'espace des classes à droite suivant H, qu'on note $H\backslash G$.

Si on fait opérer H sur G par translations à droite en définissant $h.g = gh^{-1}$, alors l'espace des orbites sera l'espace des classes à gauche suivant H, noté G/H. (Rappelons que ces espaces sont séparés si et seulement si H est fermé).

Exemple 1.3.5. On fait opérer le groupe G sur lui-même par $h.g = hgh^{-1}$, c'est à dire par conjugaisons. L'espace des orbites est donc l'ensemble des classes de conjugaisons de G.

Définition 1.3.6. On dit qu'une action d'un groupe G sur X est *transitive* si l'espace des orbites est réduit à un singleton.

En d'autres mots une action de G sur X est transitive si pour $(x, y) \in X \times X$ il existe $g \in G$ tel que $y = gx$.

Théorème 1.3.7. *La relation d'appartenance à la même orbite est une relation ouverte.*

Preuve. Soit U ouvert dans X et $p : X \to X/G$ la projection canonique. Il s'agit de démontrer que $p(U)$ est ouvert, ce que revient à dire que le saturé de U, l'ensemble $[U] = p^{-1}(P(U)$, est ouvert dans X. Or, le saturé de U est l'ensemble réunion de toutes les orbites des points de U, c'est à dire $[U] = \bigcup_{g\in G} gU = \bigcup_{g\in G} L_g(U)$. Puisque l'application L_g est un homéomorphisme de X, l'ensemble $L_g(U)$ est ouvert, quel que soit $g \in G$. L'ensemble $[U]$ étant une réunion d'ouvert il est ouvert. □

De ce théorème et du Théorème 1.1.10 on tire que l'espace quotient X/G est séparé si le graphe de la relation d'appartenance à la même orbite est fermé.

1.3.2 Sous-groupe de stabilité

Pour tout $x \in X$ l'ensemble

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

est un sous-groupe de G dit le *stabilisateur de* x, ou le *sous-groupe de stabilité de* x. Nous le notons également $\mathrm{Stab}_G(x)$.

Définition 1.3.8. On dit que G *agit librement sur* X ou que G *agit sans points fixes sur* X si pour tout $x \in X$ le sous-groupe de stabilité de x est trivial.

Évidemment une action libre est fidèle. Lorsque G agit sur X sans points fixes pour tout $x \in X$ l'application

$$g \in G \mapsto gx \in Gx$$

est une bijection de G sur l'orbite de x.

Proposition 1.3.9. *Les stabilisateurs d'une action continue d'un groupe topologique G sur un espace topologique* ***séparé*** *X sont des sous-groupes fermés de G.*

Preuve. Le stabilisateur G_x est la pré-image de du singleton $\{x\}$ par l'application continue $g \mapsto gx$ de G dans X. Or, le singleton $\{x\}$ est fermé car par hypothèse X est séparé et la pré-image d'un fermé par une application continue est un fermé. □

L'application $g \in G \mapsto gx \in Gx$ passe au quotient G/G_x et nous nous donne une application **bijective** et **continue**

$$gG_x \in G/G_x \mapsto gx \in Gx. \tag{1.3}$$

En effet l'égalité $gx = hx$ est vérifiée si et seulement si $h^{-1}g \in G_x$ c'est-à-dire si et seulement si $gG_x = hG_x$; cela montre que l'application $gG_x \in G/G_x \mapsto gx \in Gx$ est bien définie et injective. Sa continuité et surjectivité découlent du fait que l'application $g \in G \mapsto gx \in Gx$ est continue (voir Théorème 1.1.4) et surjective (par définition de Gx).

En général, toutefois, l'application(1.3) n'est pas un homéomorphisme (c.-à.d. l'inverse n'est pas continue).

Exemple 1.3.10. Soit le tore bidimensionnel $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$; on note $[x, y] \in \mathbb{T}^2$ la classe de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ modulo $\mathbb{Z}^2$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le groupe additif $\mathbb{R}$ opère continûment sur $\mathbb{T}^2$ par

$$t.[x, y] = [x + t, y + \alpha t], \qquad t \in \mathbb{R}, \quad [x, y] \in \mathbb{T}^2$$

Il est une exercice classique montrer que si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pour tout $[x, y] \in \mathbb{T}^2$ le stabilisateur $\mathbb{R}_{[x.x]}$ de $[x, y]$ est réduit au sous-groupe trivial $\{0\}$. Donc, dans ce cas, $\mathbb{R}/\mathbb{R}_{[x.x]} = \mathbb{R}$; toutefois, pour tout $[x, y] \in \mathbb{T}^2$, l'application

$$\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto [x + t, y + \alpha t] \in \mathbb{T}^2$$

n'est pas un homéomorphisme ! En effet, par le théorème de Dirichlet, pour tout il existe une suite $p_n/q_n \in \mathbb{Q}$ telle que $|\alpha q_n - p_n| < 1/q_n$ et $\lim q_n = +\infty$. Alors $q_n.[x, y] = [x + q_n, y + \alpha q_n] = [x, y + \alpha q_n - p_n] = [x, y + \epsilon_n]$ avec $|\epsilon_n| < 1/q_n$. Cela montre que $\lim q_n.[x, y] = [x, y]$; donc l'application réciproque ϕ^{-1} n'est pas continue.

1.3.3 Actions propres.

L'exemple ci-dessus suggère que l'obstacle pour que l'application (1.3) soit un homomorphisme réside dans le fait que le point gx peut se rapprocher de x pour des ééments $g \in G$ très ńéloignésż de G_x. En d'autres mots "l'orbite de x revient près de elle-même". Pour cette raison on donne les définitions suivantes.

Définition 1.3.11. Soient X un espace topologique séparé et Y un espace topologique séparé localement compact. Une application *continue* de X dans Y est dite *propre* si l'image réciproque de toute partie compacte de Y est un compact de X.

Proposition 1.3.12. *Soit f une application propre d'un espace topologique séparé X dans un espace topologique séparé localement compact Y. Alors f est fermée et l'image réciproque par f de tout singleton de Y est compacte.*

Preuve. Puisque l'espace Y est séparé et localement compact, les singletons de Y sont des ensembles compacts. Donc l'image réciproque par f de tout singleton de Y est compacte.

Soit $F \subset X$ fermé et soit y un point adhérent à $f(F)$. Il existe un voisinage compact W de y. On a alors $W \cap f(F) \neq \emptyset$, car y est adhérent à $f(F)$. L'ensemble $f^{-1}(W)$ est compact car f est propre et fermé car X est séparé. L'ensemble $f^{-1}(W) \cap F$ est l'intersection du fermé F et du compact fermé $f^{-1}(W)$ et donc fermé et compact. Cela implique que $W \cap f(F)$ est compact car $W \cap f(F)$ est l'image directe de $f^{-1}(W) \cap F$ par f. En particulier $W \cap f(F)$ est fermé, car Y est séparé : $W \cap f(F) = \overline{W \cap f(F)} = W \cap \overline{f(F)}$. Puisque $y \in \overline{f(F)}$ on conclut que y appartient à $f(F)$. Donc $f(F)$ est fermé. $\square$

Note : La réciproque de la proposition précédente est vraie aussi.

Définition 1.3.13. On dit que une action d'un groupe topologique G sur un espace localement compact et séparé X est *propre* si pour tout partie compacte K de X l'ensemble

$$G_K = \{g \in G \mid gK \cap K\}$$

est une partie compacte de G.

Il n'est pas difficile de voir que l'ensemble

$$G_{K_1,K_2} = \{g \in G \mid gK_1 \cap K_2\}$$

est fermé si $K_1 \subset X$ et $K_2 \subset X$ sont compacts [1].

Lemme 1.3.14. *Une action d'un groupe topologique G sur un espace localement compact et séparé X est propre si et seulement si pour toutes les parties compactes K_1 et K_2 de X l'ensemble*

$$G_{K_1,K_2} = \{g \in G \mid gK_1 \cap K_2\}$$

est une partie compacte de G.

Preuve. La suffisance est évidente. Supposons que l'action soit propre et soient K_1 et K_2 des compacts de X. Alors $K_1 \cup K_2$ est compact et $G_{K_1,K_2} \subset G_{K_1\cup K_2}$. Puisque G_{K_1,K_2} est un sous-ensemble fermé du compact $G_{K_1\cup K_2}$, il est compact. □

Une définition équivalente à celle donnée est la suivante : une action d'un groupe topologique G sur un espace localement compact et séparé X est propre si et seulement si l'application $(g, x) \in G \times X \mapsto (gx, x) \in X \times X$ est propre [2].

---

1. Soit $h \in G$ adhérant à G_{K_1,K_2} et soit $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ une suite généralisée d'éléments de G_{K_1,K_2} convergeant vers h. Alors pour tout $\alpha \in I$ il existe $x_\alpha \in K_2$ tel que $g_\alpha^{-1} x_\alpha$ appartient à K_1. Par la compacité de K_2, il existe une extraite de la suite généralisée $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ qui converge vers $x \in K_2$. On supposera alors que $(g_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge vers h et que $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge vers $x \in K_2$. Par la continuité de l'action et de l'inversion dans G, on a que $(g_\alpha^{-1} x_\alpha)_{\alpha\in I}$ converge vers $h^{-1}x$. Puisque K_1 est compact et X séparé, K_1 est fermé. Cela implique que la limite $h^{-1}x$ appartient à K_1. En conclusion $h \in G_{K_1,K_2}$.

2. En effet, si l'application $\phi\colon (g, x) \in G \times X \mapsto (gx, x) \in X \times X$ est propre, l'image réciproque du compact $K \times K \subset X \times X$ est compacte et est égale à $K' = \{(g, x) \in G \times X \mid x \in K, gx \in K\}$. L'image par la projection $(g, x) \in G \times X \mapsto g \in G$ de K' est l'ensemble $\{g \in G \mid g^{-1}K \cap K\}$, qui est donc compact. Par la continuité de l'application $g \in G \mapsto g^{-1} \in G$, on en déduit que G_K est compact.

Réciproquement si pour tout partie compacte K de X l'ensemble G_K est compact montrons que l'application $\phi\colon (g, x) \in G \times X \mapsto (gx, x) \in X \times X$ est propre. Soit C un compact de $X \times X$ et (g_α, x_α) une suite généralisée de $\phi^{-1}(C)$. Remarquons que puisque X est séparé $\phi^{-1}(C)$ est fermé. On a alors que $(g_\alpha x_\alpha, x_\alpha) \in C$ et par compactité il existe une sous-suite généralisée convergente vers un point $(y_1, y_2) \in C$. On supposera alors que $(g_\alpha x_\alpha, x_\alpha) \in C$ converge vers $(y_1, y_2) \in C$. Soit K_1 un voisinage compact de y_1 et K_2 un voisinage compact de y_2. On a alors que pour tout α assez grand $g_\alpha x_\alpha \in K_1$ et $x_\alpha \in K_2$, ce qui implique que g_α^{-1} appartient à l'ensemble compact G_{K_1,K_2}. Il existe donc une sous-suite généralisée extraite de (g_α) convergeante vers $g \in G_{K_1,K_2}$. En conclusion il existe une sous-suite généralisée extraite de (g_α, x_α) qui converge. Cela implique que $\phi^{-1}(C)$ est compact.

Théorème 1.3.15. *Soit G un groupe topologique opérant proprement sur un espace topologique localement compact séparé X. Alors*

1. *Les orbites Gx, $x \in X$, sont fermées dans X.*
2. *Pour tout $x \in X$ l'application $gG_x \in G/G_x \mapsto gx \in Gx$ est un homéomorphisme de G/G_x sur Gx.*
3. *L'espace quotient X/G est séparé.*

Preuve. 1. Soit $y \notin Gx$. Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage V de y tel que $V \cap Gx = \emptyset$.

Soit W un voisinage compact de y. Alors l'ensemble $G_0 = \{g \in G \mid g\{x\} \cap W \neq \emptyset\} = \{g \in G \mid gx \in W\}$ est compact. Or, $W \cap Gx = W \cap \cup_{g \in G_0} g\{x\} = W \cap G_0 x$ est un sous-ensemble compact de W. Puisque $y \notin W \cap Gx$ et X est séparé, il existe un voisinage V contenu dans W tel que $V \cap Gx = \emptyset$.

2. Suppose $(g_\alpha x)$ est une suite généralisée convergeant vers gx. Il faut montrer que $g_\alpha G_x$ converge vers gG_x. Évidemment $(g^{-1} g_\alpha x)$ converge vers x. Soit V un voisinage compact de x. Pour tout α assez grand on a $g^{-1} g_\alpha x \in V$, et donc $g^{-1} g_\alpha V \cap V \neq \emptyset$. Il s'ensuit que g_α appartient à un sous-ensemble compact de G, pour tout α assez grand. Soit (g_β) une extraite de la suite généralisée (g_α) qui converge vers $h \in G$. On obtient que $g_\beta G_x$ converge vers hG_x. Mais $g_\beta x$ converges vers gx et vers hx. Donc $hG_x = gG_x$. Puisque cela est vrai pour toute suite extraite (g_β), on a $\lim g_\alpha G_x = gG_x$.

3. Par le Théorèmes 1.1.10 et 1.3.7, il suffit de montrer que le graphe de la relation d'appartenance à une même orbite est fermé dans $X \times X$, ou bien que son complémentaire est ouvert. Supposons donc que $y \notin Gx$. Puisque Gx est fermée (par la partie 1.) il existe un voisinage V de x qui ne rencontre pas Gx ; ceci équivaut à dire que pour tout $g \in G$, $x \notin gV$, ou bien $x \notin GV$; évidemment on peut supposer que V est compact. Soit W un voisinage de compact de x. L'ensemble $G_{V,W} = \{g \in G \mid gV \cap W \neq \emptyset\}$ est compact dans G. Donc l'ensemble $G_{V,W} V$ est un sous-ensemble compact de GV et donc fermé (car X est séparé). Puisque $x \notin GV$, l'ensemble $W' = W \setminus G_{V,W} V = W \setminus GV$ est un voisinage de x. Or considérons le voisinage $W' \times V$ de (x, y). Si $(x', y') \in W' \times V$ on a $y' \in V$ et $x' \in W \setminus GV$, et donc $x' \notin Gy'$. Cela montre que le complémentaire du graphe de la relation est ouvert. □

1.4 Annexe : Sommaire de topologie

Nous renvoyons le lecteur aux cours élémentaires sur le sujet pour les notions fondamentales de topologie. Ici nous tenons à rappeler brièvement les propriétés fondamentales des espaces que nous considérerons.

1.4.1 Définitions fondamentales

Une *topologie* sur un ensemble X est une famille τ de parties de X, contenant la partie vide, l'ensemble X, et fermée par rapport aux opérations d'intersection finie et de réunion quelconque. Un *espace topologique* est un couple (X, τ) formé par un ensemble X et une topologie τ sur X, mais on écrit simplement « un espace topologique X », sans indication de la topologie, lorsque cela ne se prête pas à des ambiguïtés.

Les membres d'une topologie τ sur X, sont dites les *ouverts* de l'espace (X, τ). Les *parties fermées* sont, par définition, les complémentaires des parties ouvertes.

Un *voisinage d'un point* $x \in X$ est un ensemble contenant un ouvert auquel x appartient. Un ensemble V est un *voisinage d'un ensemble* $A \subset X$ s'il existe un ensemble ouvert O tel que $A \subset O \subset V$.

Si $A \subset X$ l'*intérieur* de A est le plus grand ouvert A° contenu dans A ; l'*adhérence* de A (ou *fermeture*) est le plus petit fermé $\overline{A}$ contenant A. Un point $x \in \overline{A}$ est un *point adhérent à* A.

Une fonction $f : X \to Y$ entre espaces topologiques est *continue en un point* $x \in X$ si la préimage de tout voisinage de $f(x)$ est un voisinage de x ; elle est *continue* si elle est continue en tout point $x \in X$; cela revient à dire que la préimage de tout ouvert de Y est une partie ouverte de X.

Un exemple de topologie sur un ensemble quelconque X est la *topologie discrète* pour laquelle toute partie de X est ouverte. La *topologie grossière* sur X est la topologie $\{\emptyset, X\}$.

La topologie usuelle de l'espace euclidien, ou de tout autre espace métrique (X, d), est formée par les parties qui sont des réunions de boules ouvertes. Cette topologie est dite *induite par la distance* d.

Une *base pour une topologie sur* X est une famille $\mathscr{B}$ de parties de X telle que tout ouvert de la topologie soit réunion d'ensembles de $\mathscr{B}$.

Pour que une famille $\mathscr{B}$ de parties de X soit une base d'une topologie il faut et il suffit que toute intersection finie d'ensembles de $\mathscr{B}$ soit réunion d'ensembles de $\mathscr{B}$. Il s'ensuit que, si $\mathscr{S}$ est une quelconque famille de sous-ensembles de X, la famille

$$\mathscr{B} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{\ell} U_i \mid U_i \in \mathscr{S}, \ell \in \mathbb{N} \right\}$$

est la base d'une topologie τ qui est la plus petite topologie contenant $\mathscr{S}$; on dira alors que τ est la topologie *engendrée par* $\mathscr{S}$.

Une famille $\mathscr{V}(x)$ de voisinages de $x \in X$ est un *base de voisinages de* x ou *système fondamentale de voisinages de* x si pour tout voisinage ouvert W de x il existe $V \in \mathscr{V}(x)$ tel que $V \subset W$.

Une suite (x_n) dans une espace topologique X *converge vers* $x \in X$ si pour tout voisinage V de x on a $x_n \in V$, pour tout n assez grand ; cela revient à dire que l'ensemble d'indices $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \notin V\}$ est fini, quel que ce soit le voisinage V de x. Dans ce cas on dira aussi que x est la *limite de la suite* (x_n) et on écrit $x = \lim x_n$.

Un point $x \in X$ est une *valeur d'adhérence*[3] d'une suite (x_n) de l'espace topologique X si pour tout voisinage V de x et pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $m > n$ avec $x_m \in V$; cela revient à dire que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in V\}$ est infini, quel que ce soit le voisinage V de x.

Évidemment on a :

Proposition 1.4.1. *Si la suite (x_n) converge vers x alors le point x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n).*

1.4.2 Topologie induite

Lorsque E est une partie non vide d'un espace topologique X et U un ouvert de X l'ensemble $U \cap E$ est dit la *trace* de U sur E. Il est facile de voir que les traces des toutes les parties ouvertes de X sur E, c'est -à dire la famille d'ensembles

$$\tau_E = \{U \cap E \mid U \text{ ouvert de } X\},$$

forment une topologie sur E. Cette topologie est dite la *topologie induite sur E* par la topologie de X. On dira que (E, τ_E) est un *sous-espace*[4] de l'espace topologique (X, τ).

Dorénavant nous supposerons que toute partie E d'un espace topologique X est munie de la topologie induite sur E par la topologie de X. Pour désigner une partie A de E, ouverte pour la topologie induite, et pour éviter toute confusion avec les parties ouvertes de X, on dira que A est *relativement ouvert* ou un *ouvert relatif*. Une terminologie analogue s'applique aux parties fermées, aux voisinages, etc. ; on parlera ainsi de partie *relativement fermée*, ou encore de *voisinage relatif*, etc.

On laisse au lecteur de vérifier les propriétés assez banales de la topologie induite :

Proposition 1.4.2. *Si F est une fonction continue définie sur une partie $\Omega \subset X$ et $E \subset \Omega$ alors la restriction de f à E, qu'on note $f_{|E}$, est continue.*

L'implication inverse est fausse : la fonction définie par $f(x) = x/|x|$, pour $x \in E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, est continue pour la topologie induite par $\mathbb{R}$ sur E, mais tout prolongement de f à $\mathbb{R}$ est discontinu en $0 \in \mathbb{R}$.

Proposition 1.4.3. *Une suite $x_n \in E \subset X$ converge pour la topologie relative τ_E si et seulement si la suite (x_n) converge pour la topologie de X et $x \in E$.*

Rappelons que une partie E d'un espace topologique X est connexe si elle est connexe pour la topologie induite sur E.

3. Ne pas confondre les valeur d'adhérence d'une suite avec les points adhérents à un ensemble

4. Ne pas confondre un sous-espace topologique avec un sous-espace vectoriel : ces sont des notions différentes.

1.4.3 Topologie produit

Rappelons que si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles, indexés par des indices i parcourant un ensemble I, on définit le produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ comme l'ensemble des fonctions $x\colon i \in I \mapsto x_i \in X_i$. On note une telle fonction par $x = (x_i)_{i\in I}$. On définit pour $j \in I$ la projection $p_j\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ par $p_j\big((x_i)_{i\in I}\big) = x_j$.

Lorsque l'ensemble des indices I est fini à n éléments, on peut supposer que $I = \{1,2,\dots,n\}$. On préfère alors utiliser les notations suivantes :

$$\prod_{i\in\{1,2,\dots,n\}} X_i = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \quad \text{et} \quad (x_i)_{i\in\{1,2,\dots,n\}} = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

La projection $p_j\colon X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to X_j$ est notée $p_j(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_j$, en supprimant des parenthèses inutiles.

Lorsque l'ensemble des indices I est infini dénombrable, on aura généralement $I = \mathbb{N}$ et on parle alors de suites $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.4.4. Soit $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologiques. On munit l'ensemble $X = \prod_{i\in I} X_i$ de la plus faible topologie sur X qui rends les projections $p_i : X \to X_i$ continues. Muni de cette topologie, dite topologie produit des topologie $(\tau_i)_{i\in I}$, l'ensemble X devient un espace topologique dit le produit topologique des espaces topologiques $(X_i,\tau_i)_{i\in I}$.

Cette définition est rendue possible par l'observation que si τ est une topologie sur X ayant la propreté que toutes les projections p_j sont continues, alors toute topologie plus forte que τ jouit de cette même propreté. La topologie produit est donc l'intersection de la famille (non vide !) de toutes les topologies qui rendent les projections $p_i : X \to X_i$ continues.

Soit n un entier positif quelconque, $\{i_1,,\dots i_n\} \subset I$ et pour tout $\ell = 1,\dots,n$ soit V_{i_ℓ} un ouvert dans X_{i_ℓ}. Le *cylindre* $C_{(i_1,,\dots i_n),(V_{i_1},\dots,V_{i_n})}$ est le sous-ensemble de $X = \prod_{i\in I} X_i$ définit par

$$C_{(i_1,,\dots i_n),(V_{i_1},\dots,V_{i_n})} = \big\{(x_i)_{i\in I} \in X \mid x_{i_1} \in V_{i_1},\dots,x_{i_n} \in V_{i_n}\big\}$$

Théorème 1.4.5. *Soit* (X,τ) *le produit topologique des espaces topologiques* $X = \prod_{i\in I} X_i$. *La topologie produit* τ *est engendrée par la base* $\mathscr{C}$ *formée par les cylindres.*

Preuve. Observons que

$$C_{(i_1,,\dots i_n),(V_{i_1},\dots,V_{i_n})} = p_{i_1}^{-1}(V_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(V_{i_n}).$$

Puisque les projections p_i sont continues pour la topologie produit et les ensembles V_{i_1}, ..., V_{i_n} sont ouverts dans X_{i_1}, ..., X_{i_n} le cylindre $C_{(i_1,,\dots i_n),(V_{i_1},\dots,V_{i_n})}$ est un ouvert de la topologie produit τ. Il s'ensuit que la famille des cylindres engendre une topologie τ' plus faible que τ.

Pour la topologie τ' toutes les projection p_i sont continues : en effet pour tout ouvert $V_i \subset X_i$ on a

$$p_i^{-1}(V_i) = C_{(i),(V_i)} \in \tau'.$$

Donc, par définition de la topologie produit, la topologie τ' est plus forte que la topologie τ.

En conclusion $\tau = \tau'$. □

Il est utile de considérer le cas du produit de deux espaces topologiques X_1 et X_2. Dans ces cas les cylindres dans $X_1 \times X_2$ sont les sous-ensembles de $X_1 \times X_2$ donnés par

$$V_1 \times V_2$$

avec V_1 ouvert dans X_1 et V_2 ouvert dans X_2. Donc un sous-ensemble $A \subset X_1 \times X_2$ est ouvert si et seulement si pour tout $(x_1, x_2) \in A$ il existe un ouvert $V_1 \subset X_1$ et un ouvert $V_2 \subset X_2$ tel que $(x_1, x_2) \in V_1 \times V_2 \subset A$.

1.4.4 Propriétés fondamentales des espaces topologiques

Les propriétés de espaces topologiques sont typiquement classés en propriétés de *dénombrabilité,* de *séparation,* de *compacité,* de *connexion,* bien que toutes ces propriétés soient, en général, synergiquement liées.

Propriétés de dénombrabilité

Une partie d'un espace topologique est *dense* si son adhérence est l'espace entier. Un espace espace topologique est *séparable* s'il possède une partie dénombrable et dense.

La topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ est un exemple de topologie séparable car $\mathbb{Q}^n$ est une partie dénombrable et dense de $\mathbb{R}^n$. L'espace $C([0,1];\mathbb{R})$ —l'espace des fonctions continues réelles sur $[0,1]$ muni de la distance définie par la norme $\|f\| = \sup|f(x)|$— est lui aussi séparable car les polynômes à coefficients rationnels forment une partie dénombrable et dense dans $C([0,1];\mathbb{R})$ (théorème de Weierstrass).

Un exemples banale de topologie non séparable est la topologie discrète sur un ensemble infini non dénombrable.

Définition 1.4.6. On dit que l'espace topologique (X,τ) satisfait le *premier axiome de la dénombrabilité* si pour tout point $x \in X$ il existe une *base dénombrable de voisinages ouverts* de x.

Théorème 1.4.7. *Tout espace métrique* (X,d) *satisfait le premier axiome de la dénombrabilité.*

Preuve. Les boules ouvertes de rayon rationnel centrées en $x \in X$ forment une base dénombrable de voisinages ouverts de x.

Lorsque $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base dénombrable de voisinages ouverts de $x \in X$ on pourra toujours supposer que $V_n \subset V_{n-1}$, quitte à remplacer la suite V_n par la suite $V'_n = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$.

Définition 1.4.8. Si l'espace topologique (X,τ) possède une *base dénombrable* on dit qu'il satisfait le *second axiome de la dénombrabilité* ou bine qu'il est *à base dénombrable*.

Un espace topologique à base dénombrable satisfait le premier axiome de la dénombrabilité et il est séparable. (Si $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de la topologie, pour $x \in X$ la famille $\mathcal{V} = \{W_n \mid x \in W_n\}$ est une base dénombrable de voisinage de x. En choisissant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un point $x_n \in W_n$ on obtient un ensemble $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dense et dénombrable).

Théorème 1.4.9. *Un espace métrique (X,d) satisfait le second axiome de la dénombrabilité si et seulement s'il est séparable.*

Preuve. Il suffit de montrer que si l'ensemble $D = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense alors la famille formée par les boules ouvertes de centre $x_n \in D$ et rayon rationnel engendrent la topologie.

Deux conséquences importantes du premier axiome de la dénombrabilité sont les suivantes

Proposition 1.4.10. *Soit X un espace topologique satisfaisant le premier axiome de la dénombrabilité. Un point $x \in X$ est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si et seulement s'il existe une suite extraite de (x_n) qui converge vers x.*

Preuve. Des définitions, on a immédiatement que si (x_n) converge vers x alors le point $x \in X$ est une valeur d'adhérence de cette suite ; cela ne requiert aucune condition sur l'espace.

Soit $x \in X$ une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) et soit (V_n) une base de voisinages ouverts de x. On peut supposer que $V_n \subset V_{n-1}$. Par définition, pour tout $n \in N$ l'ensemble $\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in V_n\}$ est infini ; soit $n_0 = \min\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in V_0\}$; par récurrence on définit

$$n_i = \min\{m \in \mathbb{N} \mid x_m \in V_i, \quad m > n_{i-1}\}.$$

On alors $n_i > n_{i-1}$ ce qui permet de définir une suite extraite (x_{n_i}) ; on aussi $x_{n_i} \in V_i$ et donc $x_{n_j} \in V_i$ pour tout $j \geq i$ (car $V_j \subset V_i$). Puisque tout voisinage V de x contient un voisinage V_i on peut conclure que la suite extraite (x_{n_i}) converge vers x. $\square$

Proposition 1.4.11. *Soit X un espace satisfaisant le premier axiome de la dénombrabilité. Une fonction $f\colon X \to Y$ est continue en $x \in X$ si et seulement pour toute* suite *de points $x_n \in X$ convergent vers x la suite $f(x_n)$ converge vers $f(x)$.*

Preuve. Soit f continue en x et soit $\lim x_n = x$, $x_n \in X$. Pour tout voisinage ouvert U de $f(x)$, $f^{-1}(U)$ est un voisinage de x ; cela implique que $x_n \in f^{-1}(U)$ pour tout n assez grand. Cela implique que $f(x_n) \in U$ pour tout n assez grand, c.-à-d. $\lim_n f(x_n) = f(x)$.

Soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un système fondamentale dénombrable de voisinages ouverts de x. On peut supposer que $V_n \subset V_{n-1}$. Si f n'est pas continue en x, il existe un voisinage ouvert U de $f(x)$ tel que $f^{-1}(U)$ n'est pas un voisinage de x. Donc pour tout $n \in N$ on a $V_n \not\subset f^{-1}(U)$, ce qui revient à dire qu'il existe $x_n \in V_n$ tel que $f(x_n) \notin U$. Voila alors une suite $x_n \in X$ convergente vers x et telle que la suite $f(x_n)$ ne converge pas vers $f(x)$. □

Propriétés de séparation

Définition 1.4.12. Un espace topologique est *séparé* ou de *Hausdorff*, ou encore satisfait l'axiome T_2, si points distincts de l'espace possèdent des voisinages disjoints.

La topologie usuelle de $\mathbb{R}^n$ est séparée, comme d'ailleurs l'est la topologie de tout espace métrique (X, d) : en fait, pour x, $y \in X$ avec $x \neq y$ les deux boules ouvertes de rayon $d(x, y)/2$ centrées respectivement en x et en y sont deux voisinages ouverts et disjoints de x et y.

Une conséquence facile et importante de l'axiome de séparation de Hausdorff est la suivante :

Proposition 1.4.13. *Dans une espace séparé une suite convergente converge vers un unique point.*

Preuve. En effet, soient $x \neq y$ et V_x et V_y des voisinages ouverts disjoints de x et y. Si la suite (x_n) converge vers x, pour tout n assez grand on a $x_n \in V_x$ ce qui implique $x_n \notin V_y$. Donc y n'est pas une valeur d'adhérence de la suite (x_n). □

Le contre-exemple à cette proposition est assez facile aussi : dans l'espace à deux point $X = \{a, b\}$ muni de la topologie grossière $\{\emptyset, X\}$ la suite $x_n = a$, $(n \in \mathbb{N})$, converge vers a et vers b.

Une autre propriété de séparation assez utile est la propriété de normalité

Définition 1.4.14. Un espace topologique est *normal* si les deux condition suivantes sont vérifiées :

1. tout singleton $\{x\}$ est un ensemble fermé.
2. deux ensembles fermés et disjoints ont des voisinages ouverts disjoints.

Proposition 1.4.15 (Lemme de Urysohn). *Si A et B sont deux ensembles fermés et disjoints d'un espace topologique normal X, il existe une fonction continue $f : X \to [0, 1]$ telle que $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B.*

Proposition 1.4.16 (Théorème d'extension de Tietze). *Si A est une partie fermée d'un espace topologique normal X et $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe une fonction continue $F : X \to \mathbb{R}$ telle que $f = F$ sur A.*

Propriétés de compacité

Soit E une partie d'un espace topologique X. Un recouvrement ouvert de E est une famille $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ d'ouverts de X telle que $\bigcup_{\alpha\in I} V_\alpha \supset E$. Un sous-recouvrement d'un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de E est la donné d'un sous-ensemble $J \subset I$ tel que $\bigcup_{\alpha\in J} V_\alpha \supset E$. Dans ce cas on dit que le recouvrement ouvert de E donné par $\mathcal{V}' = \{V_\alpha\}_{\alpha\in J}$ est *extrait* du recouvrement $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$. Si $J = \{\alpha_1,\dots,\alpha_n\} \subset I$ est un sous-ensemble fini et $\bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i} \supset E$ on dira que $\{V_{\alpha_1},\dots V_{\alpha_n}\}$ est un sous-recouvrement fini du recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de E.

Définition 1.4.17. Une partie K d'un espace topologique est *compacte*[5] si tout recouvrement ouvert $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de K contient un sous-recouvrement fini $\{V_{\alpha_1},\dots V_{\alpha_n}\}$.

Proposition 1.4.18. *Si (X,τ) est un espace séparé tout compact de X est fermé.*

Preuve. Si $K \subset X$ est compact et $y \not\in K$, pour tout $x \in K$ il existe deux ouvert disjoints V_x et W_x, voisinages respectivement de x et de y. La famille $\{V_x\}_{x\in K}$ forme un recouvrement ouvert de K. Donc il existe $x_1 \in K,\dots,x_n \in K$ tels que l'ensemble $V = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ est un ouvert contenant K. On pose $W = W_{x_1} \cap \cdots \cap W_{x_n}$. Les ensembles V et W sont ouverts est disjoints ; il sont aussi deux voisinages respectivement de K et de y. Donc le point y n'est pas adhérent à K. $\square$

En général est il est faux qu'un compact soit fermé : dans l'espace à deux points $X = \{a,b\}$ muni de la topologie $\{\emptyset,\{a\},X\}$, l'ensemble $\{a\}$ est compact et non fermé. Toutefois on a l'observation suivante

Proposition 1.4.19. *Un sous-ensemble fermé d'une partie compacte est compact.*

Preuve. Soit F est une partie fermée d'un espace compact K et $\mathcal{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ un recouvrement ouvert de F. La famille $\mathcal{V}' = \{X\setminus F\}\cup\mathcal{V}$ est alors un recouvrement ouvert de K. Puisque K est compact, on peut extraire de $\mathcal{V}'$ un sous-recouvrement fini $\{X\setminus F\}\cup\{V_{\alpha_1},\dots,V_{\alpha_k}\}$ de K. En particulier $\{V_{\alpha_1},\dots,V_{\alpha_k}\}$ est un recouvrement ouvert de F extrait de $\mathcal{V}$. $\square$

Théorème 1.4.20 (Théorème de Tykhonov). *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces compacts. Alors le produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ muni de la topologie produit est compact.*

Définition 1.4.21. Un espace topologique est dit *séquentiellement compact* si toute suite de l'espace possède (au moins) une sous-suite convergente

Théorème 1.4.22 (Bolzano-Weierstrass). *Tout espace espace topologique compact satisfaisant le premier axiome de la dénombrabilité est séquentiellement compact (de toute suite $(x_n \in X)$ on peut extraire une sous-suite convergente).*

5. Attention : pour certains auteurs français, qui suivent Bourbaki, un ensemble satisfaisant notre définition est dit "quasi-compact" et le mot "compact" signifie "quasi-compact" séparé. Nous préférons garder la distinction entre propriétés de recouvrement et propriétés de séparation car cela simplifie remarquablement beaucoup d'énoncés. Dans les espaces métriques les deux notions sont confondues.

Preuve. Par la Proposition 1.4.10 cela revient à démontrer que toute suite possède une valeur d'adhérence.

Supposons par l'absurde le contraire. Soit (x_n) une suite sans valeurs d'adhérence. Pour tout $x \in X$, du fait que x n'est pas une valeur d'adhérence de cette suite, on déduit qu'il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que l'ensemble $\{m \in \mathbb{N} \mid x_n \notin V_x\}$ est fini. Cela revient à dire que' il existe un entier m_x tels que $x_n \notin V_x$ pour tout $n > m_x$. Puisque la famille d'ouverts $\{V_x\}_{x \in X}$ recouvre X, il existe une sous-famille finie $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ qui recouvre X. Soit $m = \max\{m_{x_1} \dots, m_{x_n}\}$. Alors pour $n > m$ on a $x_n \notin V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n} = X$, une absurdité. □

Théorème 1.4.23 (Bolzano-Weierstrass, II). *Pour que un espace topologique X à base dénombrable soit compact il faut et il suffit qu'il soit séquentiellement compact (de toute suite $(x_n \in X)$ on peut extraire une sous-suite convergente).*

Preuve. Puisque une espace à base dénombrable satisfait le premier axiome de la dénombrabilité, la nécessité de la condition donnée découle du Théorème précédent.

Démontrons la suffisance : supposons que de toute suite on puisse extraire une sous-suite convergente et que donc toute suite possède une valeur d'adhérence. Procédons par l'absurde en supposant aussi X ne soit pas compact. Il existe alors un recouvrement $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ de X sans sous-recouvrements finis. Soit $\mathscr{B} = \{V_n\}$ une base dénombrable d'ouverts de X. Quitte à remplacer chaque U_α par la collection des $V_n \in \mathscr{B}$ tels que $V_n \subset U_\alpha$ on peut supposer que le recouvrement $\mathscr{U}$ est dénombrable et donc numéroter les éléments de $\mathscr{U} = \{U_1, \dots, U_n, \dots\}$. Soit $x_n \notin U_1 \cup \dots \cup U_n$; un tel élément existe car aucune collection finie des U_i ne recouvre X. Soit x une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Puisque $\mathscr{U}$ recouvre X il existe un élément $U_j \in \mathscr{U}$ avec $x \in U_j$; par définition on a $x_m \notin U_j$ pour tout $m \geq j$; cela contredit le fait que x soit une valeur d'adhérence de la suite (x_n). □

Remarque 1.4.24. On verra que dans les espaces métrique ce théorème est valable même sans l'hypothèse de l'existence d'une base dénombrable. Mais en général il est possible d'avoir des espaces topologiques compacts dans lesquels il existe des suites sans extraites convergeantes. Un exemple est le suivant.

Soit S la boule unité (fermée) dans l'espace $E = (\ell^\infty)'$ des formes linéaires continues sur l'espace de Banach ℓ^∞. Par le Théorème de Banach-Alaoglu S est compact pour la topologie $*$-faible sur E. Soit $(f_n) \in S$ la suite définie ainsi : pour tout $x = (x(j)) \in \ell^\infty$ on pose $f_n(x) = x(n)$. Pour toute suite extraite f_{n_j} nous pouvons trouver $x = (x(j)) \in \ell^\infty$ tel que la limite $\lim_j x(n_j)$ ne converge pas. Supposons que une extraite f_{n_j} converge vers $f \in E$. Alors pour tout $x = (x(j)) \in \ell^\infty$ on a $\lim_j f_{n_j}(x) = f(x)$. Puisque $\lim_j f_{n_j}(x) = \lim_j x(n_j)$ on obtient une contradiction.

Proposition 1.4.25. *Un espace topologique séparé et compact est normal.*

Preuve. Soit X un espace séparé et compact. Les singletons sont alors fermés car X est séparé. Soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints. Il faut démontrer qu'il existe deux ouvert disjoints O_1 et O_2 qui sont des voisinages respectivement de F_1 et F_2.

Au cours de la preuve du Théorème 1.4.18 on a montré l'assertion suivante : Si C est une partie compacte d'un espace séparé et $y \notin K$ alors il existe un voisinage ouvert V de K et un voisinage ouvert W de y tel que $V \cap W = \emptyset$.

Puisque F_1 et F_2 sont deux fermés de l'espace compact X, ils sont compact par le Théorème 1.4.19. Donc pour tout $y \in F_2$ il existe un voisinage ouvert V_y de F_1 et un voisinage ouvert W_y de y tel que $V \cap W = \emptyset$. La collection $\{W_y\}_{y \in F_2}$ est un recouvrement ouvert de F_2. La compacité de F_2 implique qu'il existe un ensemble fini $\{y_1, \dots, y_n\} \subset F_2$ tel que $\{W_{y_1}, \dots, W_{y_n}\}$ est un recouvrement de F_2. On pose $O_1 = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$ et $O_2 = W_{y_1} \cup \cdots \cap W_{y_n}$. On vérifie facilement que O_1 et O_2 sont des voisinages disjoints de F_1 et F_2 respectivement.

Théorème 1.4.26. *L'image d'un compact par une application continue est compacte.*

Preuve. Soit $f : X \to Y$ une application continue entre les espaces topologiques X et Y. Si $\mathscr{W} = \{W_\alpha\}$ est un recouvrement ouvert de $f(X)$ alors $\{f^{-1}(W_\alpha)\}$ est un recouvrement ouvert de X. Par la compacité de X, il existe $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ tels que $\{f^{-1}(W_{\alpha_1}), \dots, f^{-1}(W_{\alpha_n})\}$ est un recouvrement de X. Il est immédiat que $\{W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_n}\}$ est un recouvrement (fini) de $f(X)$.

Proposition 1.4.27. *Une application $f : X \to Y$ continue et injective d'un espace compact X dans un espace séparé Y est un homéomorphisme de X sur $f(X)$.*

Preuve. Soit $g : f(X) \to X$ l'application réciproque de la bijection $f : X \to f(X)$. Il faut montrer que pour tout ouvert $U \subset X$, l'ensemble $g^{-1}(U)$ est ouvert dans $g(X)$. Ceci est équivalent à montrer que pour tout fermé $F \subset X$, l'ensemble $g^{-1}(F)$ est fermé $g(X)$. Or on a $g^{-1}(F) = f(F)$. Nous devons donc montrer que l'image par f d'un fermé de X est fermée.

Si $F \subset X$ est fermé, alors F est compact (Théorème 1.4.19). L'image $f(F)$ est alors compacte (Théorème 1.4.26). Puisque Y est séparé, l'image $f(X)$ est aussi un sous-espace séparé et donc $f(F)$ est une partie compacte d'un espace séparé. Par la Proposition 1.4.18, l'ensemble $f(F)$ est fermé, ce qui conclut la démonstration. □

Définition 1.4.28. [6] Un espace topologique est dit *localement compact* si tout point de l'espace possède un voisinage compact.

Par exemple la topologie de $\mathbb{R}^n$ est localement compacte car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la boule fermée $BF(x, r)$, avec $r > 0$, est un voisinage compact de x.

Des exemples bien connus d'espaces métriques non localement compacts sont les espaces de Banach de dimension infinie ; par exemple l'espace $L^2([0,1])$ est séparable et non localement compact (l'ensemble formée par les fonctions $e_n(x) = A\exp(2\pi nix)$ est fermé, borné et non compact

6. La définition donnée d'espace localement compact ne fait pas l'unanimité. Les différentes définitions qu'on retrouve dans la littérature coïncident toutes si l'espace est séparé. Pour cette raison certains auteurs préfèrent inclure cette condition dans la définition d'espace localement compact.

Proposition 1.4.29. *Dans un espace localement compact et séparé tout point possède un système fondamentale de voisinages compacts.*

Preuve. Soit x un point dans l'espace localement compact et séparé X. Il faut montrer que pour tout voisinage W de x il existe un voisinage compact W' de x tel que $W' \subset W$.

Soit $V \subset X$ un voisinage compact de x. Alors V est fermé (Proposition 1.4.18) et, par définition de voisinage il existe U ouvert tel que $x \in U \subset \bar{U} \subset V$. Pour tout voisinage W de x l'ensemble $U \cap W$, ainsi que son adhérence $\overline{U \cap W}$ est un voisinage de x. On donc que $\{x\}$ et $Y = \overline{U \cap W} \setminus (U \cap W)$ sont deux fermés disjoints dans V. Il existe donc un voisinage ouvert O_1 de x et un voisinage ouvert O_2 de Y tels que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Posons $W' = \overline{O_1 \cap U \cap W}$. L'ensemble W' est un voisinage compact de x. On a $W' \subset \overline{O_1} \cap \overline{U \cap W} \subset \overline{U \cap W} \setminus O_2 \subset U \cap W \subset W$. □

Définition 1.4.30. Le *support* $\operatorname{supp} f$ *d'une fonction* $f\colon X \to \mathbb{R}$ est l'adhérence de ensemble des points x avec $f(x) \neq 0$.

Proposition 1.4.31 (Lemme de Urysohn, II). *Soit X un espace localement compact et séparé. Si K et F sont deux sous-ensembles disjoints de X, respectivement compact et fermé, alors il existe un une fonction continue à support compact $f\colon X \to [0,1]$ telle que $f = 1$ sur K et $f = 0$ sur F.*

Proposition 1.4.32 (Théorème d'extension de Tietze, II).

Soit X un espace localement compact et séparé. Si $K \subset X$ est compact et fermé et $f\colon K \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors il existe un une fonction continue à support compact $F\colon X \to \mathbb{R}$ telle que $f = F$ sur K.

On dit qu'un espace topologique est *dénombrable à l'infini* s'il est localement compact et *σ-compact*, c'est-à-dire qu'il admet un recouvrement dénombrable par des parties compactes. Évidemment $\mathbb{R}^n$, avec sa topologie usuelle, est dénombrable à l'infini.

Propriétés de connexité

L'espace à deux points $\{0,1\}$ sera muni de la topologie discrète.

Définition 1.4.33. On dit que une partie C d'un espace topologique X est *connexe* si toute fonction continue $C \to \{0,1\}$ est constante. Pour $C = X$ cela revient à dire les seules parties simultanément ouvertes et fermées de X sont l'ensemble vide $\emptyset$ et l'espace entier X.

Une définition équivalente dit que $C \subset X$ est connexe si et seulement si les seules parties simultanément ouvertes et fermées de C *pour la topologie induite par X sur C* sont l'ensemble vide $\emptyset$ et C tout entier[7].

7. Pour la notion de topologie induite cf. § 1.4.2

Théorème 1.4.34. *Les sous-ensembles connexes de la droite réelle sont les intervalles.*

Théorème 1.4.35 (Théorème de Bolzano). *L'image d'une partie connexe par une application continue est connexe*

Proposition 1.4.36.
— *La réunion de parties connexes d'intersection non vide est connexe.*
— *Si $C \subset X$ est connexe, alors l'adhérence $\overline{C}$ est elle aussi connexe.*
— *La réunion des parties connexes auxquelles un point $x \in X$ appartient est un ensemble connexe qu'on appelle la* composante connexe *de x.*

Évidemment la composante connexe de x est l'ensemble connexe contenant x maximal par rapport à l'inclusion.

Définition 1.4.37. Un espace topologique X est *localement connexe* si pour toute ouvert $U \subset X$ et tout $x \in U$ il existe un voisinage connexe N_x de x contenu dans U.

L'exemple classique d'espace connexe et non localement connexe est

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{Q}\}.$$

Définition 1.4.38. Un espace topologique X est *connexe par arcs* si tout couple de points $x, y \in X$ peuvent être joint par un arc ; cela signifie qu'il existe une fonction continue $f\colon [0,1] \to X$ avec $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

Proposition 1.4.39. *Un espace connexe par arcs est connexe.*

1.4.5 Compacité dans les espaces métriques

Définition 1.4.40. Une *suite de Cauchy* d'un espace métrique (X, d) est une suite (x_n) telle que $\lim_{n,m} d(x_n, x_m) = 0$.

De l'inégalité triangulaire on a

Proposition 1.4.41. *Une suite convergente d'un espace métrique est une suite de Cauchy.*

Définition 1.4.42. Un espace métrique est dit *complet* si toute suite de Cauchy de l'espace converge vers une limite.

Définition 1.4.43. Une partie *bornée* d'un espace métrique est une partie de diamètre fini, ou, ce qui revient au même, contenue dans une boule fermée de rayon fini. On dit que une partie $A \subset X$ d'un espace métrique est *totalement bornée* si pour tout $\epsilon > 0$ on peut recouvrir A par un nombre fini de boule de rayon $\epsilon > 0$.

L'exemple classique d'une partie bornée que n'est pas totalement bornée est le sous-ensemble E de $L^2([0,1];\mathbb{C})$ formé par les fonctions $e_n(x) = \exp 2\pi i n x$; la métrique ici est celle définie par la norme $\|f\| = (\int_{[0,1]} |f|^2)^{-1/2}$. Les fonctions e_n appartiennent à la boule unité fermée et sont à distance $\sqrt{2}$ l'une de l'autre ; donc une recouvrement de E par des boules ouvertes de rayon $\sqrt{2}/2$ doit être forcement infini, car chaque boule peut contenir au plus une des fonctions e_n.

Théorème 1.4.44. *Soit (X,d) un espace métrique complet. Une partie $A \subset X$ est compacte si et seulement si elle est fermée et totalement bornée.*

Théorème 1.4.45. *Soit V une espace vectoriel normé de dimension finie. Une partie $A \subset V$ est totalement bornée si et seulement si elle est bornée.*

Définition 1.4.46. Un espace topologique (X,τ) est *métrisable* s'il existe une distance d sur X telle que la topologie induite par d coïncide avec τ.

Théorème 1.4.47. *Un espace localement compact et séparé est à base dénombrable si et seulement s'il est métrisable et dénombrable à l'infini.*

Théorème 1.4.48. *Un espace métrique compact (X,d) est connexe si et seulement si pour tout $x,y \in X$ et pour tout $\epsilon > 0$ il existe une suite finie de points $x_0 = x, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} = y$ avec $d(x_i, x_{i+1}) < \epsilon$ ($i = 0,\ldots,n$).*

1.4.6 Filtres, d'après Bourbaki

Définition 1.4.49. Un *filtre* sur un ensemble X est une famille $\mathscr{F}$ de parties de X telle que

1. $\emptyset \notin \mathscr{F}$ et $X \in \mathscr{F}$.
2. Si $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}$ alors $A \cap B \in \mathscr{F}$.
3. Si $A \in \mathscr{F}$ et $B \supseteq A$ alors $B \in \mathscr{F}$.

La condition 2. ci dessus implique que un filtre est stable par intersection finie.

L'exemple usuel de filtre est le *filtre engendrée par un sous-ensemble non vide de $A \subset X$* :

$$\mathscr{F}(A) = \{B \subseteq X \mid B \supseteq A\}.$$

D'autres exemples :

1. Dans un espace topologique X la famille $\mathcal{V}_x$ de voisinages d'un point $x \in X$ est un filtre.
2. Si (x_n) est une suite dans X la famille

$$\mathscr{F} = \{A \subset X \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \; x_n \in A\} \tag{1.4}$$

   est un filtre sur X. (Cet exemple se généralise facilement aux suites généralisées de Moore-Smith).

Définition 1.4.50. On dit que le filtre $\mathscr{F}$ est *plus fine* que le filtre $\mathscr{G}$, ou que $\mathscr{F}$ raffine $\mathscr{G}$, si $\mathscr{F} \supseteq \mathscr{G}$. Dans ce cas on écrit $\mathscr{F} \succeq \mathscr{G}$.

Exemple 1.4.51. Le filtre $\mathscr{F} = \{X\}$ est moins fine que tous les filtres sur l'ensemble X.

Exemple 1.4.52. Un ensemble A est ouvert dans un espace topologique X si et seulement si pour tout $x \in A$ le filtre des voisinages $\mathscr{V}_x$ est plus fine que le filtre $\mathscr{F}(A)$ engendré par A.

Si $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ est une famille non vide de filtres sur l'ensemble X, l'intersection $\bigcap_{i\in I}\mathscr{F}_i$ est un filtre. Ce filtre est la borne inférieure de l'ensemble de filtres $\mathscr{F}_i$, $(i \in I)$. On le note $\bigwedge_{i\in I}\mathscr{F}_i$.

Proposition 1.4.53. *Soit $\mathscr{S}$ une famille de sous-ensembles de l'ensemble X. Il existe un filtre $\mathscr{F}$ contentant $\mathscr{S}$ si et seulement si pour toute sous-famille finie $\{A_1,\dots,A_n\}$ de $\mathscr{S}$ l'intersection $A_1\cap\cdots\cap A_n$ est non vide.*

Preuve. La condition est évidemment nécessaire car un filtre est stable par intersection finie et l'ensemble vide ne peut pas appartenir à un filtre. Soit $\mathscr{S}'$ la famille formée par les intersection finies de membres de $\mathscr{S}$ (en particulier $\mathscr{S}' \supseteq \mathscr{S}$). On pose

$$\mathscr{F}(\mathscr{S}) := \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathscr{S}'\ A \supseteq B\}.$$

Il est immédiat de vérifier que $\mathscr{F}(\mathscr{S})$ est un filtre contenant $\mathscr{S}$. □

Définition 1.4.54. Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de filtres sur un ensemble X. On dit que les filtres de cette famille sont *compatibles* si pour tout sous-ensemble fini $\{F_1,\dots,F_n\} \subseteq \bigcup_{i\in I}\mathscr{F}_i$ l'intersection $F_1\cap\cdots\cap F_n$ est non vide.

Exemple 1.4.55. Un sous-ensemble C d'un espace topologique X est fermé si et seulement si pour tout $x \in C$ le filtre $\mathscr{V}_x$ des voisinages de x est compatible avec le filtre $\mathscr{F}(C)$ engendré par l'ensemble C. Cela traduit l'assertion que F est fermé si et seulement si pour tout $x \in C$ et tout voisinage V de x l'intersection $V\cap C$ est non vide.

De la Proposition 1.4.53 on dérive immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1.4.56. *Soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de filtres sur un ensemble X. Il existe un filtre $\mathscr{F}$ plus fine de tous les filtres de la famille $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ si est seulement si les filtres de cette famille sont compatibles. Dans on pose*

$$\bigvee_{i\in I}\mathscr{F}_i = \mathscr{F}\Big(\bigcup_{i\in I}\mathscr{F}_i\Big).$$

Alors $\bigvee_{i\in I}\mathscr{F}_i \preceq \mathscr{F}$. est la borne supérieure de l'ensemble de filtres $\mathscr{F}_i$ $(i \in I)$.

Corollaire 1.4.57. *La relation de finesse $\preceq$ sur l'ensemble de filtres sur l'ensemble X est inductive : Toute chaîne admet un majorant.*

Preuve. Si la famille $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ est ordonnée totalement par la relation de finesse pour tout sous-ensemble fini $\{F_1,\ldots,F_n\} \subseteq \bigcup_{i\in I}\mathscr{F}_i$ il existe $j \in I$ tel que $\{F_1,\ldots,F_n\} \subseteq \mathscr{F}_j$. Donc l'intersection $F_1 \cap \cdots \cap F_n$ est non vide. En conclusion, la famille est compatible et $\bigvee_{i\in I}\mathscr{F}_i$ est un majorant de tout $\mathscr{F}_i$. □

Définition 1.4.58. Un *ultrafiltre* sur l'ensemble X est un filtre sur X maximal pour la relation de finesse.

Exemple 1.4.59 (Ultrafiltres triviaux). Pour tout élément x de l'ensemble X le filtre dur X défini par

$$\mathscr{U}_x = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$$

est un ultrafiltre. Ces ultrafiltres sont dit *triviaux*.

Proposition 1.4.60. *Pour tout filtre $\mathscr{F}$ sur l'ensemble X, il existe un ultrafiltre $\mathscr{U}$ tel que $\mathscr{F} \preceq \mathscr{U}$.*

Preuve. Par le corollaire 1.4.57 on peut appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble des filtres sur X. On obtiens ainsi un ultrafiltre majorant $\mathscr{F}$. □

Proposition 1.4.61. *Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble X. Si A et B sont des parties de X telles que $A \cup B \in \mathscr{U}$, alors soit $A \in \mathscr{U}$ soit $B \in \mathscr{U}$.*

Preuve. Supposons que $A \cup B \in \mathscr{U}$ et que $A \notin \mathscr{U}$. Il est facile de voir que la famille $\mathscr{F} = \{C \subset X \mid A \cup C \in \mathscr{U}\}$ est un filtre sur X. Ce filtre est plus fine que $\mathscr{U}$. Puisque $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre on a $\mathscr{F} = \mathscr{U}$, ce qui implique $B \in \mathscr{U}$. □

Par récurrence on obtient

Corollaire 1.4.62. *Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur l'ensemble X. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont des parties de X telles que $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \in \mathscr{U}$, alors une des parties A_i appartient à $B\mathscr{U}$.*

Théorème 1.4.63. *Un filtre $\mathscr{F}$ sur l'ensemble X est un ultrafiltre si et seulement si pour tout partie non vide $A \subseteq X$ on a soit $A \in \mathscr{F}$ soit $X \setminus A \in \mathscr{F}$.*

Preuve. Si $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre et $A \subseteq X$ est une partie non vide, par la proposition 1.4.61 une et seulement une des parties A et $X \setminus A$ est un membre de $\mathscr{F}$,

Supposons que $\mathscr{F}$ est un filtre sur l'ensemble X tel que pour tout partie non vide $A \subseteq X$ on a soit $A \in \mathscr{F}$ soit $X \setminus A \in \mathscr{F}$. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre contentant $\mathscr{F}$. Alors soit $A \in \mathscr{U}$ soit $X \setminus A \in \mathscr{U}$. Si $A \in \mathscr{U}$ alors $X \setminus A \notin \mathscr{U}$ et in particulier $X \setminus A \not{i}n\mathscr{F}$, Par hypothèse cela implique que $Ain\mathscr{F}$. Donc $\mathscr{U} \preceq \mathscr{F}$. □

Proposition 1.4.64. *Un filtre sur X est l'intersection de tous les ultrafiltres le contenant.*

Preuve. Soit $U(\mathscr{F})$ la collection des ultrafiltres contenant le filtre $\mathscr{F}$. Évidemment on a

$$\mathscr{F} \preceq \bigwedge_{\mathscr{U}\in U(\mathscr{F})} \mathscr{U}$$

Supposons que $A \subset X$ soit une partie non vide telle que $A \notin \mathscr{F}$. On pose $A' = X \setminus A$. Soit $F \in \mathscr{F}$. Puisque on a $F \nsubseteq A$, $F \cap A' \neq \emptyset$, ce qui implique que le filtre $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}(A')$ sont compatibles. Le filtre $\mathscr{F} \vee \mathscr{F}(A')$ est contenu dans un filtre maximal $\mathscr{U}$. Du fait que $A' \in \mathscr{U}$ on tire que $A \notin \mathscr{U}$ (Théorème 1.4.63). Donc $A \notin \bigwedge_{\mathscr{U} \in U(\mathscr{F})} \mathscr{U}$. □

1.4.6.1 Convergence des filtres dans les espaces topologiques

Définition 1.4.65. On dit que un filtre $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X converge vers $x \in X$, et on écrit $x = \lim \mathscr{F}$, si $\mathscr{F}$ est plus fine du filtre des voisinages $\mathscr{V}_x$:

$$x = \lim \mathscr{F} \iff \mathscr{V}_x \preceq \mathscr{F}.$$

Cette définition généralise la notion de convergence comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.4.66. Si $\mathscr{F}$ est le filtre défini par une suite (x_n) (cf. eq. (1.4) alors $x = \lim \mathscr{F}$ si et seulement si $x = \lim x_n$.

Définition 1.4.67. On dit que $x \in X$ est une *valeur d'adhérence* d'un filtre $\mathscr{F}$ sur un espace topologique X si le filtre $\mathscr{F}$ est compatible avec le filtre des voisinages $\mathscr{V}_x$: pour tout $F \in \mathscr{F}$ et tout voisinage V de x l'on a $V \cap F \neq \emptyset$.

Remarque 1.4.68. Donc $x \in X$ est une *valeur d'adhérence* d'un filtre $\mathscr{F}$ si et seulement si pour tout $F \in \mathscr{F}$ on a $x \in \overline{F}$.

Proposition 1.4.69. *Si $\mathscr{U}$ est un ultrafiltre sur l'espace topologique X et $x \in X$ est une valeur d'adhérence de $\mathscr{U}$ alors $x = \lim \mathscr{U}$.*

Preuve. Puisque $\mathscr{V}_x$ et $\mathscr{U}$ sont compatibles le filtre $\mathscr{V}_x \vee \mathscr{U}$ est bien défini et majore $\mathscr{U}$. Mais $\mathscr{U}$ est maximal. Donc $\mathscr{V}_x \vee \mathscr{U} = \mathscr{U}$ ce qui implique $\mathscr{V}_x \preceq \mathscr{U}$. □

Théorème 1.4.70. *Soit X un espace topologique. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *X est un espace compact.*
2. *tout filtre sur X admet une valeur d'adhérence.*
3. *tout ultrafiltre dans X converge.*

Preuve. 1. $\Longrightarrow$ 2. Supposons que X est compact. Alors pour toute famille d'ensembles fermés $(F_i)_{i \in I}$ ayant la propreté d'intersection finie[8] on a $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur X. Pour tout sous-ensemble fini $\{F_1, \dots, F_k\} \subseteq \mathscr{F}$ on a $F_1 \cap \dots \cap F_k \neq \emptyset$ et a fortiori $\overline{F}_1 \cap \dots \cap \overline{F}_k \neq \emptyset$. La famille d'ensembles fermés $\{\overline{F} \mid F \in \mathscr{F}\}$ a donc la propreté de l'intersection finie. Donc il existe $x \in \bigcap_{F \in \mathscr{F}} \overline{F}$. Par la remarque 1.4.68, le point x est une valeur d'adhérence du filtre $\mathscr{F}$.

8. On dit que une famille $(F_i)_{i \in I}$ a la propreté de l'intersection finie si pour tout sous-famille finie $\{F_{i_1}, \dots, F_{i_k}\}$ l'intersection $F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k}$ est non vide.

2. $\Longrightarrow$ 3. Un ultrafiltre qui admet une valeur d'adhérence converge vers cette valeur.

3. $\Longrightarrow$ 1. Supposons que tout ultrafiltre dans X converge et soit $\mathscr{S} = (F_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles fermés ayant la propreté d'intersection finie. Par la Proposition 1.4.53 il existe un filtre $\mathscr{F}$ contenant la famille $\mathscr{S}$ et par la Proposition 1.4.60 un ultrafiltre $\mathscr{U}$ plus fine que $\mathscr{F}$. Soit $x = \lim \mathscr{U}$. Pour tout $V \in \mathscr{V}_x$ et pour tout $U \in \mathscr{U}$, on a $V \cap U \neq \emptyset$ car $\mathscr{V}_x \preceq \mathscr{U}$. En particulier pour tout $V \in \mathscr{V}_x$ et pour tout $F_i \in \mathscr{S}$, on a $V \cap F_i \neq \emptyset$. Cela implique que $x \in \overline{F}_i = F_i$ pour tout $F_i \in \mathscr{S}$. Donc $x \in \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset$. □

1.4.6.2 Image directe des filtres

Définition 1.4.71. Soit $f\colon X \to Y$ et soit $\mathscr{F}$ un filtre sur X, On pose

$$f_*\mathscr{F} = \{A \subset Y \mid f^{-1}(Y) \in \mathscr{F}\}.$$

Il est immédiat de vérifier que $f_*\mathscr{F}$ est un filtre sur Y qu'on appelle l'image directe du filtre $\mathscr{F}$ par f.

Lemme 1.4.72. *L"image directe d'un ultrafiltre par une application est un ultrafiltre.*

Preuve. Soit $f\colon X \to Y$ une application et soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur X. Soit $A \subseteq Y$. Soit $f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$ soit $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$, par le Théorème 1.4.63. Donc soit $A \in f_*\mathscr{U}$ soit $Y \setminus A \in f_*\mathscr{U}$. Par ce même théorème $f_*\mathscr{U}$ est un ultrafiltre. □

Lemme 1.4.73. *Soient $f\colon X \to Y$ une application continue entre espaces topologique et $\mathscr{F}$ un filtre sur X qui converge vers $x \in X$. Alors le filtre $f_*\mathscr{F}$ image directe converge vers $f(x)$.*

Preuve. Soit $A \in \mathscr{V}_{f(x)}$. Puisque f est continue $f^{-1}(A)$ est un voisinage de x ; autrement dit $f^{-1}(A) \in \mathscr{V}_x \preceq \mathscr{F}$. Par définition cela signifie $A \in f_*\mathscr{F}$. Donc $\mathscr{V}_{f(x)} \preceq f_*\mathscr{F}$. □

1.4.6.3 Filtres dans les produits et le Théorème de Tykhonov

Théorème 1.4.74. *Soient $(X_i)_{i\in I}$ des espaces topologiques et $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$, $j \in I$, les projections canoniques définies sur le produit topologique de ces espaces. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur $\prod_{i\in I} X_i$. Le filtre $\mathscr{F}$ converge dans $\prod_{i\in I} X_i$ si et seulement si pour tout $i \in I$ le filtre $(p_i)_*\mathscr{F}$ converge dans X_i.*

Preuve. Puisque les projections canoniques sont continue, le lemme précédent montre que la condition est nécessaire. Supposons donc que pour tout $i \in I$ le filtre $(p_i)_*\mathscr{F}$ converge dans X_i vers $x_i \in X_i$. Par définition cela signifie que $\mathscr{V}_{x_i} \preceq (p_i)_*\mathscr{F}$, ou bien que pour tout V_i voisinage de x_i on a $p_i^{-1}(V_i) \in \mathscr{F}$.

On pose $x = (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} X_i$. Pour tout voisinage V de x dans $\prod_{i \in I} X_i$ il existe $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$ et voisinages V_j de x_{i_j} dans X_{i_j}, $j = 1, \dots, k$, tel que

$$V \supseteq p_{i_1}^{-1}(V_1) \cap \cdots \cap p_{i_k}^{-1}(V_k) \in \mathscr{F}.$$

Donc $\mathscr{V}_x \in \mathscr{F}$. □

Théorème 1.4.75 (Théorème de Tykhonov). *Le produit topologique d'espaces compact est compact.*

Preuve. Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre sur $X = \prod_{i \in I} X_i$, où $(X_i)_{i \in I}$ est une famille d'espaces topologiques compact. Notons $p_i : X \to X_i$, $i \in I$, les projections canoniques. On a alors que $(p_i)_* \mathscr{U}$ est un ultrafiltre dans X_i (lemme 1.4.72). Par la compacité de X_i et le Théorème 1.4.70 l'ultrafiltre $(p_i)_* \mathscr{U}$ converge vers $x_i \in X$. Cela étant vrai pour out $i \in I$, l'ultrafiltre $\mathscr{U}$ converge dans X, par le Théorème précédent. Encore par le Théorème 1.4.70 on conclut que X est compact. □

Chapitre 2
Relèvements

2.1 Homotopies, Chemins

Définition 2.1.1. Deux application continues $f_0, f_1 \colon X \to Y$ entre espace topologiques sont dites *homotopes* s'il existe une application continue $F \colon (x,t) \in X \times [0,1] \mapsto F_t(x) \in Y$ satisfaisant $F_0 = f_0$ et $F_1 = f_1$. L'application F est dite alors une *homotopie* de f_0 vers f_1.

Exemple 2.1.2. Toute application d'un espace topologique X dans $\mathbb{R}^n$ est homotope à l'application constante f_0 définie par $f_0(x) = 0$ pour tout $x \in X$. En effet il est immédiat de vérifier que si $f_1 \colon X \to \mathbb{R}^n$ est application continue alors $F_t(x) = t f_1(x)$ est une homotopie de f_0 vers f_1.

Il est facile de voir que la relation d'homotopie entre applications continues de X vers Y est une relation d'équivalence.

Définition 2.1.3. Un *arc* ou *chemin* dans un espace topologique X est une application continue $\alpha \colon [0,1] \to X$. Les points $\alpha(0)$ et $\alpha(1)$ sont dits les *extrémités de l'arc α*. Deux points x et y dans X sont *joignables par un arc* s'il existe un arc ayant ces deux points pour extrémités. Un arc tel que $\alpha(0) = \alpha(1) = x$ est dit un *lacet basé en x*.

L'ensemble des chemins forme un "groupoïde'' : le *chemin inverse* d'un chemin $\alpha \colon [0,1] \to X$ est défini par $\alpha^{-1}(t) := \alpha(1-t)$; si α est un chemin allant de x à y et β est un chemin allant de y à z on définit le *chemin composé* $\alpha * \beta$ allant de x à z par la formule

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0/1/2] \\ \beta(2t-1), & t \in [1/2,1] \end{cases}.$$

Donc la composition de deux chemins n'est possible que si le deuxième chemin "parts" là où le premier chemin "se termine". Il est clair que :

— Le chemin inverse d'un lacet basé en $x \in X$ est un lacet (basé en x) ;
— La composition de deux lacets basés en $x \in X$ est possible est elle est aussi un lacet basé en x.

Définition 2.1.4. On dit que deux chemins $\alpha_0, \alpha_1 \colon [0,1] \to X$ sont *homotopes à extrémités fixées (ou bout fixés)* s'il existe une homotopie $F : (s,t) \in [0,1] \times [0,1] \to F_t(s) \in X$ de α_0 vers α_1 telle que, pour tout $t \in [0,1]$, l'on a $F_t(0) = \alpha_0(0) = \alpha_1(0)$ et $F_t(1) = \alpha_0(1) = \alpha_1(1)$.

Une chemin β est un reparamétrage du chemin α s'il existe un application continue et croissant ϕ de l'intervalle $[0,1]$ sur lui-même tel que $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$, pour tout $t \in [0,1]$. Si le chemin β est un reparamétrage du chemin α alors ces chemins sont homotopes à extrémités fixées : si $\beta(s) = \alpha(\phi(s))$ il suffit de poser $F_t(s) = \alpha((1-t)s + t\phi(s))$.

La définition de composition de chemins n'est pas associative : en général $(\alpha * \beta) * \gamma \neq \alpha * (\beta * \gamma)$; toutefois ces deux chemins sont l'un le reparamétrage de l'autre est sont donc homotopes. Dans la suite, nous écrirons $\alpha * \beta * \gamma$ lorsque le paramétrage du chemin $(\alpha * \beta) * \gamma$ est sans importance, par exemple lorsque on s'intéressera à la classe d'homotopie de ce chemin.

Notation. On note $[\alpha]$ la classe d'homotopie à extrémités fixées du chemin $\alpha \colon [0,1] \to X$.

2.1.1 Le groupe fondamentale

Définition 2.1.5. Un *espace topologique pointé* est un couple (X, x_0) formé d'un espace topologique X et d'un point $x_0 \in X$.

Définition 2.1.6. L'*espace des lacets de l'espace pointé* (X, x_0) est, par définition, l'ensemble $\Gamma(X, x_0)$ des lacets basés en x_0 de X.

Proposition 2.1.7. *Les classes d'homotopie à extrémités fixées des lacets de l'espace pointé* (X, x_0) *forment un groupe pour l'opération*

$$[\alpha]\,[\beta] = [\alpha * \beta].$$

Pour cette opération l'élément neutre est la classe d'homotopie à extrémités fixées du lacet trivial I_{x_0} *défini par* $I_{x_0}(s) = x_0$ *pour tout* $s \in [0,1]$. *L'inverse de la classe d'un lacet* α *est la classe du lacet inverse* α^{-1}.

Preuve. D'abord il faut montrer que l'opération est bien définie. Si F et G sont des homotopie à bouts fixés respectivement de α_0 vers α_1 et de β_0 vers β_1, on vérifie que l'application

$$H_t(s) = \begin{cases} F_t(2s) & s \in [0,1/2] \\ G_t(2s-1) & s \in [1/2,1] \end{cases}$$

est continue et qu'elle est une homotopie à bouts fixés de $\alpha_0 * \beta_0$ vers $\alpha_1 * \beta_1$.

On note I_{x_0} le chemin trivial $I_{x_0}(s) = x_0$ pour tout $s \in [0,1]$. Si $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$ alors le lacet $\alpha * \alpha^{-1}$ est homotope à extrémités fixées à I_{x_0}. Il suffit de poser

$$F_t(s) = \begin{cases} \alpha(2ts) & t \in [0,1/2] \\ \alpha^{-1}(1-2t(1-s)) & t \in [1/2,1] \end{cases};$$

et vérifier que l'application F est une homotopie à extrémités fixées de I_{x_0} vers $\alpha * \alpha^{-1}$. Ceci étant vrai pour tout lacet α on a aussi que le lacet $\alpha^{-1} * \alpha = \alpha^{-1} * (\alpha^{-1})^{-1}$ est homotope à extrémités fixées au lacet I_{x_0}. De plus les lacets $\alpha * I_{x_0}$ et $I_{x_0} * \alpha$ sont des reparamétrages du lacet α et donc homotopes à extrémités fixés au lacet α. Donc si on a pour tout $\alpha \in \Gamma(X, x_0)$

$$[I_{x_0}]\,[\alpha] = [\alpha]\,[I_{x_0}] = [\alpha] \quad \text{et} \quad [\alpha]\,[\alpha^{-1}] = [\alpha^{-1}]\,[\alpha] = [I_{x_0}].$$

L'associativité du produit découle de l'observation précédente que les lacets $(\alpha * \beta) * \gamma$ et $\alpha * (\beta * \gamma)$ sont l'un le reparamétrage de l'autre est sont donc homotopes à extrémités fixées.

Définition 2.1.8. Le *groupe fondamentale de l'espace pointé* (X, x_0) est le groupe des classes d'homotopie à extrémités fixées des lacets de l'espace pointé (X, x_0). On note ce groupe $\pi_1(X, x_0)$.

Proposition 2.1.9. *Soit X un espace topologique connexe par arcs. Alors pour tout x et y dans X et pour tout chemin γ joignant x à y l'application*

$$C_\gamma : \alpha \in \Gamma(X, y) \mapsto (\gamma * \alpha) * \gamma^{-1} \in \Gamma(X, x)$$

induit, par passage au quotient, un isomorphisme de $\pi_1(X, y)$ sur $\pi_1(X, x)$.

Pour un espaces connexe par arcs X on utilise souvent l'expression "le groupe fondamentale de X''; par cela il faut entendre la classe d'isomorphisme du groupe $\pi_1(X, x_0)$, pour un quelconque point $x_0 \in X$.

Théorème 2.1.10. *Le groupe fondamentale de $\mathbb{R}^n$ est trivial.*

Preuve. On a vu dans l'exemple 2.1.2 que tout lacet basé en 0 est homotope (à bouts fixés) au lacet trivial I_0. □

Si $f : X \to Y$ est une application continue et x_0 est un point de l'espace X l'application

$$\alpha \in \Gamma(X, x_0) \mapsto f \circ \alpha \in \Gamma(Y, f(x_0)) \tag{2.1}$$

induit un homomorphisme de groupes

$$f_* : [\alpha] \in \pi_1(X, x_0) \mapsto [f \circ \alpha] \in \pi_1(Y, f(x_0))$$

En effet pour toute homotopie à bouts fixés H d'un lacet α vers le lacet constant I_{x_0} l'application composée $f \circ H$ est une homotopie à bouts fixés du lacet $f \circ \alpha$ vers le lacet constant $f \circ I_{x_0} = I_{f(x_0)}$. Donc l'application (2.1) passe au quotient par la relation d'équivalence d'homotopie à bouts fixés et l'application f_* est bien définie. Qu'elle soit un homomophisme découle du l'identité $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$ par passage au quotient.

Définition 2.1.11. Le *groupe fondamentale* d'un espace X connexe par arcs, noté $\pi_1(X)$, est la classe d'isomorphisme du groupe $\pi_1(X,x)$, où x est un point quelconque de X.

2.2 Relèvements

2.2.1 Espaces localement connexes par arcs

Définition 2.2.1. Un espace topologique est dit *localement connexe par arcs* si tout voisinage U d'un point x de l'espace contient un voisinage ouvert de x connexe par arcs.

Il est immédiat que dans un espace localement connexe par arcs les voisinages ouvert connexes (par arcs) forment une base pour la topologie.

Exemple 2.2.2. Soit X les sous ensemble de $\mathbb{R}^2$ réunion de l'axe des ordonnées et de toutes les droites horizontales d'ordonnée rationnelle. Cet ensemble est connexe par arcs (et donc connexe) mais n'est pas localement connexe par arcs.

Des exemples importants d'espaces localement connexe par arcs sont les variétés topologiques :

Définition 2.2.3. Un espace topologique séparé est une *variété topologique de dimension n* si tout point possède un voisinage homéomorphe à une boule ouverte de $\mathbb{R}^n$. Pour $n = 2$ on parle de *surface topologique*.

Proposition 2.2.4. *Les composantes connexes d'un espace localement connexe par arcs coïncident avec les composantes connexes de l'espace.*

Preuve. Il suffit de démontrer que l'ensemble C_x des points joignable à x par un arc est à la fois ouvert et fermé. □

Corollaire 2.2.5. *Un espace localement connexe par arcs est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.*

2.2.2 Définition de revêtement

Définition 2.2.6. Une application continue $p : E \to B$ est dite un *revêtement* si B est un espace localement connexe par arcs et connexe et si la condition suivante est satisfaite : pour tout point $b \in B$ il existe un voisinage ouvert U de b tel que

— l'image réciproque $p^{-1}(U)$ de l'ouvert U est une union disjointe d'ouverts U_i, $i \in I$.

— pour tout $i \in I$ la restriction de p à U_i est un homéomorphisme de U_i sur U.

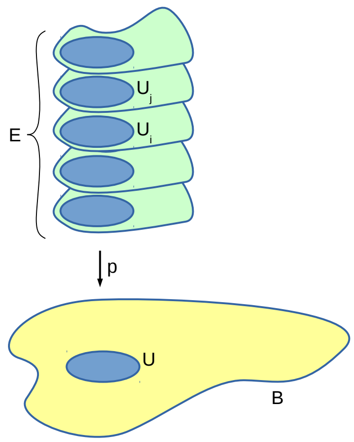


Fig. 2.1 Revêtement. $U \subset B$ est un ouvert trivialisant. La pré-image $p^{-1}(U)$ consiste d'ouverts disjoints U_i.

Pour $x \in p^{-1}(U)$ soit $i(x) \in I$ l'unique indice tel que $x \in U_{i(x)}$ et munissons l'ensemble des indices I de la topologie discrète. L'application $\phi\colon p^{-1}(U) \to U \times I$ définie par $\phi(x) = (p(x), i(x))$ est alors un homéomorphisme dont l'inverse est $\phi^{-1}(b', i) = (p_{|U_i})^{-1}(b')$. Nous avons alors le diagramme commutatif suivant d'application continues :

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times I \arrow[dl, "q"] \\ & U & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

avec $q(b', i) = b'$.

Réciproquement si B est un espace localement connexe par arcs et connexe et $p\colon E \to B$ une application continue telle que pour tout point $b \in B$ il existe un voisinage ouvert U, un espace discret I et un homéomorphisme ϕ de $p^{-1}(U)$ sur $U \times I$ tel que le diagramme (2.2) commute, alors l'application p est un relèvement. $p(\phi(b', i)) = b'$ pour tout $(b', i) \in U \times I$:

Terminologie. Si $p : E \to B$ est un revêtement, l'espace E est dit l'*espace totale du revêtement*, l'espace B la *base du revêtement*, l'application p la *projection*, les voisinages ouverts $U \subset B$ satisfaisants la définition sont dits *ouverts trivialisants*, et les U_i les *feuillets de* $p^{-1}(U)$, ou les *feuillets au dessus de* U. Si le nombre de feuillets au dessus d'un ouvert trivialisant [1] est égal à k on dira qu'il s'agit d'un *revêtement à k feuillets*. Finalement pour tout $b \in B$ l'ensemble $p^{-1}(\{b\})$ est dit la *fibre au dessus de b*.

Exemple 2.2.7.

1. Si F est un espace muni de la topologie discrète et B un espace localement connexe par arcs et connexe la projection $p\colon B \times F \to B$ est un revêtement de fibre F pour tout $b \in B$. Ici pour ouvert trivialisant on peut prendre B tout entier. On parle dans ce cas de *revêtement trivial*. L'espace totale dans ce cas n'est pas connexe.
2. L'application $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, définie par $p(t) = t + \mathbb{Z}$, est un revêtement. Un ouvert trivialisant de $t + \mathbb{Z}$ est l'ouvert $U = \{s + \mathbb{Z} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ t.q. } |s - t - n| < 1/2\}$.
3. Soit $E = \left\{(z, w) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mid w = z^2\right\}$ et $p\colon (z, w) \in E \mapsto z \in \mathbb{C}^*$. L'application p est un revêtement à deuc feuillets au dessus de $\mathbb{C}^*$, car pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ il existe exactement deux nombres complexes w tels que $w^2 = z$. Un voisinage trivialisant de $z_0 \in \mathbb{C}^*$ est le disque $\{z \in \mathbb{C}^* \mid |z - z_0| < |z_0|\}$ (Exercice !).

1. On verra plus loin que le cardinal des feuillets au dessus d'un ouvert trivialisant est constant.

Proposition 2.2.8. *Un revêtement $p : E \to B$ est une application ouverte et surjective. Tout ouvert de la base B contenu dans un ouvert trivialisant et un ouvert trivialisant. Les feuillets au dessus d'un ouvert connexe trivialisant U sont donc connexes par arcs. Par conséquent l'espace totale E est localement connexe par arcs et les feuillets au dessus des ouvert connexes trivialisants de B forment une base de la topologie de E.*

Preuve. Puisque tout $b \in B$ appartient à on a un ouvert trivialisant U et $p(p^{-1}(U)) = U$, tout $b \in B$ est dans l'image de p.

Si $e \in E$ appartient à un ouvert O, soit U voisinage ouvert trivialisant de $b = p(e)$. Il existe un feuillet ouvert U_i au dessus de U tel que $e \in U_i$. L'intersection $O \cap U_i$ est donc un voisinage ouvert de e ; comme p restreinte à U_i est un homéomorphisme sur U, l'image $p(O \cap U_i)$ est un voisinage ouvert de b. Cela montre que p est ouverte.

Enfin comme tout ouvert de B contenu dans un ouvert trivialisant est un ouvert trivialisant, les ouvert trivialisants de B forment une base de la topologie de B ; par conséquent les feuillets aux dessus de ces voisinages forment une base de la topologie. Puisque ils sont homéomorphes à leur projections, tout voisinage ouvert d'un point sur un feuillet contient un voisinage connexe par arcs. □

Pour la suite il sera utile d'établir les conventions suivantes :

Définition 2.2.9. Une *application continue de l'espace pointé* (X, x_0) *dans l'espace pointé* (Y, y_0) est une application continue $f : X \to Y$ telle que $f(x_0) = y_0$; on utilisera la notation $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ pour indiquer que f est une telle application.

Par conséquent, un *revêtement d'espaces pointés* $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ est un revêtement $p : E \to B$ tel que $p(e_0) = b_0$.

Notation. Dorénavant on supposera toujours que l'espace totale d'un revêtement est **connexe** (et donc localement connexe par arcs et connexe par arcs).

2.2.3 Relèvements des applications

Dans cette section nous nous posons le problème suivant : étant donné un un revêtement $p : E \to B$ et une application continue f d'un espace topologique Y dans la base B du revêtement existe-t-il une application continue $F : Y \to E$ satisfaisant $p \circ F = f$? c'est-à-dire telle que le diagramme suivant soit commutatif ?

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, dashed, "F"] \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

La fleche pointillée, indique que l'existence (et l'unicité) de F est un problème.

Plus généralement, étant donné un un revêtement $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ et une application continue $f : (Y, y_0) \to (B, b_0)$, nous pouvons nous poser la question d'existence et unicité d'une fonction $F : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ telle que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_0) \arrow[ur, dashed, "F"] \arrow[r, "f"] & (B, b_0) \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Définition 2.2.10. Soit $p : E \to B$ un revêtement et $f : Y \to B$ une application continue. Un *relèvement de* f est une application continue $F : Y \to E$ telle que $p \circ F = f$. De même si $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ est un revêtement et $f : (Y, y_0) \to (B, b_0)$ une application continue un *relèvement de* f est une application continue $F : (Y, y_0) \to (E, e_0)$ telle que $p \circ F = f$.

Remarquons que si l'image de f est contenue dans un voisinage trivialisant U la solution du problème de relèvement (2.3) ou (2.4) est banale. En effet soit U_i un feuillet de E au dessus de U (respectivement le feuillet de E au dessus de U auquel le point e_0 appartient) ; alors la fonction $F = (p_{|U_i})^{-1} \circ f$ satisfait $p \circ F = f$ (respectivement satisfait $p \circ F = f$ et $F(y_0) = e_0$) et elle est donc une solution du problème (2.3) (respectivement du problème (2.4)). De plus si Y est une espace connexe cette solution est unique : en effet, si l'image de f est contenue dans un voisinage trivialisant U, l'image de F est contenue dans $p^{-1}(U)$; donc les pré-images $F^{-1}(U_j)$ des feuillets au dessus de U sont ouvertes est fermées à la fois et, par la connexité de Y, soit vides soit Y tout entier.

En effet le problème de l'unicité du relèvement a une solution facile :

Théorème 2.2.11 (Unicité du relèvement). *Soit $p : E \to B$ un revêtement, Y un espace connexe et $f : Y \to B$ une application continue. Si deux relèvements F_1 et F_2 de f coïncident en un point $y_0 \in Y$ alors ils sont égaux.*

Preuve. Il suffit de montrer que l'ensemble $Z = \{y \in Y \mid F_1(y) = F_2(y)\}$ est ouvert et fermé à la fois. Puisque $Z \neq \emptyset$ (car $y_0 \in Z$) et Y est connexe, le théorème sera démontré.

Pour tout $y \in Y$, soit U un ouvert trivialisant voisinage de $f(y)$. Soit $p^{-1}(U)$ l'union disjointe des feuillets U_i, $i \in I$. Soit $h : p^{-1}(U) \to I$ la fonction définie par $h(z) = i$ si $z \in U_i$. La fonction h est continue à valeurs dans un espace discret ; par conséquent il en est de même des fonctions $h \circ F_i : f^{-1}(U) \to I$. Or, pour tout $y' \in f^{-1}(U)$, on a $F_1(y') = F_2(y')$ si et seulement si $h(F_1(y')) = h(F_2(y'))$. Donc, si $F_1(y) = F_2(y)$ alors il existe $i \in I$ tel que y appartient à l'ouvert $(h \circ F_1)^{-1}(\{i\}) \cap (h \circ F_2)^{-1}(\{i\})$. Si $F_1(y) \neq F_2(y)$ alors il existe $i, j \in I$ tel que y appartient à l'ouvert $(h \circ F_1)^{-1}(\{i\}) \cap (h \circ F_2)^{-1}(\{j\})$. En conclusion l'ensemble Z et son complémentaire sont ouverts. $\square$

Pour ce qui regarde l'existence du relèvement, le cas où l'espace de départ Y est un intervalle est fondamentale pour tout ce qui suit ; le théorème nous donne une solution complète.

Théorème 2.2.12 (Relèvement des chemins). *Soit $p\colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ un revêtement, $\alpha\colon [0,1] \to B$ un chemin tel que $\alpha(0) = b_0$. Alors il existe un unique relèvement $\tilde{\alpha}\colon [0,1] \to E$ du chemin α satisfaisant $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. En diagramme : il existe un unique chemin $\tilde{\alpha}$ tel que le diagramme suivante commute*

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ ([0,1], 0) \arrow[ur, "\tilde{\alpha}"] \arrow[r, "\alpha"] & (B, b_0) \end{tikzcd}$$

Preuve. L'unicité du relèvement découle du Théorème 2.2.11 précédent.

Soit J l'ensemble des $s \in [0,1]$ tels que pour tout $r \leq s$ il existe un *unique* chemin $\tilde{\alpha}\colon t \in [0,r] \mapsto \tilde{\alpha}(t) \in E$ qui relève le chemin $\alpha_{|[0,r]}\colon [0,r] \to B$ et satisfait $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. Puisque $0 \in J$, l'ensemble J est non vide. De plus, par définition la relation $s \in J$ implique que tout $r \leq s$ appartient à J. Donc J est un intervalle.

Soit $t_0 = \sup J$. Soient U un ouvert trivialisant voisinage de $\alpha(t_0)$, $\epsilon > 0$ tel que $\alpha(]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[\cap [0,1]) \subset U$.

Par définition de l'ensemble J, il existe $r \in]t_0 - \epsilon, t_0] \cap J$ et un unique relèvement $\tilde{\alpha}\colon t \in [0,r] \mapsto \tilde{\alpha}(t) \in E$ de $\alpha_{|[0,r]}$ tel que $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. Soit U_i le feuillet au dessus de U auquel $\tilde{\alpha}(r)$ appartient. Alors le chemin $\tilde{\alpha}\colon [0, t_0 + \epsilon] \to E$ défini par $\tilde{\alpha}(t) = \tilde{\alpha}(t)$ pour $t \leq r$ et $\tilde{\alpha}(t) = (p_{|U_i})^{-1}(\alpha(t))$ pour $t \in [r, t_0 + \epsilon] \cap [0,1]$ est l'unique relèvement continu du chemin $\alpha_{|[0, t_0 + \epsilon] \cap [0,1]}$ et satisfait $\tilde{\alpha}(0) = e_0$. Si $t_0 < 1$ on a une contradiction ; on a donc pour $t_0 = 1$ et on a montré que $J = [0,1]$. $\square$

La proposition suivante nous dit que si deux application d'un connexe Y dans la base d'un revêtement sont homotopes et si une de ces application admets un relèvement, alors l'autre application se relève aussi ; en effet toute l'homotopie se relève !

Théorème 2.2.13 (Relèvement des homotopies). *Soient $p\colon E \to B$ un revêtement, Y un espace connexe et $h\colon (y,t) \in Y \times [0,1] \mapsto h(y,t) \in B$ une homotopie de l'application continue $f_0\colon Y \to B$ vers l'application continue $f_1\colon Y \to B$. Soit $F_0\colon Y \to E$ un relèvement de f_0.*

Alors il existe un unique homotopie $H\colon (y,t) \in Y \times [0,1] \mapsto H(y,t) \in E$ qui relève h et telle que $H(\cdot, 0) = F_0$. En particulier l'application $H(\cdot, 1) : Y \to E$ est un relèvement de f_1.

De plus si pour un certain $y \in Y$ on a $h(y,t) = f_0(y) = f_1(y)$ pour tout $t \in [0,1]$ alors $H(y,t) = F_0(y)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Le diagramme commutatif suivant illustre le problème :

$$j_0(y) := (y,0), \quad h\circ j_0 = f_0$$

$$\begin{tikzcd}
& & E \arrow[dd, "p"] \\
& Y\times[0,1] \arrow[ur, dashed, "H"] \arrow[dr, "h"] & \\
Y \arrow[ur, hook, "j_0"] \arrow[uurr, bend left, "F_0"] \arrow[rr, "f_0"] & & B
\end{tikzcd}$$

Preuve. Pour tout $y\in Y$ fixé, l'application $h^y : t\in[0,1]\mapsto h(y,t)$ est un chemin continu, allant du point $h^y(0) = h(y,0) = f_0(y)$ au point $h^y(1) = h(y,1) = f_1(y)$. Puisque F_0 relève f_0 nous avons $p(F_0(y)) = f_0(y)$. Par le Théorème 2.2.12 précédent, il existe un unique chemin $H^y : [0,1]\to E$ qui relève h^y et satisfait $p(H^y(0)) = h^y(0)$, c'est-à dire tel que $p(H^y(0)) = f_0(y)$. On pose alors $H(y,t) = H^y(t)$ pour tout $(y,t)\in Y\times[0,1]$. Il est immédiat que l'application H ainsi définie relève l'homotopie h. Son unicité découle de l'unicité du relèvement H^y du chemin h^y. Il est aussi clair que H satisfait la dernière affirmation du théorème. Il reste à montrer la continuité de l'application H.

Fixons $y\in Y$. Puisque h est continue pour tout $t\in[0,1]$ il existe un un voisinage ouvert $V_{y,t}$ de y et un voisinage ouvert $W_{y,t}$ de t tels que $h(V_{y,t}\times W_{y,t})$ soit contenu dans un voisinage ouvert $U_{y,t}\subset B$ trivialisant de $h(y,t)$. La famille $(W_{y,t})_{t\in[0,1]}$ est un recouvrement ouvert de l'intervalle $[0,1]$; par conséquent il existe $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ tels que les ouverts W_{y,t_i} recouvrent $[0,1]$. On pose alors $V_y = \cap_{i=1}^n V_{y,t_i}$; l'ouvert V est un voisinage ouvert de y. Les ouverts $V\times W_{y,t_i}$ forment un recouvrement de $V\times[0,1]$, tel que $h(V\times W_{y,t_i})$ soit contenu dans ouvert trivialisant $U_i\subset B$.

Soit t_0 la borne supérieure de l'ensemble

$$J := \{t\in[0,1] \mid H \text{ est continue sur } V\times[0,t]\}.$$

L'ensemble J est un intervalle non-vide car $0\in J$. En argumentant comme dans la preuve du Théorème 2.2.12 précédent on démontre que $J = [0,1]$. □

Une conséquence immédiate de ce théorème est la suivante.

Corollaire 2.2.14. *Soient $p : E\to B$ un revêtement, $\alpha_0, \alpha_1 : [0,1]\to B$ deux chemins homotopes à extrémités fixées. Soient $\tilde\alpha_0$, $\tilde\alpha_1$ deux chemins dans E, relèvements respectivement de α_0 et α_1, ayant un même point de départ $\tilde\alpha_0(0) = \tilde\alpha_1(0)\in p^{-1}(\{\alpha(0)\})$. Alors $\tilde\alpha_0$ et $\tilde\alpha_1$ sont homotopes à extrémités fixées. En particulier les chemins $\tilde\alpha_0$ et $\tilde\alpha_1$ ont le même point d'arrivée, c'est-à-dire $\tilde\alpha_0(1) = \tilde\alpha_1(1)$.*

Preuve. Par le Théorème 2.2.15 précédent, une homotopie à extrémités fixées h de α_0 vers α_1 se relève à une homotopie H à extrémités fixées de $\tilde\alpha_0$ vers un relèvement $\tilde\beta$ de α_1. Puisque $\tilde\beta(0) = \tilde\alpha_0(0) = \tilde\alpha_1(0)$ par l'unicité des relèvements de chemins, on a $\tilde\beta = \tilde\alpha_1$. □

Théorème 2.2.15. *Soit $p : (E,e_0)\to(B,b_0)$ un revêtement. L'homomorphisme de groupes*

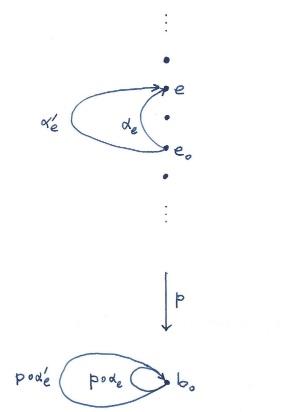
$$p_* \colon \pi_1(E, e_0) \to \pi_1(B, b_0)$$

est injectif.

Preuve. Soit $\alpha \in \Gamma(E, e_0)$ un lacet. Rappelons que $p_*(\alpha])$ est la classe homotopie à extremités fixée du lacet $p \circ \alpha \in \Gamma(B, b_0)$. Supposons que $[\alpha] \in \ker p_*$, c'est-à-dire que $[p \circ \alpha]$ est l'élément neutre de du groupe $\pi_1(B, b_0)$. Le lacet $p \circ \alpha$ est donc homotope au lacet trivial I_{b_0} par une homotopie à extemités fixées de $p \circ \alpha$ vers I_{b_0}. Par le Corollaire 2.2.14 précédent, cette homotopie se relève en une homotopie du lacet α vers le lacet trivial I_{e_0}. En conclusion $[\alpha] = [I_{e_0}]$. □

Ce théorème nous dit que nous dit que le sous-groupe $p_*(\pi_1(E, e_0))$ de $\pi_1(B, b_0)$, image de $\pi_1(E, e_0)$ par l'application p_*, est isomorphe à $\pi_1(E, e_0)$.

Supposons maintenant que $p \colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ soit un revêtement et que E soit connexe (et donc connexe par arcs). Pour tout $e \in p^{-1}(\{b_0\})$ soit α_e un chemin allant de e_0 à e. Le chemin $\beta_e = p \circ \alpha_e$ est alors un lacet basé en b_0.



Prenons un autre chemin α'_e allant de e_0 à e et posons $\beta'_e = p \circ \alpha'_e$. Le chemin $\alpha'_e \alpha_e^{-1}$ est alors un lacet basé en e_0 et par conséquent $[\beta'_e][\beta_e]^{-1} \in p_*(\pi_1(E, e_0))$. Notons $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$.

La relation $[\beta'_e][\beta_e]^{-1} \in H$ équivaut à dire $H[\beta'_e] = H[\beta_e]$. On a donc montré que les classes à droite suivant le sous-groupe H des éléments $[\beta'_e]$ et $[\beta_e]$ de $\pi_1(B, b_0)$ coïncident, c'est à dire ne dépendent pas du choix du chemin α_e allant de e_0 à e.

La proposition suivante complète cette affirmation

Proposition 2.2.16. *Soit E connexe et soit $p \colon (E, e_0) \to (B, b_0)$ un revêtement. On pose $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$.*

Pour tout point e de la fibre $p^{-1}(\{b_0\})$ soit α_e un chemin allant de e_0 à e. L'application

$$e \in p^{-1}(\{b_0\}) \mapsto H[p \circ \alpha_e] \in H \backslash \pi_1\big(B, b_0\big)$$

qui à $e \in p^{-1}(\{b_0\})$ associe la classe à droite de $[p \circ \alpha_e]$ suivant H est bien définie et elle établit une bijection de la fibre $p^{-1}(\{b_0\})$ sur $H \backslash \pi_1\big(B, b_0\big)$.

En particulier, toutes les fibres $p^{-1}(\{b\})$, $b \in B$, du revêtement p ont la même cardinalité.

Preuve. Il reste à montrer que cette application est une bijection.

Montrons la surjectivité. Soit $\beta \in \Gamma(B, b_0)$. Par le Théorème 2.2.12, il existe un chemin α dans E qui relève β et satisfait $\alpha(0) = e_0$. Soit $e = \alpha(1)$. Comme $\alpha_e * \alpha^{-1} \in \Gamma(E, e_0)$, on a $[p \circ \alpha_e] = [p \circ (\alpha_e * \alpha^{-1} * \alpha)] = [p \circ (\alpha_e * \alpha^{-1})][\beta]$, ce qui implique $H[p \circ \alpha_e] = H[\beta]$.

Montrons l'injectivité. Soient $e_1, e_2 \in p^{-1}(\{b_0\})$. Si $H[p\circ\alpha_{e_1}] = H[p\circ\alpha_{e_2}]$ il existe $\beta \in \Gamma(E, e_0)$ tel que $[p\circ\alpha_{e_1}] = [p\circ\beta][p\circ\alpha_{e_2}] = [p\circ(\beta * \alpha_{e_2})]$, ce que signifie que le lacets $p\circ\alpha_{e_1}$ et $p\circ(\beta*\alpha_{e_2})$ sont homotopes à extremités fixées. Cette homotopie se relève à une homotopie à extremités fixées entre leurs relèvements α_{e_1} et $\beta * \alpha_{e_2}$ (remarquons que $e = \alpha_{e_1}(0) = \beta * \alpha_{e_2}(0)$). En particulier $e_1 = \alpha_{e_1}(1) = \beta * \alpha_{e_2}(1) = \alpha_{e_2}(1) = e_2$. □

Exemple 2.2.17. Le groupe fondamentale du cercle est égale à $\mathbb{Z}$ *comme ensemble*. En effet la fibre du revêtement $t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(2\pi i t) \in \mathbb{S}^1$ au dessus de $1 \in \mathbb{S}^1$ est l'ensemble $\mathbb{Z}$. Puisque $\pi_1(\mathbb{R}, 0)$ est le groupe trivial, la Proposition 2.2.16 précédente établit une bijection de $\mathbb{Z}$ sur $\pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$.

Par le même raisonnement le groupe fondamentale du tore $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$ de dimension n est égal, comme ensemble, à $\mathbb{Z}^n$: on utilisera le revêtement $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (\exp(2\pi i t_1), \ldots, \exp(2\pi i t_n)) \in \mathbb{T}^n$.

Rappelons que pour un espace E connexe par arcs le groupes fondamentales basés en points distincts sont isomorphes.

Théorème 2.2.18. *Soit $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$ un revêtement. L'application*

$$e \in p^{-1}(\{b_0\}) \to p_*(\pi_1(E, e))$$

est une application surjective de la fibre $p^{-1}(\{b_0\})$ au dessus de b_0 sur l'ensemble des sous-groupes de $\pi_1(B, b_0)$ conjugués à $p_*(\pi_1(E, e_0))$.

Preuve. Pour tout $e \in p^{-1}(\{b_0\})$ soit α_e un chemin dans E allant de e_0 à e. Rappelons que l'application $\alpha \in \Gamma(E, e) \mapsto \alpha_e * \alpha * \alpha_e^{-1} \in \Gamma(E, e_0)$ induit un isomorphisme de $\pi_1(E, e)$ sur $\pi_1(E, e_0)$. En projetant dans B cette application on obtient l'application $p\circ\alpha \mapsto p\circ\alpha_e * p\circ\alpha * p\circ\alpha_e^{-1}$. Mais $p\circ\alpha_e$ est un lacet de (B, b_0). En passant aux classes d'homotopie nous avons alors $[p\circ\alpha] \in p_*(\pi_1(E, e)) \mapsto [p\circ\alpha_e][p\circ\alpha][p\circ\alpha_e]^{-1} \in p_*(\pi_1(E, e_0)$ ce qui montre que $[p\circ\alpha_e]p_*(\pi_1(E, e))[p\circ\alpha_e]^{-1} \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$. Par symétrie, $[p\circ\alpha_e]p_*(\pi_1(E, e))[p\circ\alpha_e]^{-1} = p_*(\pi_1(E, e_0))$, ce qui montre que les groupes $p_*(\pi_1(E, e))$ sont tous conjuguées.

Soit H un sous-groupe de $\pi_1(B, b_0)$ conjugué à $p_*(\pi_1(E, e_0))$; il existe alors un lacet $\beta \in \Gamma(B, b_0)$ tel que $H = [\beta]^{-1}p_*(\pi_1(E, e_0))[\beta]$. Soit α un relèvement de β satisfaisant $\alpha(0) = e_0$ et $[\gamma] \in H$. Il existe alors un lacet $\alpha' \in \Gamma(E, e_0)$ tel que $[\gamma] = [\beta]^{-1}[p\circ\alpha'][\beta] = [\beta^{-1} * (p\circ\alpha') * \beta] = [p(\alpha^{-1} * \alpha' * \alpha)]$. Puisque $\alpha^{-1} * \alpha' * \alpha \in \Gamma(E, e)$, nous avons montré que $[\gamma] \in p_*(\pi_1(E, e))$, ou bien que $H \subset (\pi_1(E, e))$. □

2.2.4 Revêtements universels

Définition 2.2.19. Un espace topologique est dit *simplement connexe* s'il est connexe par arcs et son groupe fondamentale est triviale. Un revêtement $p \colon E \to B$ est dit un *revêtement universel* si l'espace E est simplement connexe. Par abus de langage on dit aussi que l'espace E est le revêtement universel de B

Exemple 2.2.20. La droite $\mathbb{R}$ est le revêtement universel du cercle S^1. Le plan $\mathbb{R}^2$ est le revêtement universel du tore $\mathbb{T}^2$. La sphère S^2 est le revêtement universel du plan projectif $P(\mathbb{R}^2)$.

Définition 2.2.21. Un espace topologique X est dit *localement simplement connexe* si tout point $x \in X$ possède une base de voisinages ouverts simplement connexes (en particulier connexe par arcs).

Théorème 2.2.22. *Soit (B, b_0) un espace connexe et localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Soit H un sous-groupe de $\pi_1(B, b_0)$. Alors il existe un revêtement $p : (E, e_0) \to (B, b_0)$, tel que $p_*(\pi_1(E, e_0)) = H$.*

En particulier, en considérant le cas où H est trivial, nous avons qu'il existe un revêtement universel de B.

Preuve. Pour $b \in B$ soit $C(b)$ l'ensemble des chemins dans B dont le point de départ est b et pour tout $U \subset B$ soit $C(U, b)$ l'ensemble des chemins dans U dont le point de départ est b.

On définit une relation d'équivalence sur l'ensemble $C(b_0)$ par $\alpha \sim \beta$ si et seulement si $\alpha(1) = \beta(1)$ et $[\alpha * \beta^{-1}] \in H$. On note $\langle\alpha\rangle$ la classe d'équivalence d'un chemin $\alpha \in C(b_0)$. On pose $E = C(b_0)/\sim$ et on définit l'application $p \colon E \to B$ par $p(\langle\alpha\rangle) = \alpha(1)$.

Puisque B est connexe par arcs l'application p est surjective.

Pour tout $\langle\alpha\rangle \in E$ et pour tout voisinage ouvert simplement connexe U de $\alpha(1) = p(\langle\alpha\rangle)$ l'ensemble

$$W_{\langle\alpha\rangle, U} = \left\{\langle\alpha * \gamma\rangle \mid \gamma \in C(U, \alpha(1))\right\}.$$

est non vide et $\langle\alpha\rangle \in W_{\langle\alpha\rangle, U}$. Cet ensemble est bien défini car si $\langle\alpha\rangle = \langle\alpha'\rangle$ on a $\alpha(1) = \alpha'(1)$ et $\langle\alpha * \gamma\rangle = \langle\alpha' * \gamma\rangle$ pour tout $\gamma \in C(U, \alpha(1))$.

Pour tout U_1 et U_2 ouverts simplement connexes de B, l'intersection $U_1 \cap U_2$ est soit vide, soit un ouvert simplement connexes de B. Montrons que, pour tout $\langle\beta\rangle \in W_{\langle\alpha_1\rangle, U_1} \cap W_{\langle\alpha_2\rangle, U_2}$, on a l'inclusion $W_{\langle\beta\rangle, U_1 \cap U_2} \subset W_{\langle\alpha_1\rangle, U_1} \cap W_{\langle\alpha_2\rangle, U_2}$. Cela implique que les ensembles $W_{\langle\alpha\rangle, U}$ forment une base d'une topologie.

Or, si $\langle\beta\rangle \in W_{\langle\alpha_1\rangle, U_1} \cap W_{\langle\alpha_2\rangle, U_2}$, il existe deux chemins $\gamma_i \in C(U_i, \alpha_i(1))$ tels que $\langle\beta\rangle = \langle\alpha_1 * \gamma_1\rangle = \langle\alpha_2 * \gamma_2\rangle$, ce qui signifie que $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$ et que $[\alpha_1 * \gamma_1 * \gamma_2^{-1} * \alpha_2^{-1}] \in H$. Par conséquent pour tout $\gamma \in C(U_1 \cap U_2, \gamma_1(1))$ on a $\beta * \gamma(1) = \alpha_1 * \gamma_1 * \gamma(1) = \alpha_2 * \gamma_2 * \gamma(1) = \gamma(1)$ et $[(\alpha_1 * \gamma_1 * \gamma) * (\alpha_2 * \gamma_2 * \gamma)^{-1}] = [\alpha_1 * \gamma_1 * \gamma_2^{-1} * \alpha_2^{-1}] \in H$. Puisque $\gamma_i * \gamma \in C(U_i, \alpha_i(1))$, on a $\langle\beta * \gamma\rangle = \langle\alpha_1 * (\gamma_1 * \gamma)\rangle = \langle\alpha_2 * (\gamma_2 * \gamma)\rangle \in W_{\langle\alpha_1\rangle, U_1} \cap W_{\langle\alpha_2\rangle, U_2}$ ce qui démontre que $W_{\langle\beta\rangle, U_1 \cap U_2} \subset W_{\langle\alpha_1\rangle, U_1} \cap W_{\langle\alpha_2\rangle, U_2}$.

Remarquons que $p^{-1}(\{b\})$ consiste de toutes les classes des chemins $\alpha \in C(b_0)$ tels que $\alpha(1) = b$. Supposons que $\langle\alpha_1\rangle$ et $\langle\alpha_2\rangle$ sont deux points de $p^{-1}(\{b\})$. On a alors $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = b$. Si $\langle\beta\rangle \in W_{\langle\alpha_1\rangle, U} \cap W_{\langle\alpha_2\rangle, U}$, il existe deux chemins γ_1 et γ_2 in $C(U, b)$ tels que $\langle\beta\rangle = \langle\alpha_1 * \gamma_1\rangle = \langle\alpha_2 * \gamma_2\rangle$ ce qui implique $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = \beta(1)$ et $[(\alpha_1 * \gamma_1) * (\alpha_2 * \gamma_2)^{-1}] \in H$; le lacet $\gamma_1 * \circ\gamma_2^{-1}$ appartient à $\Gamma(U, b)$ et donc il est homotopiquement trivial. Par conséquent $[(\alpha_1 * \gamma_1) * (\alpha_2 * \gamma_2)^{-1}] = [\alpha_1 * \alpha_2^{-1}] \in H$. En conclusion $\langle\alpha_1\rangle = \langle\alpha_2\rangle$.

Nous avons alors montré que les ouverts $W_{\langle\alpha\rangle,U}$, pour $\langle\alpha\rangle \in p^{-1}(\{b\})$ sont à deux a deux disjoints. Pour tout voisinage ouvert simplement connexe U de $b \in B$ la pré-image $p^{-1}(U) = \bigcup_{\langle\alpha\rangle\in p^{-1}(\{b\})} W_{\langle\alpha\rangle,U}$ est une union d'ouverts donc ouverte. Puisque les voisinages ouverts simplement connexes forment une base de la topologie de B, l'application $p\colon E \to B$ est continue.

Montrons que, pour tout $\langle\alpha\rangle \in p^{-1}(\{b\})$, l'application $p_{|W_{\langle\alpha\rangle,U}}\colon W_{\langle\alpha\rangle,U} \to U$ est ouverte. Pour cela il suffit de vérifier que l'image de tout voisinage ouvert d'un point $\langle\beta\rangle$ de $W_{\langle\alpha\rangle,U}$ contient un voisinage ouvert de $p(\langle\beta\rangle)$. En effet, si W' est un voisinage ouvert de $\langle\beta\rangle \in W_{\langle\alpha\rangle,U}$ il existe U' ouvert simplement connexe dans B tel que $W_{\langle\beta\rangle,U'} \subset W'$. Sans perte de généralité on peut supposer que $U' \subset U$ (en remplaçant U' par $U' \cap U$). On a $p_{|W_{\langle\alpha\rangle,U}}(W_{\langle\beta\rangle,U'}) = U'$ et donc $p_{|W_{\langle\alpha\rangle,U}}$ est une application ouverte.

2.2.5 *Existence de relèvements*

Le théorème suivant donne un condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une solution au problème du relèvement d'une application.

Théorème 2.2.23 (Théorème du relèvement). *Soit* $p\colon (E,e_0) \to (B,b_0)$ *un revêtement et* $f\colon (Y,y_0 \to (B,b_0)$ *une application continue d'un espace connexe et localement connexe par arcs dans* B. *Alors il existe un unique relèvement* $F\colon (Y,y_0) \to (E,e_0)$ *de l'application* f *si et seulement si*

$$f_*(\pi_1(Y,y_0)) < p_*(\pi_1(E,e_0)) \tag{2.5}$$

On peut résumer le théorème par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & (E,e_0) \arrow[d, "p"] \\ (Y,y_0) \arrow[ur, "F"] \arrow[r, "f"] & (B,b_0) \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad f_*(\pi_1(Y,y_0)) < p_*(\pi_1(E,e_0))$$

Preuve. Supposons que F est un tel relèvement. Puisque $F_*(\pi_1(Y,y_0)) < \pi_1(E,e_0)$, on a $f_*(\pi_1(Y,y_0)) = p_* \circ F_*(\pi_1(Y,y_0)) < p_*(\pi_1(E,e_0))$.

Réciproquement supposons que la condition (2.5) soit satisfaite. Pour tout point $y \in Y$, soit α_y un chemin allant de y_0 à y. Le chemin $f \circ \alpha_y$ a comme point de départ b_0 et comme point d'arrivée $f(y)$. On pose β_y l'unique relèvement de $f \circ \alpha_y$ à E satisfaisant $\beta_y(0) = e_0$. On définit alors $F(y) = \beta_y(1)$.

Il est clair que la fonction F ainsi définie satisfait l'identité $f = p \circ F$ et que sa définition est la seule compatible avec cette identité (d'où l'unicité de F).

Il reste à montrer qu'elle est bien définie et continue. Si α'_y est un autre chemin allant de y_0 à y, le chemin $\alpha_y * (\alpha'_y)^{-1}$ est un lacet in $\Gamma(Y,y_0)$. Par hypothèse la classe d'homotopie $[f \circ (\alpha_y * (\alpha'_y)^{-1})]$ appartient à $p_*(\pi_1(E,e_0))$. Il existe donc un lacet $\beta \in \Gamma(E, e_0)$ tel que $[f\circ(\alpha_y * (\alpha'_y)^{-1})] = [p\circ\beta]$. L'homotopie à extrémités fixées de $p \circ \beta$ vers $f \circ (\alpha_y * (\alpha'_y)^{-1})$ se relève dans E à une homotopie à extrémités de β vers un relevé γ du lacet $(f \circ \alpha_y) * (f \circ (\alpha'_y)^{-1})$. En particulier γ est un lacet basé en e_0 et donc les relevés dans E des chemins $f \circ \alpha_y$ et $f \circ \alpha'_y$ ayants e_0 comme point de départ ont le même point d'arrivée. Cela montre que F est bien définie.

Pour montrer la continuité soient $e = F(y)$ et V un voisinage ouvert de e.

Soit U un voisinage trivialisant ouvert et connexe de $b = f(y)$ assez petit pour que le feuillet U_i de E au dessus de U auquel e appartient soit contenu dans V.Soit W un voisinage connexe par arcs de y contenu dans $f^{-1}(U)$. La fonction $F_i = (p_{|U_i})^{-1} \circ f$ est continue sur W. On peut vérifier que les applications F et F_i concident sur W, ce qui implique la continuité de F.

2.2.6 *Classification des revêtements*

Théorème 2.2.24. *Soit (B, b_0) un espace connexe et localement connexe par arcs. Si $p_1 : E_1 \to B$ et $p_2 : E_2 \to E_1$ sont des revêtements, alors $p_1 \circ p_2 : E_2 \to B$ est un revêtement.*

$$\begin{tikzcd} E_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[rr, bend right, "p_1\circ p_2"'] & E_1 \arrow[r, "p_1"] & B \end{tikzcd}$$

Preuve. Exercice.

Définition 2.2.25. Soient

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

deux revêtements. Un *homomorphisme de revêtements* est une application continue $\phi : E_1 \to E_2$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Si l'application ϕ est un homéomorphisme alors on dira que ϕ est un *isomorphisme de revêtement*, ou que les *revêtements p_1 et p_2 sont isomorphes.*

Si $(E_1, p_1) = (E_2, p_2)$ et ϕ un homéomorphisme on dira que ϕ est un *automorphisme de* (E_1, p_1).

Il est clair que la composition de deux homomorphismes de revêtements est un homomorphisme de revêtements. En particulier, les automorphismes d'un revêtement $p : E \to B$ forment un groupe par l'opération de composition. On note ce groupe $\mathrm{Aut}(p)$.

Lemme 2.2.26. *Si*

$$\begin{tikzcd} (E_1,e_1) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

est un homomorphismes de revêtements, alors l'application $\phi\colon (E_1,e_1) \to (E_2,e_2)$ *est un revêtement.*

Preuve. Montrons d'abord la surjectivité de ϕ. Soit $x_2 \in E_2$ et soit $\alpha\colon [0,1] \to E_2$ un chemin allant de e_2 à x_2. La projection $\beta = p_2 \circ \alpha$ de ce chemin dans B possède un unique relèvement $\tilde{\beta}$ à E_1 satisfaisant $\tilde{\beta}(0) = e_1$. Puisque $p_1 = p_2 \circ \phi$ le chemin $\gamma = \phi \circ \tilde{\beta}$, projeté de $\tilde{\beta}$ dans E_2, satisfait $p_2 \circ \gamma = p_1 \circ \tilde{\beta} = \beta$ et $\gamma(0) = \phi(e_1) = e_2$. Par l'unicité du relèvement de β dans E_2 on a $\gamma = \alpha$ et donc $x_2 = \alpha(1) = \phi(\tilde{\beta}(1))$.

Soit $U \subset B$ un ouvert connexe trivialisant pour les deux projections p_1 et p_2. Puisque $p_1 = p_2 \circ \phi$, on a

$$\phi^{-1}(p_2^{-1}(U)) = p_1^{-1}(U)$$

et

$$p_1^{-1}(U) = \bigcup_{j\in J} W_j, \qquad p_2^{-1}(U) = \bigcup_{i\in I} V_i,$$

où les ouverts connexes W_j (resp. les ouverts connexes V_i) sont les feuillets de E_1 (resp. de E_2) au dessus de U. Les feuillets W_j et V_i sont ouvert et fermés dans $p_1^{-1}(U)$ et $p_2^{-1}(U)$, respectivement. Donc l'ensemble $\phi^{-1}(V_i) \cap W_j$ est ouvert et fermé dans W_j, c'est-à-dire égal à W_j ou vide, car W_j est connexe. En conclusion pour tout $i \in I$, l'ensemble $\phi^{-1}(V_i)$ est une union disjointe de certains feuillets W_j. □

Théorème 2.2.27. *Soient*

$$\begin{tikzcd} (E_1,e_1) \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

deux revêtements. Il existe un unique *homomorphisme de revêtements* ϕ *qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd} (E_1,e_1) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

si et seulement si

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1)) < (p_2)_*(\pi_1(E_2,e_2)). \tag{2.6}$$

Preuve. Le théorème est une conséquence immédiate du Théorème 2.2.23. □

Théorème 2.2.28. *Soient*

$$\begin{tikzcd}(E_1,e_1) \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

deux revêtements. Si

$$(p_1)_*(\pi_1(E_1,e_1)) = (p_2)_*(\pi_1(E_2,e_2)) \tag{2.7}$$

alors il existe un unique *isomorphisme de revêtements ϕ qui rend le diagramme suivant commutatif*

$$\begin{tikzcd}(E_1,e_1) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

Preuve. Par le Théorème 2.2.27 précédent, il existe deux homomorphismes de revêtements $\psi_1 : (E_1,e_1) \to (E_2,e_2)$ et $\psi_2 : (E_2,e_2) \to (E_1,e_1)$:

$$\begin{tikzcd}(E_1,e_1) \arrow[rr, "\psi_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}(E_2,e_2) \arrow[rr, "\psi_2"] \arrow[dr, "p_2"'] & & (E_1,e_1) \arrow[dl, "p_1"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

et donc

$$\begin{tikzcd}(E_1,e_1) \arrow[rr, "\psi_2\circ\psi_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & (E_1,e_1) \arrow[dl, "p_1"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}(E_2,e_2) \arrow[rr, "\psi_1\circ\psi_2"] \arrow[dr, "p_2"'] & & (E_2,e_2) \arrow[dl, "p_2"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

Par le Théorème 2.2.27 les applications $\psi_2 \circ \psi_1$ et $\psi_1 \circ \psi_2$ sont les uniques applications qui rendent les diagrammes ci-dessus commutatifs. Puisque les applications identiques de (E_1,e_1) et de (E_2,e_2) dans eux-mêmes satisfont aussi la commutativité des ces diagrammes on a $\psi_2 \circ \psi_1 = Id_{E_1}$ et $\psi_1 \circ \psi_2 = Id_{E_2}$. □

Corollaire 2.2.29. *Soient $\tilde{B}_1$ et $\tilde{B}_2$ deux revêtements universels, d'un espace topologique B, connexe, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Alors $\tilde{B}_1$ et $\tilde{B}_2$ sont isomorphes.*

Preuve. Pour $i = 1$ ou 2, soient $p_i : \tilde{B}_i \to B$ les application de revêtement ; soient $b \in B$ et $\tilde{b}_i \in p_i^{-1}(\{b\})$. La condition (2.7) est trivialement vérifiée par les deux revêtements p_1 et p_2 car $\pi_1(\tilde{B}_1) = \pi_1(\tilde{B}_2) = \{1\}$. Par le Théorème 2.2.28 précédent, il existe un unique homéomorphisme $\phi : \tilde{B}_1 \to \tilde{B}_2$ tel que $\phi(\tilde{b}_1) = \tilde{b}_2$. □

2.2.7 *Action du groupe d'automorphismes d'un revêtement*

Rappelons que le groupe $\mathrm{Aut}(p)$ d'automorphismes d'un revêtement $p\colon E \to B$ consiste des homéomorphismes ϕ sur lui-même tels que $p = p \circ \phi$.

Il est immédiat que un automorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(p)$ opère sur les fibres du revêtement p : si $p(e) = b$ on a $p(\phi(e)) = p(e) = b$.

Définition 2.2.30. On dit que l'action d'un groupe discret Γ sur un espace topologique X est *totalement discontinue* si pour tout $x \in X$ il existe un voisinage ouvert V de x tel que $g(V) \cap V = \emptyset$ pour tout $g \in G$ distinct de l'élément neutre.

Il est facile de voir que si un groupe discret agit proprement et librement sur un espace localement compact alors il agit de façon totalement discontinue.

Lemme 2.2.31. *L'action du groupe* $\mathrm{Aut}(p)$ *sur l'espace totale E d'un revêtement $p\colon E \to B$ est libre et totalement discontinue. En particulier, l'action du groupe* $\mathrm{Aut}(p)$ *sur chaque fibre $p^{-1}(\{b\})$ du revêtement est aussi libre.*

Preuve. Soit $e \in E$. Le Théorème 2.2.28 dit qu'il existe un unique automorphisme ϕ tel que $\phi(e) = e$, à savoir l'application identique de E sur lui-même.

Si $e \in$ soit U_i un voisinage ouvert de e, feuillet au dessus d'un ouvert trivialisant U. Alors on $\phi(U_i) \cap U_i = \emptyset$ pour tout $\phi \in \mathrm{Aut}(p)$ distinct de l'identité. □

Théorème 2.2.32. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. On pose $H = p_*(\pi_1(E, e_0))$ et soit N le normalisateur de H dans $\pi_1\big(B, b_0\big)$. Pour tout $\phi \in$* $\mathrm{Aut}(p)$ *soit α_ϕ un chemin allant de e_0 à $\phi(e_0)$. L'application*

$$\Phi\colon \phi \in \mathrm{Aut}(p) \mapsto H[p \circ \alpha_\phi] \in H\backslash N = N/H$$

est bien définie et elle est un isomorphisme de groupes.

Preuve. Nous savons déjà par la Proposition 2.2.16 que si α_ϕ et α'_ϕ sont deux chemins allant de e_0 à $\phi(e_0)$ alors $H[p \circ \alpha_\phi] = H[p \circ \alpha'_\phi]$.

On regarde $H\backslash N$ comme un sous-ensemble de $H\backslash \pi_1(B, b_0)$.

Pour prouver que l'image de Φ est contenue dans $H\backslash N$, montrons que si $\phi \in \mathrm{Aut}(p)$ et $e = \phi(e_0)$ alors pour tout chemin α_e allant de e_0 à $e \in p^{-1}(\{b_0\})$ on a $[p \circ \alpha_e] \in N$. En effet, comme l'automorphise ϕ envoie un lacet basé en e_0 en un lacet basé en $e0$ on a $\phi_* \pi_1(E, e_0) = \pi_1(E, e)$. On aussi $[\alpha_e]^{-1} \pi_1(E, e_0) * \alpha_e = \pi_1(E, e)$ et $p \circ \phi = p$ et donc

$$[p \circ \alpha_e]^{-1} p_*(\pi_1(E, e_0))\,[p \circ \alpha_e] = p_*(\pi_1(E, e)) = p_* \phi_*(\pi_1(E, e_0)) = p_*(\pi_1(E, e_0))$$

ce qui montre que $[p \circ \alpha_e]$ normalise $\pi_1(E, e_0)$.

Pour prouver que que l'image de Φ contient $H\backslash N$, et donc est égale à $H\backslash N$, montrons que si α_e est un chemin allant de e_0 à $e \in p^{-1}(\{b_0\})$ la condition $[p \circ \alpha_e] \in N$ implique qu'il existe $\phi \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que $e = \phi(e_0)$. En effet on a $\alpha \in \Gamma(E, e)$ si et seulement si $\beta_e = \alpha_e^{-1} * \alpha * \alpha_e \in \Gamma(E, e_0)$. Dans ce cas on a

$$\begin{aligned} p_*(\pi_1(E,e)) &= [p\circ\Gamma(E,e)] = p_*([\alpha_e * \Gamma(E,e_0) * \alpha_e^{-1}]) \\ &= [p\circ\alpha_e]p_*(\pi_1(E,e_0))[p\circ\alpha_e]^{-1} = p_*(\pi_1(E,e_0)) \end{aligned}$$

Donc $p_*(\pi_1(E,e)) = p_*(\pi_1(E,e_0))$. Par le théorème 2.2.28, il existe un unique isomorphisme $\phi \in \mathrm{Aut}(p)$ tel que le diagramme commute.

$$\begin{tikzcd} (E,e) \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "p"'] & & (E,e_0) \arrow[dl, "p"] \\ & (B,b_0) & \end{tikzcd}$$

En particulier $e = \phi(e_0)$.

Montrons que l'application Φ est un homomorphisme de groupes. Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux automorphismes et posons $\phi_1(e_0) = e_1$ et $\phi_2(e_0) = e_2$. Soient α_1 et α_2 desu chemins allant de e_0 à e_1 et e_2, respectivement. Alors $\alpha_1 * (\phi_1\circ\alpha_2)$ est un chemin allant de e_0 à $\phi_1(e_2)$. Or, $(\phi_1\circ\phi_2)(e_0) = \phi_1(e_2)$. Donc $\Phi(\phi_1\circ\phi_2) = H[p\circ(\alpha_1 * (\phi_1\circ\alpha_2))] = H[p\circ\alpha_1][p\circ(\phi_1\circ\alpha_2)] = H[p\circ\alpha_1][p\circ\alpha_2]$.

Finalement pour prover que Φ est un isomorphisme il suffit d'observer que si $\Phi(\phi) = H$ et $\phi(e_0) = e$, alors $[p\circ\alpha_e] \in p_*(\pi_1(E,e_0))$. Par la Proposition 2.2.16, cela implique que $e_0 = e_e$. Par le Lemme 2.2.31, on conclut que ϕ est l'identité de E. □

2.2.8 *Revêtements galoisiens*

Définition 2.2.33. Un revêtement $p : (E,e_0) \to (B,b_0)$ est dit *galoisien* si le groupe $p_*(\pi_1(E,e_0))$ est un sous-groupe distingué de $\pi_1(B,b_0)$.

Remarque 2.2.34. Observons que la condition $p_*(\pi_1(E,e_0))$ soit un sous-groupe distingué de $\pi_1(B,b_0)$ ne dépend pas du point e_0 qu'on a choisi sur la fibre au dessus de b_0. En effet par le Théorème 2.2.18 tous les sous-groupes $p_*(\pi_1(E,e))$, avec $e \in p^{-1}(\{b\})$, sont conjugués.

Théorème 2.2.35. *Soit $p : E \to B$ un revêtement d'un espace B localement simplement connexe. Le revêtement p est galoisien si et seulement si le groupe d'automorphismes* $\mathrm{Aut}(p)$ *agit transitivement sur chaque fibre* $p^{-1}(\{b\})$.

Preuve. La Proposition 2.2.16 établit une application bijective d'une fibre $p^{-1}(\{b\})$ sur l'espace $p_*(\pi_1(E,e))\backslash\pi_1(B,b)$. Le Théorème 2.2.32 dit que la restriction de cette application à l'orbite $\mathrm{Aut}(p)(e)$ est une bijection sur $p_*(\pi_1(E,e))\backslash N$, où N est le normalisateur de $p_*(\pi_1(E,e))$ dans $\pi_1(B,b)$. Donc $\mathrm{Aut}(p)$ agit transitivement sur chaque fibre $p^{-1}(\{b\})$ si et seulement si $N = \pi_1(B,b)$. □

Théorème 2.2.36. *Soit $p : E \to B$ un revêtement. Si E est simplement connexe alors le revêtement p est galoisien et $\pi_1(B)$ est isomorphe à* $\mathrm{Aut}(p)$.

Exemple 2.2.37. On a $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$, c'est-à-dire le groupe fondamentale du cercle est le groupe (additif) $\mathbb{Z}$. De même le groupe fondamentale du tore $\mathbb{T}^n$ est $\mathbb{Z}^n$.

Plus généralement on a

Théorème 2.2.38. *Soit* Γ *un groupe discret opérant, librement et de façon totalement discontinue, par homéomorphismes sur un espace* E*, séparé, connexe et localement connexe par arcs. Alors la projection* $p\colon E \to E/\Gamma$ *est un revêtement galoisien et* $\Gamma = \mathrm{Aut}(p)$.

Preuve. Par définition d'action totalement discontinue, pour tout $e \in E$ il existe un voisinage ouvert U' de e tel que $\phi(U') \cap U' = \emptyset$ pour tout $\phi \in \Gamma \setminus \{e_\Gamma\}$. On a alors que $U = p(U')$ est ouvert et connexe par arcs. Par définition $p^{-1}(U) = \cup_{\phi\in\Gamma}\phi(U')$. Puisque l'application p est ouverte, (Théorème 1.3.7), $p^{-1}_{|\phi(U')}\colon U \to \phi(U')$ est continue. Donc la projection p est un revêtement.

Il est clair que tout Γ opère sur E par automorphismes du revêtement p. Puisque les fibres de ce revêtement sont les orbites de Γ, et puisque l'action de Γ est libre, Γ opère transitivement et librement sur les fibres de p. Cela implique que $\Gamma = \mathrm{Aut}(p)$. □

Corollaire 2.2.39. *Soit* $p : E \to B$ *un revêtement,* E *séparé. On a alors un revêtement galoisien* $p_1\colon E \to E/\mathrm{Aut}(p)$ *et un revêtement* $p_2\colon E/\mathrm{Aut}(p) \to B$ *tels que* $p = p_1 \circ p_2$*. Soit* $e \in E$*. L'image par* p_2 *du groupe fondamentale* $\pi_1(E/\mathrm{Aut}(p), p_1(e))$ *et le normalisateur de* $p_*(\pi_1(E,e))$ *dans* $\pi_1(B, p(e))$.

Preuve. Puisque $\mathrm{Aut}(p)$ opère proprèment et de façon totalement discontinue sur E la projection canonique $p_1\colon E \to E/\mathrm{Aut}(p)$ est un révétement. On a aussi une projection $p_2 : E/\mathrm{Aut}(p) \to B$ car $\mathrm{Aut}(p)$ opère sur le fibres du revêtement p. Si U est un ouvert trivialisant de p, un feuillet de p_2 au dessus de U est donné par une orbite d'un feuillet de p au dessus de U, ce qui entraine facilement que p_2 est un revêtement.

Du fait que p_1 est galoisien, on a $(p_1)_*(\pi_1(E,e)) \lhd \pi_1(E/\mathrm{Aut}(p), p_1(e))$ et donc $p_*(\pi_1(E,e))) \lhd (p_2)_*(\pi_1(E/\mathrm{Aut}(p), p_1(e)))$ ce qui implique que le normalisateur N de $p_*(\pi_1(E,e))$ dans $\pi_1(B, p(e))$ contient $(p_2)_*(\pi_1(E/\mathrm{Aut}(p), p_1(e)))$. Puisque par le Théorème 2.2.32, $\mathrm{Aut}(p) = N/p_*(\pi_1(E,e)) = \pi_1(E/\mathrm{Aut}(p), p_1(e))/(p_1)_*(\pi_1(E,e))$ on obient $N = (p_2)_*(\pi_1(E/\mathrm{Aut}(p), p_1(e)))$. □

Chapitre 3
Variétés

3.1 Notions de géométrie différentielle

3.1.1 Variétés topologiques

Définition 3.1.1. Une *variété topologique de dimension d* est un espace topologique *séparé* tel que tout point de l'espace possède un voisinage ouvert homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^d$ (ou, équivalemment, à une boule ouverte de $\mathbb{R}^d$).

D'habitude on demande aussi qu'une variété topologique ne soit pas "trop grande", c'est à dire que sa topologie ait une base dénombrable.

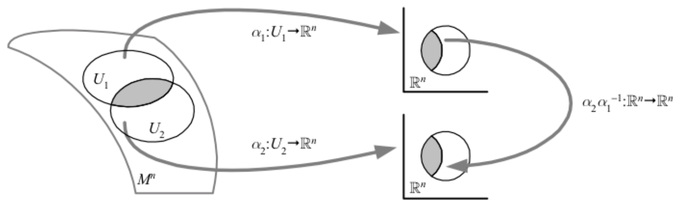
Définition 3.1.2. Une *carte* d'une variété topologique X de dimension d est couple (U,ϕ) formé par un ouvert $U \subset X$ et un homéomorphisme ϕ de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^d$. L'ouvert U est le *domaine de la carte* et, pour tout $p \in U$, les d nombres $\phi(p) \in \mathbb{R}^d$ sont les *coordonnées du point p relatives à la carte* (U,ϕ). L'application réciproque ϕ^{-1}, souvent plus utile que ϕ, est dite un *paramétrage de l'ouvert U*.

Le terme *système de coordonnées locales* est aussi un synonyme de carte.

Définition 3.1.3. Un *atlas (topologique de dimension d)* d'une variété topologique X de dimension d est une famille $(U_\alpha,\phi_\alpha)_{\alpha\in I}$ de cartes de X telle que $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouverement ouvert de X.

Définition 3.1.4. Soient (U,ϕ) et (V,ψ) deux cartes d'une variété topologique X, telles que $U \cap V \neq \emptyset$. L'application partiellement définie $\psi \circ \phi^{-1}$ est dite *changement de coordonnées.*[1]

1. La notation $\psi \circ \phi^{-1}$ est un légère violation des bonnes règles, qui voudraient qu'on écrive la fonction réciproque de la restriction de ϕ à $U \cap V$ au lieu de ϕ^{-1}, et donc $\psi \circ (\phi_{|U\cap V})^{-1}$, au lieu de $\psi \circ \phi^{-1}$. L'expression "partiellement définie" tient compte de cela car le domaine de l'application $\psi\circ\phi^{-1}$ est l' ouvert $\phi(U\cap V)$. L'application $\psi\circ\phi^{-1}$ est donc un homéomorphisme de l' ouvert $\phi(U\cap V) \subset \mathbb{R}^d$ sur l'ouvert $\psi(U\cap V) \subset \mathbb{R}^d$.



De la définition on obtient immédiatement la proposition suivante.

Proposition 3.1.5. *Toute partie ouverte d'une variété topologique de dimension d est elle même une variété topologique de dimension d. En particulier les composantes connexes d'une variété topologique de dimension d sont des variétés topologiques connexes de même dimension.*

Les variétés topologiques héritent certaines propriétés topologiques locales de $\mathbb{R}^n$, notamment

Proposition 3.1.6. *Une variété topologique est localement compacte, localement connexe par arcs et localement simplement connexe.*

Proposition 3.1.7. *Tout revêtement d'une variété topologique est une variété topologique de même dimension. Toute variété topologique connexe admet une revêtement universel.*

3.2 Variétés différentielles

Dorénavant et pour le reste de ce chapitre le mot différentiable signifie *différentiable de classe C^k, $k \geq 1$*. Également pour immersion, plongement, submersion, difféomorphisme, on entendra immersion, plongement, submersion, difféomorphisme de classe C^k, $k \geq 1$. Lorsque il s'agira de considérer des fonctions de différentes classes de différentiabilité on explicitera à nouveau la classe de chaque fonction.

Définition 3.2.1. Un atlas $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'une variété topologique M de dimension d est dit *différentiable* si, pour tout couple de cartes de l'atlas (U_α, ϕ_α) et (U_β, ϕ_β), le changement de coordonnées $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ est un difféomorphisme de l'ouvert $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^d$ sur l'ouvert $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^d$.[2]

Définition 3.2.2. Une *variété différentiable de dimension d* est une variété topologique de dimension d munie d'un atlas différentiable.

2. Évidemment lorsque $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ la condition est vide et donc vérifiée.

3.2.0.1 Un peu d'histoire.

Soient $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in A}$ et $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta\in B}$ deux atlas différentiables d'une variété topologique M. On dit que ces deux atlas différentiables sont *compatibles* pourvu que pour tout $\alpha \in A$ et tout $\beta \in B$ les changements de coordonnées $\phi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1}$ et $\psi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ soient des fonctions différentiables dans leurs domaines de définition.

Il est clair que la réunion de deux atlas compatibles est encore un atlas. Donc chaque atlas est contenu dans un unique atlas maximal, qui est la réunion de tous les atlas compatibles avec lui. Une *structure différentielle d'une variété topologique M* est la donnée d'un atlas différentiable maximal de M. Évidemment pour assigner un atlas maximal il suffit de donner simplement un atlas sur M.

Deux structures différentielles d'une variété topologique M données par deux atlas maximaux $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont *difféomorphe* s'il existe un homéomorphisme h de M sur lui-même qui envoie l'atlas $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{A}'$, ce qui revient à dire que pour toute carte (U, ϕ) de $\mathscr{A}$ et toute carte (V, ψ) de $\mathscr{A}'$ l'application partielle $\psi \circ h \circ \phi^{-1}$ est un difféomorphisme sur son domaine de définition. (On dit alors que h est un difféomorphisme de $(M, \mathscr{A})$ sur $(M, \mathscr{A}')$).

Exemple 3.2.3. Notons Id l'application identité de $\mathbb{R}$ sur lui-même et considérons l'atlas $\mathscr{A} = \{(\mathbb{R}, \mathrm{Id})\}$ sur $\mathbb{R}$. Comme cet atlas est formé par une seule carte, la condition sur les changements de coordonnées est vide et $\mathscr{A}$ définit une structure différentiable de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Soit $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'homéomorphisme défini par $\psi(x) = x^3$. L'atlas $\mathscr{A}' = \{(\mathbb{R}, \psi)\}$ formé par la seule carte $(\mathbb{R}, \psi)$ ne définit par la même structure différentielle sur $\mathbb{R}$ que l'atlas $\mathscr{A}$ car le changement de coordonnées $\phi \circ \psi^{-1}$ n'est pas une fonction différentiable.

Toutefois les atlas $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ sont difféomorphes car l'homéomorphisme $h(x) = \sqrt[3]{x}$ est un difféomorphisme de $(\mathbb{R}, \mathscr{A})$ sur $(\mathbb{R}, \mathscr{A}')$.

Une question importante en topologie est de comprendre combien structures différentielles non difféomorphes peuvent exister sur une variété donnée. D'abord il faut supposer qu'un variété topologique admet une atlas différentiable : c'est n'est pas toujours le cas car M. Kervaire a démontré en 1960 qu'il existe une variété topologique compacte de dimension 10 sans atlas différentiable.

En dimension 1 et 2, la réponse est relativement facile : il existe une seule structure différentielles, à un difféomorphisme près. La même affirmation est valable en dimension 3, dû à un théorème de E. Moise (1952). En dimension plus grand que 3 les choses sont beaucoup plus compliquées. En 1956 J. Milnor (Médaille Fields 1962) démontre qu'il existe 28 distinctes structure différentielles sur la sphère de dimension 7. Ensuite grâce au travaux de R. Kirby,L. Siebenmann, J. Milnor, M. Kervaire et M. Hirsch on a su que le nombre de structures différentielles sur une variété compacte de dimension plus grand que 4 est fini. En 1982 par les travaux combinés M. Freedman et S. Donaldson (Médailles Fields 1986) on a obtenu qu'il existe des structures différentielles distinctes de celle ordinaire sur $\mathbb{R}^4$!

Une question encore ouverte est la "Conjecture de Poincaré lisse en dimensions 4'' : combien de distinctes structures différentielles y a-t-il sur la sphère de dimension 4 ? Du point de vue topologique toutes les sphères homotopiquement équivalentes à la sphère ordinaire[3] sont homéomorphes à la sphère par le conjecture de Poincaré généralisée : cette conjecture a été démontrée en 1961 par S. Smale (Médaille Fields 1966) en dimension plus grand que 4 par M. Freedman en dimension 4 et en 2003 par G. Perelman (Médaille Fields 2006) en dimension 3.

3.2.1 Exemples

3.2.2 Exemples

Les exemples de variétés topologiques que nous avons étudiés à la section précédente sont tous des exemples de variétés différentielles de classe C^∞. Revoyons les rapidement.

Exemple 3.2.4. Tout ouvert $\mathcal{O}$ de l'espace $\mathbb{R}^n$ est évidemment une variété différentielle de dimension n avec un atlas formé par une seule carte $(\mathcal{O}, Id)$ où Id est la restriction à $\mathcal{O}$ de l'application identique de de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même. Comme l'atlas consiste d'une seule carte la condition de différentiabilité pour les fonctions de transition est satisfaite car elle est vide. En particulier, $\mathbb{R}^n$ est un variété différentielle.

Exemple 3.2.5. Une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$ de dimension k est une variété différentielle de dimension k. Explicitons ses cartes. On rappelle que une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n$ de dimension k est un ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ satifaisant la propriété suivante : pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert de p dans $\mathbb{R}^n$ et un difféomorphisme

$$\Phi\colon q \in U \mapsto \Phi(q) = (\phi_1(q), \phi_2(q)) \in]-1,1[^{n-k}[\times]-1,1[^k \subset \mathbb{R}^n$$

tel que

$$q \in M \cap U \iff \phi_1(q) = (0, \dots, 0).$$

Les cartes de M seront alors les couples $(M \cap U, (\phi_2)_{|M\cap U})$.

Le lecteur pourra vérifier, en utilisant le théorème des fonction implicites, que cet atlas est différentiable.

Exemple 3.2.6. La sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x^1, \dots, x^3) \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + \cdots + (x^3)^2 = 1\}$ est une variété différentielle de dimension 2 et de classe C^∞.

En effet, en ôtant un point de la sphère on obtient une partie homéomorphe à $\mathbb{R}^2$. On démontre cela à l'aide de la projection stéréographique qui consiste à

3. Une équivalence homotopique entre deux espaces X et Y est la donnée de deux applications continues $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Y$ telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient homotopes aux application identiques de Y et X, respectivement.

projeter la sphère de centre O, privée d'un point P, sur un plan π orthogonal au diamètre OP (et ne passant pas par P) : pour un point de la sphère $Q \neq P$ la projection de Q sur π est le point où la droite PQ coupe le plan π.

La projection indiquée dans la figure 3.1 est la projection stéréographique de la sphère $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ du pôle Nord $N = (0, 0, 1)$ sur le plan équatorial $z = 0$; elle est donnée analytiquement par l'application

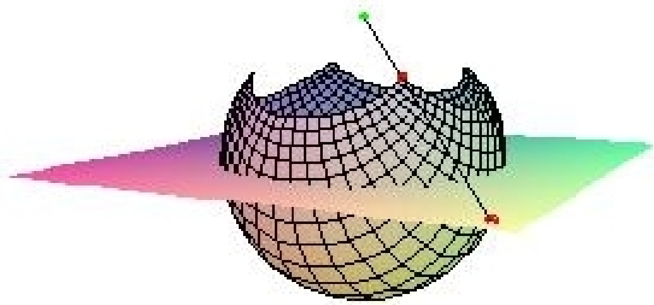


Fig. 3.1 La projection stéréographique

$$\mathrm{St}_N \colon (x, y, z) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \in \mathbb{R}^2 \approx \mathbb{C} \tag{3.1}$$

d'inverse

$$\mathrm{St}_N^{-1} \colon (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \frac{x^2+y^2-1}{1+x^2+y^2}\right) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathrm{N}\} \tag{3.2}$$

(La grille qui apparaît sur la sphère dans la figure 3.1 correspond aux droites parallèles aux axes coordonnées).

Les formules montrent bien que St_N et St_N^{-1} sont continues sur leurs domaines et que donc $(\mathbb{S}^2 \setminus \{\mathrm{N}\}, \mathrm{St}_N)$ est bien une carte.

Une autre carte est obtenue considérant la projection stéréographique du pôle sud $S = (0, 0, -1)$ sur le plan équatorial $z = 0$; elle est donnée en formules par $\mathrm{St}_S(x, y, z) = \big(x/1+z, y/1+z\big)$ pour $(x, y, z) \neq S$. On a ainsi deux cartes $(\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}, \mathrm{St}_N)$ et $(\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}, \mathrm{St}_S)$ qui forment une atlas de $\mathbb{S}^2$.

On vérifie sans difficulté que la fonction de transition $\mathrm{St}_S \circ \mathrm{St}_N^{-1}$ est l'application involutive de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ sur lui-même donnée par $(x, y) \mapsto (x, y)/(x^2 + y^2)$ (on peut regarder cette application comme l'involution de $\mathbb{C}^*$ donnée par $z \mapsto 1/\bar{z}$). Cette application étant de classe C^∞, la sphère est un variété différentiable de classe C^∞.

Exemple 3.2.7. Il est facile de généraliser l'exemple précédent en toute dimension. Notons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. La sphère $\mathbb{S}^n = \{(x^1,\dots,x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x^1)^2+\cdots+(x^{n+1})^2 = 1\}$ est une variété différentielle de dimension n et de classe C^∞ ; on a en fait vu qu'elle possède un atlas formé par deux cartes $(\mathbb{S}^n \setminus \{(0,\dots,0,\pm1)\}, \phi_\pm)$ données par les projections stéréographiques du sommet $(0,\dots,0,\pm1)$

$$\phi_\pm\colon (x^1,\dots,x^{n+1}) \in S^n \setminus \{(0,\dots,0,\pm1)\} \mapsto \frac{1}{1\mp x^{n+1}}(x^1,\dots,x^n) \in \mathbb{R}^n$$

et que la fonctions de transitions était données par la formule $y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \mapsto y/\|y\|^2 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ qui est une fonction C^∞ (ici on désigne par 0_n le point $(0,\dots,0)$ de $\mathbb{R}^n$) .

Exemple 3.2.8. Le plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^3$ passant par $(0,0,0)$.

Si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ on dénote par $[x:y:z]$ la droite de coefficients directeurs (x,y,z), c.-à-d. la droite $[x:y:z] = \{(tx,ty,tz) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Ainsi tout $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ définit un point de l'espace projectif et nous avons une application surjective

$$p:(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \mapsto [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

Évidemment $[x:y:z] = [x':y':z']$ si et seulement s'il existe $t \neq 0$ tel que $(x,y,z) = (tx',ty',tz')$: cela montre que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est l'espace quotient de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par la relation d'équivalence

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \text{ si et seulement si } \exists\, t \neq 0 \text{ tel que } (x,y,z) = (tx',ty',tz').$$

On muni $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ de la topologie quotient.

Une autre description de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ s'obtient en considérant que toute droite de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ coupe la sphère unité $\mathbb{S}^2 = \{x^2+y^2+z^2 = 1\}$ en deux points antipodaux ; donc il y a une bijection entre les droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ et l'ensemble $\{\{P,-P\} \mid P \in \mathbb{S}^2\}$. L'ensemble des point antipodaux de $\S^2$ est aussi l'ensemble des orbites de l'action sur $\S^2$ du groupe à deux éléments formé par l'identité I et l'involution $-I\colon P \in \mathbb{S}^2 \mapsto -P\mathbb{S}^2$.

Une métrique compatible avec la topologie sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^2/\sim$ est alors

$$d(\{P,-P\},\{Q,-Q\}) = \min(|P-Q|,|P+Q|).$$

Cela implique que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est un espace séparé.

Soit $U_x = \{[x:y:z] \mid x \neq 0\}$ et posons $\phi_x([x:y:z]) = (y/x, z/x)$; l'ensemble U_x est ouvert et ϕ_x est bien définie sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. L'application $\psi_x\colon (x,y,z) \mapsto (y/x,z/x)$ est une application continue de $p^{-1}(U_x) = \{(x,y,z) \mid x \neq 0\}$ sur $\mathbb{R}^2$; nous en déduisons que ϕ_x, qui est égale à $p \circ \psi_x$, est une application continue de U_x sur $\mathbb{R}^2$. L'application $h\colon (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (1,u,v) \in p^{-1}(U_x)$ est continue ; donc la composition $p \circ h$ est une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans U_x ; elle est évidemment l'inverse de ϕ_x. Cela montre que ϕ_x est un homéomorphisme de U_x sur le plan $\mathbb{R}^2$. On a alors une carte (U_x, ϕ_x) sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

On définit aussi les ouverts $U_y = \{[x : y : z] \mid y \neq 0\}$ et $U_z = \{[x : y : z] \mid z \neq 0\}$, et, sur ces ensembles, les applications $\phi_y([x : y : z]) = (x/y, z/y)$ et $\phi_z([x : y : z]) = (x/z, y/z)$; on démontre, comme on l'a fait au paragraphe précédent, que ϕ_y et ϕ_z sont des homéomorphismes de U_y et U_z sur le plan $\mathbb{R}^2$. Les trois cartes carte (U_x, ϕ_x), (U_y, ϕ_y) et (U_z, ϕ_z) forment un atlas sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

On a $\phi_x(U_x \cap U_y) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) | u \neq 0\} = \phi_y(U_x \cap U_y)$; la fonction de transition $\phi_y \circ \phi_x^{-1}$ est alors l'involution de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(u, v) | u \neq 0\}$ donnée par la formule $(u, v) \mapsto (1/u, v/u)$. On laisse au lecteur le souci de calculer les autres fonctions de transition.

Exemple 3.2.9. On généralise l'exemple précédent à l'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, l'ensemble des droites de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par 0.

L'espace projectif réel $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est une une variété différentielle de dimension n et de classe C^∞. Rappelons que $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est la variété topologique formée par les droites $[x^1 : x^2 : \cdots : x^{n+1}] = \{(tx^1, \ldots, tx^{n+1}) \mid t \in \mathbb{R}\}$, où $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0_{n+1}\}$. La topologie sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ est la topologie quotient déterminée par l'application $(x^1, \ldots, x^{n+1}) \mapsto [x^1 : x^2 : \cdots : x^{n+1}]$. On recouvre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ par $n+1$ cartes (U_k, ϕ_k), $k = 1, \ldots, n+1$, données par

$$U_k = \{[x^1, \ldots, x^{n+1}] \in P^n(\mathbb{R}) \mid x_k \neq 0\}.$$

et

$$\phi_k : [x^1, \ldots, x^{n+1}] \in U_k \mapsto \Big(\frac{x^1}{x^k}, \ldots, \frac{x^{k-1}}{x^k}, \frac{x^{k+1}}{x^k}, \ldots, \frac{x^{n+1}}{x^k}\Big) \in \mathbb{R}^n$$

Donc la famille $\{(U_k, \phi_k)\}$ est un atlas de $P^n(\mathbb{R})$. Pour montrer que cet atlas est différentiable il suffit d'observer que

$$\phi_j(U_j \cap U_k) = \{(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \mid y^{k-1} \neq 0\},$$
$$\phi_k(U_j \cap U_k) = \{(y^1, \ldots, y^n) \in \mathbb{R}^n \mid y^j \neq 0\}),$$

et que pour $j < k$ on a

$$\phi_j \circ \phi_k^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = \Big(\frac{y^1}{y^j}, \ldots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \ldots, \frac{y^{k-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^k}{y^j}, \ldots, \frac{y^n}{y^j}\Big)$$

alors que si $j > k$ on a

$$\phi_j \circ \phi_k^{-1}(y^1, \ldots, y^n) = \Big(\frac{y^1}{y^j}, \ldots, \frac{y^{k-1}}{y^j}, \frac{1}{y^j}, \frac{y^k}{y^j}, \ldots, \frac{y^{j-1}}{y^j}, \frac{y^{j+1}}{y^j}, \ldots, \frac{y^n}{y^j}\Big).$$

Dans tous les cas on obtient que $\phi_j \circ \phi_k^{-1}$ est un difféomorphisme C^∞ de $\phi_k(U_j \cap U_k)$ sur $\phi_j(U_j \cap U_k)$. Donc $P^n(\mathbb{R})$ est une variété différentiable de dimension n.

Exemple 3.2.10 (Produit de variétés différentiables). Soient M et N deux variétés de dimension m et n. Soient $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(V_\beta, \psi_\beta)_{\beta \in B}$ deux atlas respectivement de M et N. Sur le produit cartésien $M \times N$ on met la topologie produit des topologies de M et N, (les ensembles ouverts pour cette topologie sont définis comme les réunions d'ensembles de la forme $U \times V$ avec U ouvert dans M et V ouvert dans N). Ainsi $M \times N$ devient un espace topologique séparé et à base dénombrable.

Si on pose $\phi_\alpha \times \psi_\beta \colon (p,q) \in U_\alpha \times V_\beta \mapsto (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathbb{R}^{m+n}$ on voit que la collection $(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)_{\alpha \in A, \beta \in B}$ est un atlas différentiable de dimension $m+n$ sur $M \times N$.

Cette construction peut être évidemment généralisée à un produit de plusieurs facteurs. Par exemple le tore de dimension n, qu'on note $\mathbb{T}^n$, est défini comme le produit de n copies du cercle $\mathbb{S}^1$.

3.3 Applications différentiables

Définition 3.3.1. Soit $f \colon M \to N$ une application entre variétés différentielles. On dit que f est k fois différentiable en p s'il existe une carte $(U, \phi$ de M et une carte (V, ψ) de N telles que

— $p \in U$ et $f(p) \in V$,
— l'application partiellement définie $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est une application k fois différentiable d'un voisinage ouvert de $\phi(p)$ dans un voisinage ouvert de $\psi(f(p))$.

On vérifie, en exercice, que la définition donnée ne dépend pas des cartes choisies.

Définition 3.3.2. Soit $f \colon M \to N$ une application entre variétés différentielles. On dit que f est k fois différentiable (sur M) si f est k fois différentiable en tout point $p \in M$.

3.4 Variétés différentielles et revêtements

Théorème 3.4.1. *Le revêtement $\hat{M}$ d'une variété différentielle M admet une structure de variété différentielle telle que la projection $p : \hat{M} \to M$ est une application différentiable*

Théorème 3.4.2. *Soit $\hat{M}$ un revêtement galoisien d'un espace M . Supposons que $\hat{M}$ soit une variété différentielle et que le groupe d'automorphismes du revêtement agit différentiablement sur $\hat{M}$. Alors sur M admet une structure de variété différentielle telle que la projection $p : \hat{M} \to M$ est une application différentiable.*

Chapitre 4
Géométrie elliptique

4.1 Les quotients des sphères de dimension $2n$.

Théorème 4.1.1. *Les seules groupes discrets de* $\mathrm{O}(2n)$ *opérant librement sur la sphère* $\mathbb{S}^{2n}$*, de dimension* $2n$*, sont le groupe trivial* $\{I_{2n+1}\}$ *et le groupe à deux éléments* $\{I_{2n+1}, -I_{2n+1}\}$.

Preuve. Rappelons que les matrices de $\mathrm{O}(2n)$ sont des matrices carrées de dimensions impaires. Soit Γ un sous-groupe discret de $\mathrm{O}(2n)$ opérant librement sur la sphère $\mathbb{S}^{2n}$.

Si $A \in \Gamma \cap \mathrm{SO}(2n)$ alors la matrice A possède une valeur propre égale à 1 ; dans ce cas A fixe un point de $\mathbb{S}^{2n}$ et donc $A = I_{2n+1}$.

Si $A \in \Gamma \cap \mathrm{O}^-(2n)$ alors $A^2 \in \Gamma \cap \mathrm{SO}(2n)$ et donc $A^2 = I_{2n+1}$. Par le raisonnement précédent la matrice A ne peut pas posséder de valeurs propres égales à 1. Donc toutes ses valeurs propres sont égales à -1. Autrement dit $A = -I_{2n+1}$. □

Corollaire 4.1.2. *Les seules variétés différentielles localement isométriques à la sphère de dimension paire* $\mathbb{S}^{2n}$*, sont la* $\mathbb{S}^{2n}$ *elle même et l'espace projectif* $P^{2n}(\mathbb{R}) = \mathbb{S}^{2n}/\{I_{2n+1}, -I_{2n+1}\}$.

4.2 Pavages de $\mathbb{S}^2$

Nous avons vu que la listes des sous-groupes discrets de $\mathrm{O}(2)$ opérant librement sur la sphère $\mathbb{S}^2$ est très limitée. Dans cette section nous étudions les groupes d'isométries qui opèrent proprement sur $\mathbb{S}^2$. Puisque la sphère est compacte un tel groupe est nécessairement fini.

Le point de départ est la formules des classes énoncée dans le théorème suivant.

Théorème 4.2.1 (Formules des classes). *Soit* G *un groupe fini opérant sur un ensemble* X*. Pour* $x \in X$ *notons* G_x *le groupe de stabilité de* x *et* $\mathrm{Orb}(x) = Gx$ *l'orbite* *de x. Alors*

$$\operatorname{card}(\operatorname{Orb}(x)) = \operatorname{card}(G/G_x) \tag{4.1}$$

En particulier si X est fini et $\mathcal{O}$ est un ensemble de représentants des orbites de G (ce qui revient à dire, un ensemble qui intersecte chaque orbite en un seul point) alors

$$\operatorname{card} X = \sum_{x\in\mathcal{O}} \operatorname{card}(G/G_x) \tag{4.2}$$

Preuve. Le groupe G opère transitivement sur l'orbite $\operatorname{Orb}(x)$ de $x \in X$. L'application

$$\phi\colon\ g \in G \mapsto gx \in \operatorname{Orb}(x)$$

est surjective, par définition d'orbite. L'identité $g_1x = g_2x$ est équivalent à $x = g_1^{-1}g_2x$, c'est-à-dire $g_1^{-1}g_2 \in G_x$, ou encore $g_1G_x = g_2G_x$. Donc l'application ϕ passe au quotient G/G_x et donne une application bijective $\bar{\phi}\colon\ gG_x \in G/G_x \mapsto gx \in \operatorname{Orb}(x)$, ce qui démontre la formule (4.1).

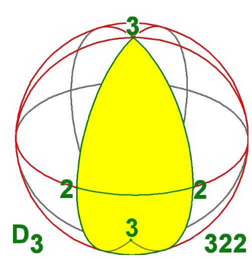
Les orbites forment une partition de X. Si X est fini on a alors $\operatorname{card}(X) = \sum_{x\in\mathcal{O}} \operatorname{card}(\operatorname{Orb}(x))$. ce qui démontre la formule (4.2). □

Dans la suite on présente une liste de sous-groupes finis de SO(2). Il sera utile de fixer un repère cartésien orthonormée de $\mathbb{R}^3$ et les coordonnées (x, y, z) correspondantes.

4.2.1 Le groupe D_n

Rappelons que le groupe D_n est le groupe de symétries d'un n-gon régulier.

Soit P_n un n-gon régulier de sommets $p_0, \dots p_{n-1}$, inscrit dans le cercle équatorial $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Pour fixer les idées supposons que le sommet p_1 soit le point $(1, 0, 0)$ et que les sommets $p_0, \dots p_{n-1}$ sont ordonnés sur le cercle équatorial dans le sens trigonométrique.



Soit Γ le sous-groupe de SO(2) qui envoie le polygone P_n dans lui-même. Le groupe Γ est donc un sous-groupe du groupe D_N des de symétries de P_n.; en particulier $\operatorname{card}\Gamma \le 2n$.

La rotation $A \in \mathrm{SO}(2)$ d'angle $2\pi/n$ et d'axe z est donc une symétries de P_n. Le groupe engendrée par A est un groupe cyclique $C_n \approx \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre n. La rotation

$B \in \mathrm{SO}(2)$ d'angle π et d'axe x réalise dans le plan (x, y) la symétrie d'axe x ; par conséquent elle fixe le sommet p_0 et envoie le sommet p_i au sommet p_{n-i}. Elle est donc une symétrie de P_N. Nous concluons que $\operatorname{card}\Gamma \geq 2n$, ce qui implique le groupe $\Gamma = \langle A, B\rangle = D_n$. Les rotations A et B satisfont les identités définissant le groupe diédral D_n

$$A^n = I, \quad B^2 = I, \quad BA^jB = A^{n-j}.$$

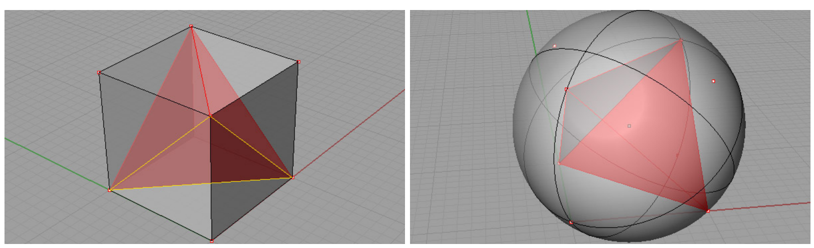
4.2.2 Le groupe tetraédral T

Soit $\mathscr{T}$ le tétraèdre régulier de sommets p_1, p_2, p_3, p_4 inscrit dans la sphère $\mathbb{S}^2$. On pourra supposer que le sommet p_1 soit le point $(0, 0, 1)$ et que le sommet p_2 appartient au plan xz (ce qui revient à dire que $p_2 = (-2\sqrt{2}/3, 0, 1/3)$.

Soit T le sous-groupe de $\mathrm{SO}(2)$ qui envoie le tétraèdre $\mathscr{T}$ sur lui-même. Le groupe T permute les sommets et donc il est un sous-groupe du groupe Σ_4 des permutations de 4 objets.

Soit T_{p_1} le groupe de stabilité du sommet p_1. Le groupe T_{p_1} permute les sommets p_2, p_3, p_4 et on peut donc le regarder comme un sous-groupe du groupe D_3 des symétries du triangle régulier $p_2p_3p_4$. La rotation A d'angle $2\pi/3$ et d'axe z est un élément d'ordre 3 de T_{p_1}.

Supposons que $g \in T_{p_1}$ fixe un des sommets p_i, parmi les sommet p_2, p_3, p_4 ; alors g fixe le plan contenant p_1 et p_i ce qui implique que g est l'identité. Nous concluons que T_{p_1} est le groupe cyclique C_3 engendé par A.

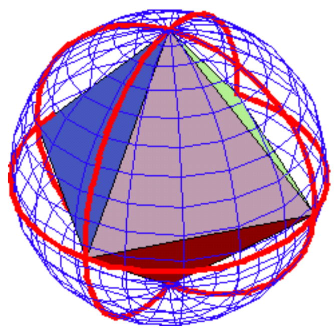


Observons que G opère transitivement sur les sommets : la rotation d'angle π d'axe passant par le point de milieu du coté p_1p_i et par le point de milieu du coté opposé envoie p_1 à p_i (et elle échange les deux autres sommets).

Par la formule des classes l'ordre de T est donc égal à 12, ce qui implique que le groupe T est isomorphe au groupe alterné A_4. Puisque A_4 n'a pas de sous-groupe d'ordre 6, le groupe T est engendré par une rotation d'angle $2\pi/3$ qui fixe un sommet et une rotation d'angle π qui fixe le milieu d'un coté.

4.2.3 Le groupe octaédral O

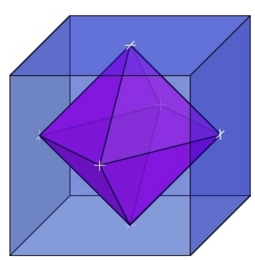
Soit / le octaèdre régulier de sommets p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 inscrit dans la sphère $\mathbb{S}^2$. On pourra supposer que le sommet p_0 soit le point $(0,0,1)$ et que le sommet p_2 appartient au plan xz (ce qui revient à dire que $p_2 = (-2\sqrt{2}/3, 0, 1/3)$.

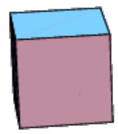


Soit O le sous-groupe de SO(2) qui envoie le tétraèdre $\mathscr{O}$ sur lui-même. L'octaèdre possède 8 faces en 4 paires opposées ; toute isométrie de O envoie une paire (non ordonnée) de faces opposées sur une paire (non ordonnée) de faces opposées. Comme il y a 4 paires non ordonnées de faces opposées, le groupe O est un sous-groupe du groupe Σ_4 des permutations de 4 objets. En particulier $\operatorname{card} O \leq 24$.

Soit O_{p_0} le groupe de stabilité du sommet p_0. Le groupe O_{p_0} permute les sommets p_1 p_2, p_3, p_4 et on peut donc le regarder comme un sous-groupe du groupe D_4 des symétries du carré $p_1 p_2 p_3 p_4$. La rotation A d'angle $\pi/2$ et d'axe z est un élément d'ordre 3 de O_{p_1}. Comme pour le groupe tetraèdral aucun élément du stabilisateur de p_0 peut fixer un sommet ou le milieu d'un coté du carré $p_1 p_2 p_3 p_4$ et cela implique que O_{p_0} est cyclique isomorphe à $C_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, car toute symétrie d'un carré qui renverse l'orientation fixe sois un sommet soit le point de milieu d'un coté.

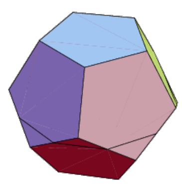
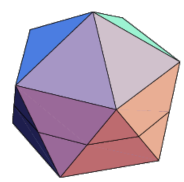
Le groupe O opère transitivement sur les sommets : la rotation d'angle π d'axe x envoie le sommet p_0 au sommet opposé p_5 et la rotation d'angle π d'axe passant par le milieu du coté $p_0 p_i$ et par le milieu du coté opposé, envoie p_0 sur p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Par la formule des classe $\operatorname{card} O = 4 \times 6 = 24$. Donc $O = \Sigma_4$.



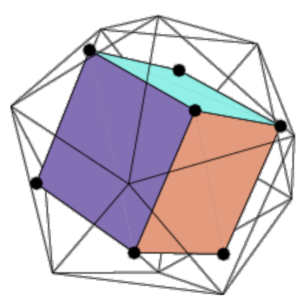


4.2.4 *Le groupe icosaédral* I

Soit $\mathscr{I}$ le icosaèdre régulier de 12 sommets $p_0, \dots, p_{11}$ inscrit dans la sphère $\mathbb{S}^2$. On pourra supposer que le sommet p_0 soit le point $(0,0,1)$, que $p_{11} = (0,0,-1)$, que les sommets $p_1, \dots, p_5$ soient les sommets adjacents à p_0 et que p_1 soit dans le plan xz. Les sommets $p_1, \dots, p_5$ sont les sommets d'un pentagone régulier.

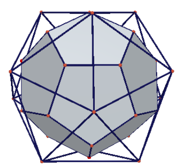



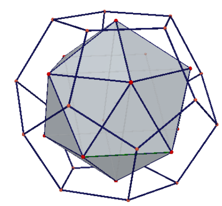
Soit I le sous-groupe de SO(2) qui envoie le icosaèdre $\mathscr{I}$ sur lui-même. L'icosaèdre possède 20 faces ; les centres des faces prise 8 à 8 forment les sommets d'un cube. Puisque un sommet est appartient à deux cubes distincts, il y 5 cubes distincts qui sont permutés par les isométries de I. Donc le groupe I est un sous-groupe du groupe Σ_5 des permutations de 5 objets. En particulier card$(\mathsf{I}) \le 120$.



Soit I_{p_0} le groupe de stabilité du sommet p_0. Le groupe I_{p_0} permute les sommets $p_1, \dots, p_5$ et on peut donc le regarder comme un sous-groupe du groupe D_5 des symétries du pentagone carré $p_1p_2p_3p_4p_5$. La rotation A d'angle $2\pi/5$ et d'axe z est un élément d'ordre 5 de I_{p_0}. Comme pour le groupe tetraèdral aucun élément du stabilisateur de p_0 ne peut fixer un sommet et cela implique que I_{p_0} est cyclique isomorphe à $C_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Le groupe I opère transitivement sur les sommets : la rotation d'angle π d'axe x envoie le sommet p_0 au sommet opposé p_5 et la rotation d'angle π d'axe passant par le milieu du coté $p_0 p_i$ et par le milieu du coté opposé, envoie p_0 sur p_i ($i = 1,2,3,4,5$). En composant ces deux types de rotations on obtient des éléments envoyant p_0 sur les sommets p_i, $i = 6,7,8,9,10$. Par la formule des classe card$\mathscr{I} = 5 \times 12 = 60$. Donc $\mathsf{I} = A_5$.





Théorème 4.2.2. *Soit $G \neq \{I\}$ un sous-groupe de* SO(2) *opérant proprement sur la sphère $\mathbb{S}^2$. Alors G est soit cyclique, soit G diédral, soit le groupe d'isométrie d'un polyèdre platonique.*

Preuve. Soit N l'ordre de G. Tout élément $g \in G$ distinct de l'identité fixe deux points opposés de la sphère. Si $p \in \mathbb{S}^2$ est un point fixe de $g \in G \setminus \{I\}$ et $h \in G$, alors $h.p$ est un point fixe de hgh^{-1}. On en tire deux conclusions :

1. G opère sur l'ensemble X des point fixes d'éléments non triviaux de G :
$$X = \{p \in \mathbb{S}^2 \mid \exists g \in G \setminus \{I\} \text{ tel que } g.p = p\}$$
2. Pour tout $p \in X$ et tout $h \in G \setminus \{I\}$ le stabilisateur $G_{h.p}$ est égal e $hG_p h^{-1}$; en particulier $\operatorname{card}(G_{h.p}) = \operatorname{card}(G_p)$.

Soit $\{p_1, \dots, p_q\}$ un ensemble de représentants des orbites de G sur X. Par la formule des classes

$$\operatorname{card}(\operatorname{Orb}(p_i)) = N/\operatorname{card}(G_{p_i}), \quad \forall i = 1, \dots q$$

Soit
$$Y = \{(g,p) \in G \times X \mid g \in G \setminus \{I\}, g.p = p\}$$

Puisque tout $g \in G \setminus \{I\}$ fixe exactement deux éléments de X nous avons

$$\operatorname{card}(Y) = \sum_{g \in G \setminus \{I\}} \operatorname{card}\{p \in X \mid g.x = x\} = 2\operatorname{card}(G \setminus \{I\}) = 2(N-1)$$

Puisque nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(Y) &= \sum_{p\in X} \mathrm{card}\{g \in G \setminus \{I\} \mid g.x = x\} = \sum_{p\in X} (\mathrm{card}(G_p) - 1)\\ &= \sum_{i=1}^{q} (\mathrm{card}(G_{p_i})) - 1)\,\mathrm{card}(\mathrm{Orb}(p_i))\\ &= N \sum_{i=1}^{q} \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{card}(G_{p_i}))}\Big).\end{aligned}$$

On conclut que

$$2 - \frac{2}{N} = \sum_{i=1}^{q} \Big(1 - \frac{1}{\mathrm{card}(G_{p_i}))}\Big), \tag{4.3}$$

où, on le rappelle, q est le nombre d'orbites de G sur X.

On pose $n_i = \mathrm{card}(G_{p_i})$. Par la formule des classes n_i divise N. On ordonnes les orbites de façon que

$$2 \le n_1 \le n_1 \le \cdots \le n_q \le N.$$

Puisque $N \ge n_i \ge 2$ le membre à gauche de la (4.3) est strictement inférieur à 2 et le membre à droite est supérieur à $q/2$. Donc $q \le 3$.

Étudions toutes les solutions de l'identité (4.3).

1. $q = 1$. Cela est impossible. Sinon, on aurait

$$1 = 2/N - \sum_{i=1}^{q} 1/n_i \le 2/N - 1/n_1 \le 1/N,$$

une contradiction car $N > 1$.

2. $q = 2$. On a

$$2/N = \sum_{i=1}^{2} 1/n_i \ge 2/n_1,$$

légalité étant possible si et seulement si $n_1 = n_2$. Cette inégalité implique $N/n_1 \le 1$. Puisque l'indice de G_{p_1} dans G ne peut pas être inférieur à 1 on doit avoir $N = n_1 = n_2$. Donc tous les éléments de G fixent p_1 et p_2, d'où $p_1 = -p_2$. Aucun élément de G envoie p_1 à $-p_1$ car ces deux points appartiennent à orbites distinctes. Donc G est un sous-groupe du groupe des rotations d'axe $p_1 p_2$. Puisque G est fini, il est cyclique, engendré par une rotation d'angle minimal.

3. $q = 3$, $n_1 = n_2 = 2$. Dans ces cas, l'identité (4.3) nous donne $n_3 = N/2$. Le groupe G_{p_3} est d'indice 2 et distingué dans G. Tois observations :
   - Puisque G_{p_3} est d'indice 2, par la formule des classes, l'orbite de p_3 est constitué de deux éléments : $\mathrm{Orb}(p_3) = \{p_3, p_3'\}$.
   - Puisque G_{p_3} est distingué dans G, le groupe G_{p_3} fixe p_3'.
   - Puisque tout $g \in \mathrm{SO}(3) \setminus \{I\}$ stabilise uniquement deux points antipodaux, le point p_3' est égal au point $-p_3$ opposé à p_3.

On conclut que G_{p_3} est un sous-groupe du groupe des rotations d'axe ℓ passant p_3 et $-p_3$; par conséquent G_{p_3} est un groupe cyclique d'ordre $n_3 = N/2$ engendré par une rotation A d'angle $2\pi/n_3$ et d'axe ℓ.

Le groupe $G_{p_3} = \langle A\rangle$ est donc contenu dans le groupe des symétries d'un n_3-gon régulier $P = q_0 q_1 \dots q_{n_3-1}$ contenu dans le plan othogonal à l'axe ℓ. Les sommets de le n_3-gon P sont donnés par $q_i = A^i q_0$. Puisque $G_{p_3} = \langle A\rangle$ est distingué dans G, le n_3-gon P est envoyé dans lui-même par tout autre isométrie $g \in G$. Donc G est contenu dans D_{n_3}, le groupe d'isométries de un n_3-gon régulier. Puisque l'ordre de G est égal à $N = 2n_3$, on a $G = D_{n_3}$.

4. $q = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n = 3$. Dans ce cas $N = 12$. L'orbite de p_3 consiste alors de 4 points $\{p_3 = q_0, q_1, \dots, q_3\}$. Soit $\mathscr{T}$ le tétraèdre de sommets $\{p_3 = q_0, q_1, \dots, q_3\}$. Le groupe G opère sur $\mathscr{T}$ par isométries. Puisque l'ordre de G est 12, le même ordre que le groupe de symétries d'un tétraèdre régulier, le tétraèdre $\mathscr{T}$ a toutes les symétries d'un tétraèdre régulier et il est donc régulier. Nous concluons que G est le groupe de symétrie d'un tétraèdre régulier. Remarquons, pour terminer que les points de l'orbite de p_2 sont les sommets du tétraèdre dual à $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}' = \{-q_0, -q_1, \dots, -q_3\}$, car toute isométrie du tétraèdre qui fixe un sommet, fixe aussi la face opposée.

5. $q = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n = 4$. Dans ce cas $N = 24$. L'orbite de p_3 consiste alors de 6 points $\{p_3 = q_0, q_1, \dots, q_6\}$. Deux observations :
   — Si $p \in G.p_3$ alors le stabilisateur de p est un conjugué de G_{p_3} est donc d'ordre 6. Réciproquement si $p \in X$ a un stabilisateur d'ordre 6, alors il n'appartient pas à l'orbite de p_1 ou p_2 (car ces points on stabilisateurs d'ordre 2 ou 3), et donc il appartient à l'orbite de p_3.
   — Si un point $p \in X$ a un stabilisateur d'ordre 6, son opposé $-p$ a aussi un stabilisateur d'ordre 6, car toute isométries qui fixe p fixe $-p$ aussi.

   Nous concluons que les 6 points $\{p_3 = q_0, q_1, \dots, q_6\}$ de l'orbite de p_3 viennent en paires de points opposés : après changement d'indices on pourra supposer que $G.p_3 = \{p_3 = q_0, q_1, q_2, -q_0, -q_1, -q_2\}$. Le groupe G_{p_3} est donc un sous-groupe du groupe de rotations d'axe ℓ passant par q_0 et $-q_0$. Comme il est d'ordre 4 il est engendré par une rotation A d'angle $\pi/2$ et d'axe ℓ. Soit $\mathscr{O}$ l'octaèdre de sommets $\{p_3 = q_0, q_1, q_2, -q_0, -q_1, -q_2\}$. Le groupe G agit par symétries sur cet octaèdre, et le sous-groupe $\langle A\rangle$ fixe les sommets $\{q_0, -q_0\}$ et permute les sommets $\{q_1, q_2, -q_1, -q_2\}$. Il s'ensuit que $\mathscr{O}$ est un octaèdre régulier est que G est le groupe de symétries de cet octaèdre.

   Terminons en remarquant que le groupes G_{p_1} et G_{p_2} correspondent aux sous-groupes qui stabilisent un coté et une face de l'octaèdre $\mathscr{O}$, respectivement.

6. $q = 3$, $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n = 5$. Dans ce cas $N = 60$. L'orbite de p_3 consiste alors de 12 points $G.p_3 = \{p_3 = q_0, q_1, \dots, q_{12}\}$. En argumentant comme dans le cas précédent, on démontre que l'orbite $G.p_3$ consiste de paires de points opposés et que le sous-groupe G_{p_3} est un sous-groupe d'ordre 5 du groupe de rotations d'axe ℓ passant par q_0 et $-q_0$; par conséquent il est engendré

par une rotation A d'angle $2\pi/5$ et d'axe ℓ. Soit $\mathscr{I}$ l'icosaèdre engendré par les sommets q_i.

Comme G_{p_3} a ordre 5, les orbites de G_{p_3} sur l'ensemble de sommets $\{p_3 = q_0, q_1, \ldots, q_{12}\}$ sont $\{q_0\}$, $\{-q_0\}$, $\{q_1, Aq_1 \ldots, A^4 q_1\}$ et $\{-q_1, -Aq_1 \ldots, -A^4 q_1\}$. Les deux sous-ensembles $\{q_1, Aq_1 \ldots, A^4 q_1\}$ et $\{-q_1, -Aq_1 \ldots, -A^4 q_1\}$ engendrent deux pentagones réguliers qui ne sont pas dans les même plan, car sinon le icosaèdre $\mathscr{I}$ serait une double pyramide sur un décagone, avec un groupe de symétrie D_{10} d'ordre 20.

Il s'ensuit que le l'icosaèdre $\mathscr{I}$ est engendré par $\{q_0\}$, $\{-q_0\}$ et les deux pentagones $\{q_1, Aq_1 \ldots, A^4 q_1\}$ et $\{-q_1, -Aq_1 \ldots, -A^4 q_1\}$ qui sont opposés, orthogonales à l'axe ℓ et pas sur le même plan. Un tel l'icosaèdre $\mathscr{I}$ a un groupe de symétries d'ordre 60 si et seulement s'il est régulier.

Cela conclut la preuve car il pour $n_3 > 5$ il n'y a pas de solution N entière à léquation (4.3). $\square$

4.3 Annexe : Un peu de théorie des groupes

4.3.1 *Produits semi-direct de groupes*

Notation. En général on note e_G l'élément neutre d'un groupe G. Dans les groupes matricieles, la matrice identité $n \times n$ est notée I_n.

Soient K et H deux groupes. Soit aussi donné un homomorphisme ϕ de K dans le groupe d'automorphismes de H :

$$\phi\colon K \to \mathrm{Aut}(H), \quad k \mapsto \phi_k.$$

On introduit un opération interne sur l'ensemble $K \times H$ définie par

$$(k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2) = \big(k_1 k_2, h_1 \phi_{k_1}(h_2)\big). \tag{4.4}$$

Avec cette opération $K \times H$ dévient un groupe. Vérifions l'associativité, en tenant compte que $\phi_{k_1} \circ \phi_{k_2} = \phi_{k_1 k_2}$ et que $\phi_{k_1}(hh') = \phi_{k_1}(h)\phi_{k_1}(h')$:

$$\begin{aligned}
\big((k_1, h_1) \cdot (k_2, h_2)\big) \cdot (k_3, h_3) &= \big(k_1 k_2, h_1 \phi_{k_1}(h_2)\big) \cdot (k_3, h_3) \\
&= \big(k_1 k_2 k_3, h_1 \phi_{k_1}(h_2) \phi_{k_1 k_2}(h_3)\big) \\
&= \big(k_1 k_2 k_3, h_1 \phi_{k_1}(h_2 \phi_{k_2}(h_3))\big) \\
&= \ (k_1, h_1) \cdot \big(k_2 k_3, h_2 \phi_{k_2}(h_3)\big) \\
&= \ (k_1, h_1) \cdot \big((k_2, h_2) \cdot (k_3, h_3)\big)
\end{aligned}$$

Il est aussi facile de voir que (e_K, e_H) est l'élément neutre pour cette opération et que l'inverse de (k, h) est l'élément $(k^{-1}, \phi_{k^{-1}}(h^{-1}))$.

Définition 4.3.1. L'ensemble $K \times H$ muni de l'opération de groupe (4.4) est dit le *produit semi-direct (externe) de groupes K et H suivant ϕ.*

Ce groupe est noté $K \ltimes_\phi H$.

Remarquons que $K \ltimes_\phi H$ contient deux sous-groupes K' et H' isomorphes à K et H, respectivement ; ces groupes sont donnés par

$$K' = \{(k, e_H) \mid k \in K\}, \quad \text{et} \quad H' = \{(e_K, h) \mid h \in H\}$$

et les isomorphismes mentionnés sont les inclusion naturelles

$$k \in K \mapsto (k, e_H) \in K' \quad \text{et} \quad h \in H \mapsto (e_K, h) \in H'.$$

Il est facile de voir que les sous-groupes K' et H' satisfont les propriétés suivantes :

— $K' \cap H'$ est réduit à l'élément neutre de $K \ltimes_\phi H$.
— K' et H' engendrent $K \ltimes_\phi H$ car $(e_K, h) \cdot (k, e_H) = (k, h)$,
— H' est distingué dans $K \ltimes_\phi H$ et

$$(k, e_H) \cdot (e_K, h) \cdot (k, e_H)^{-1} = (e_K, \phi_k(h)).$$

Réciproquement supposons que deux sous-groupes K et H d'un groupe G satisfont les propriétés suivantes :

1. $K \cap H$ est réduit à l'élément neutre de G.
2. K et H engendrent G.
3. H est distingué dans G.

Posons, pour tout $k \in K$ et tout $h \in H$,

$$\phi_k(h) = khk^{-1}.$$

L'application $\phi\colon k \in K \mapsto \phi_k \in \mathrm{Aut}(H)$ ainsi définie est un homomorphisme. Il est alors facile de vérifier que le groupe G est isomorphe au groupe $K \ltimes_\phi H$, l'isomorphisme étant donné par l'application

$$(k, h) \in K \ltimes_\phi H \mapsto hk \in G.$$

En conclusion un groupe G est, à un isomorphisme près, un produit semi-direct si et seulement si il contient deux sous-groupes K et H d'un groupe G satisfaisant les les propriétés 1, 2 et 3 ci-dessus.

Dorénavant nous dirons que le groupe G *est le produit semi-direct (interne) des sous-groupe K et H et nous écrirons* $G = K \ltimes H$ si les sous-groupe K et H de G satisfont les propriétés 1, 2 et 3 ci-dessus. (Dans le symbole $\ltimes$ la pointe du triangle est dirigée vers le sous-groupe distingué).

Il est important de remarquer que si $G = K \ltimes_\phi H$ l'application

$$(k, h) \mapsto k$$

est un homomorphisme surjectif (épimorphisme) de G sur K.

Remarque 4.3.2. Une suite d'homomorphismes $\cdots H_i \stackrel{\phi_i}{\to} H_{i+1} \stackrel{\phi_{i+1}}{\to} H_{i+2} \cdots$ et dite *exacte* si pour tout i l'image de ϕ_i coïncide avec le noyau de ϕ_{i+1}. En particuliers une suite exacte courte (dans laquelle 0 représente le groupe trivial)

$$0 \to H \stackrel{\phi}{\to} G \stackrel{\psi}{\to} K \to 0$$

est équivalente à la donné d'un morphisme injectif $H \stackrel{\phi}{\to} G$ et d'un morphsime surjectif $G \stackrel{\psi}{\to} K$. On dit qu'une suite exacte courte $0 \to H \stackrel{\phi}{\to} G \stackrel{\psi}{\to} K \to 0$ est *déployée* s'il existe un morphisme $K \stackrel{\sigma}{\to} G$ tel que $\psi \circ \sigma$ est l'identité de K. Il est facile de voir que G est le produit semi-direct de H et K si et seulement s'il existe une suite exacte déployée

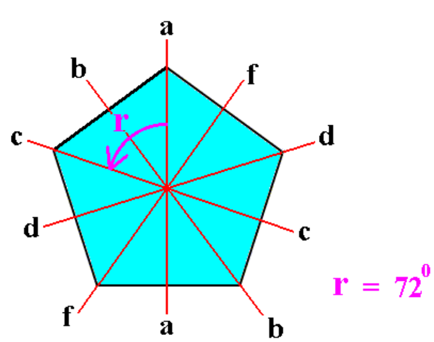
$$0 \to H \stackrel{\phi}{\to} G \underset{\sigma}{\overset{\psi}{\rightleftharpoons}} K \to 0.$$

4.3.2 *Exemples notables de produits semi-directs*

Tout groupe G qui possède un sous-groupe H d'indice 2 et un élément f d'ordre 2 est un produit semi-direct. En effet un sous-groupe d'indice 2 est distingué et si on pose $K = \{e_G, f\}$ toutes les propriétés 1-3 définissant un produit semi-direct sont satisfaites.

Le groupe symétrique. Le groupe S_n des permutation de n objets, dit groupe symétrique à n lettres, le tombe dans cette classe : il est le produit semi-direct du groupe alterné A_n, d'indice 2 et d'un sous-groupe engendré par un transposition.

Le groupe diédral. Un autre groupe dans cette classe est le *groupe diédral* D_n, le groupe de symétries d'un polygone régulier P_n à n cotés.



Si on place le centre du polygone à l'origine du plan et un sommet sur l'axe des abscisses, le symétries du polygone P_n sont engendrée par une rotation d'angle $2\pi/n$ et la réflexion par rapport à l'axe des abscisses. En utilisant coordonnées complexes dans le plan ces deux transformation s'écrivent

$$R(z) = e^{2\pi i/n}z, \quad S(z) = \overline{z} \tag{4.5}$$

ce qui permet de vérifier facilement les relations

$$R^n = I, \quad S^2 = I, \quad SRS^{-1} = R^{n-1} = R^{-1}. \tag{4.6}$$

La dernière relation implique $SR^jS^{-1} = R^{n-j}$. Par conséquent, le groupe D_n consiste des $2n$ éléments R^jS^i, $i = 0,1$ et $j = 0,1,\dots,n-1$ et il est engendré par le sous-groupe cyclique $\langle R\rangle \approx \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ d'ordre n et le sous-groupe $\langle S\rangle$ d'ordre 2.

Cela nous permet d'écrire

$$D_n = \langle S\rangle \ltimes \langle R\rangle.$$

Réciproquement, si G est un groupe engendré par deux éléments R et S satisfaisant les relations (4.6) alors G est isomorphe à D_n.

Terminons par la remarque suivante. L'application R^jS est une symétrie par rapport à la droite qui forme un angle $e^{\pi ij/n}$ avec l'axe réelles ; si n est impair cette droite passe par un sommet et le milieu do coté opposé ; si n est pair cette droite passe par deux sommets pour j pair et par les milieu de deux cotés opposés si j est impaire.

Les groupes précédents sont des groupes finis. La géométrie nous donne d'autres exemples importants de produits semi-directs.

Le groupe affine. On se donne un espace vectoriel V de dimension n sur un corps $\mathbb{F}$. *On note* $\mathrm{Gl}(V)$ *le groupe d'automorphismes de* V, ce qui revient à dire le groupe des applications linéaires inversibles de V dans lui-même (la multiplication dans ce groupe étant donnée par la composition). Une *application affine* de V dans lui-même est, par définition, une application L donnée par la formule

$$Lv = Av + b, \quad \text{où } A \in \mathrm{Gl}(V), b \in V. \tag{4.7}$$

Une telle application est uniquement déterminée par le couple $(A, b) \in Gl(V) \times V$ et on pourra la noter $L_{A,b}$ lorsque cela convient. Un calcul facile donne les identités

$$L_{A_1,b_1}L_{A_2,b_2} = L_{A_1A_2,b_1+A_1b_2}, \quad \text{et} \quad L_{A,b}^{-1} = L_{A^{-1},-A^{-1}b}, \tag{4.8}$$

où on a posé $L_{A_1,b_1}L_{A_2,b_2} = L_{A_1,b_1} \circ L_{A_2,b_2}$. Comme l'ensemble des applications affines est stable par composition et passage à l'application réciproque, cet ensemble est un sous-groupe du groupe de bijections de V sur lui-même. *On note* $\mathrm{Aff}(V)$ *le groupe des applications affines de* V *sur lui-même.*

En observant la formule (4.7) définissant une application affine, on remarque deux cas notables. Pour $b = 0$ l'application affine $L_{A,0}$ coïncide avec l'automorphisme A ; on peut donc regarder $\mathrm{Gl}(V)$ comme un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(V)$ via l'identification naturelle

$$L_{A,0} \approx A.$$

Si $A = I$, où I est l'automorphisme identique de V sur V, alors l'application affine $L_{I,b}$ coïncide avec la *translation* t_b définie par

$$t_b \colon x \in V \mapsto x + b \in V$$

L'ensemble des translations $T = \{t_b \mid b \in V\}$ forme un sous-groupe du groupe affine $\mathrm{Aff}(V)$ isomorphe au groupe additif sous-jacent à V car

$$t_{b_1} t_{b_2} = t_{b_1+b_2}.$$

L'identité

$$L_{I,b} L_{A,0} = L_{A,b}$$

montre que les sous-groupes $\mathrm{Gl}(V)$ et T engendrent le groupe affine $\mathrm{Aff}(V)$. Il est aussi évident que le seul élément commune à $\mathrm{Gl}(V)$ et à T est l'élément neutre $L_{I,0}$. Finalement observons que le sous-groupe des translations est distingué : il suffit pour cela de vérifier l'identité

$$A t_b A^{-1} = t_{Ab}.$$

En conclusion le groupe affine est un produit semi-direct

$$\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{GL}(V) \ltimes T$$

du sous-groupe d'automorphismes $\mathrm{GL}(V)$ et du groupe T des translations de V.

Lorsque on se donne une base $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ de V et les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ relatives à cette base, le groupe des automorphismes $\mathrm{Gl}(V)$ s'identifie au groupe des matrices inversibles $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{F})$ de taille n en associant à tout automorphisme sa matrice dans la base donnée. De même une translation t_b est uniquement déterminée par les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ du vecteur b relatives à la base donnée ; cette correspondance est un isomorphisme de T sur $\mathbb{F}^n$. On obtient ainsi un isomorphisme du groupe affine $\mathrm{Aff}(V)$ avec le groupe affine de $\mathbb{F}^n$

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{F}^n) = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}) \ltimes \mathbb{F}^n$$

Une façon simple de comprendre la structure du groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}^n)$ est de le regarder comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{F})$. Soit $\widetilde{\mathrm{Aff}}(\mathbb{F}^n)$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{F})$ définit par

$$\widetilde{\mathrm{Aff}}(\mathbb{F}^n) = \left\{ \widetilde{A} = (\widetilde{a}_{i,j}) \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{F}) \mid \widetilde{a}_{n+1,1} = \widetilde{a}_{n+1,2} = \cdots = \widetilde{a}_{n+1,n} = 0, \widetilde{a}_{n+1,n+1} = 1 \right\}.$$

Une matrice $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathrm{Aff}}(\mathbb{F}^n)$ s'écrit alors

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & b \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \quad A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}), b \in \mathbb{F}^n;$$

et elle est donc complètement déterminée par le couple $(A,b) \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F}) \times \mathbb{F}^n$; l'identité

$$\widetilde{A}_1 \widetilde{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & b_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_2 & b_2 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A_1 A_2 & A_1 b_2 + b_1 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

montre, lorsque on la compare à la règle de multiplication(4.8), que $\widetilde{\mathrm{Aff}}(\mathbb{F}^n)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{F})$ isomorphe à $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}^n)$.

Lorsque $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou plus généralement lorsque $\mathbb{F}$ est une corps topologique), les groupes $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}^n)$ et $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{F})$ ont une topologie induite par leurs inclusions, coordonnée par coordonnée, dans $\mathbb{F}^{n^2+n}$ et $\mathbb{F}^{(n+1)^2}$, respectivement. Les règles de multiplication de ces groupes étant des fonctions polynomiales des coordonnées, il est clair que ces groupes sont des groupes topologiques et que $\widetilde{\mathrm{Aff}}(\mathbb{F}^n)$ est un sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{F})$. Il est aussi évident que l'isomorphisme précédemment établit entre $\widetilde{\mathrm{Aff}}(\mathbb{F}^n)$ et $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}^n)$ est un homéomorphisme (en effet un difféomorphisme).

Ainsi nous pouvons à tous égards considérer le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}^n)$ comme un sous-groupe fermé du groupe topologique $\mathrm{GL}(n+1,\mathbb{F})$.

La topologie du groupe $\mathrm{Aff}(\mathbb{F}^n)$ se transporte au groupe $\mathrm{Aff}(V)$ via l'isomorphisme entre ces deux groupes déterminée par le choix d'une base de V (la vérification que cette définition ne dépende pas de la base choisie est laissée en exercice).

Les sous-groupes des groupes affines.

Soit K uns sous-groupe fermé du groupe $\mathrm{Gl}(V)$ des automorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Examples naturels sont les sous-groupes K préservant une forme bilinéaire sur V, le volume etc. Alors $K \ltimes T$ est un sous-groupe fermée du groupe affine $\mathrm{Aff}(V) = \mathrm{Gl}(V) \ltimes T$.

Le groupe des isométries de l'espace euclidien.

Soit V une espace euclidien, ce qui revient à dire un espace vectoriel de dimension finie sur le corps $\mathbb{R}$ muni d'une forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ non dégénérée, définie positive. La forme $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est dite produit scalaire. Le produit scalaire définit une norme et une distance d sur V. Comme $\mathbb{R}$ est complet, l'espace métrique (V,d) est complet.

Quitte à fixer une base orthonormée $(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)$ de V et à définir les coordonnées $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ relatives à cette base, on pourra supposer que $V = \mathbb{R}^n$ et que le produit scalaire est définit par

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \forall x = (x_1,\ldots,x_n), y = (y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{4.9}$$

On identifiera alors l'algèbre des endomorphismes linéaires de V à l'algèbre $M(n,\mathbb{R})$ des matrices réelles carrée de taille $n\times n$ et le groupe $\mathrm{Aut}(V)$ à $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}^n)$.

Notation. On notera $\mathbb{E}^n$ l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne définie par le produit scalaire (4.9).

Rappelons que le *groupe orthogonale de* $\mathbb{R}^n$, noté $\mathrm{O}(n)$, est le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathbb{R}^n$ qui préserve la forme bilinéaire (4.9).

Proposition 4.3.3. *Toute isométrie de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est la composition d'une translation et d'une application linéaire orthogonale.*

Preuve. Exercice. Voilà les étapes. Soit ϕ une isométrie de $\mathbb{E}^n$.

1. En composant ϕ avec une translation on obtient une nouvelle isométrie qui fixe l'origine. On pourra supposer donc que ϕ fixe l'origine,
2. On montre que ϕ envoie droites sur droites. Pour cela on utilisera le fait que $\|x-y\| = \|x-z\| + \|z-y\|$ si et seulement si x, y et z.
3. On montre que ϕ envoie une base orthonormée sur une base orthonormée. Pour cela on utilisera le fait que un triangle est rectangle si et seulement si le théorème de Pythagore s'applique.
4. On conclura en montrant que ϕ préserve les angles. □

Par cette Proposition nous obtenons que le groupe $\mathrm{Iso}(\mathbb{E}^n)$ des isométries de l'espace euclidien $\mathbb{E}^n$ est le sous-groupe du groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ donné par

$$\mathrm{Iso}(\mathbb{E}^n) = \mathrm{O}(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Rappelons que le groupe orthogonale a deux composantes connexes : la composante de l'élément neutre I_n est le sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ formé par les applications orthogonales préservant l'orientation ; l'autre composante $\mathrm{O}^-(n)$ est formée par les applications orthogonales qui renversent l'orientation. Cette décomposition en composantes corresponde à la décomposition en matrices de déterminant $+1$ et -1 respectivement.

Rappelons que la connexité par arcs de $\mathrm{SO}(n)$ découle de la Proposition suivante.

Proposition 4.3.4. *Pour tout $A \in \mathrm{O}(n)$ il existe une base orthonormée $\mathbf{f} = (\mathbf{f}_1,\dots,\mathbf{f}_n)$ de $\mathbb{E}^n$ telle que la matrice de l'application linéaire associée à A relative à la base $\mathbf{f}$ est donnée par une matrice diagonale à blocs*

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & & \\ & R_{\theta_2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & R_{\theta_k} & & \\ & & & & -I_\ell & \\ & & & & & I_m \end{pmatrix}, \tag{4.10}$$

où $2k+\ell+m=n$, *et* R_θ *dénote la matrice de la rotation d'angle* θ *dans* $\mathbb{R}^2$, *à savoir*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $A \in \mathrm{SO}(2k+1)$ *la matrice de l'application linéaire associée à* A *relative à la base* $\mathbf{f}$ *est donnée par une matrice diagonale à blocs*

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & R_{\theta_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & R_{\theta_k} & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $A \in \mathrm{SO}(2k)$ *la matrice de l'application linéaire associée à* A *relative à la base* $\mathbf{f}$ *est donnée par une matrice diagonale à blocs*

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & \\ & R_{\theta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}.$$

On note $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{E}^n)$ le groupe des isométries de $\mathbb{E}^n$ qui préservent l'orientation. On a alors

$$\mathrm{Iso}^+(\mathbb{E}^n) = \mathrm{SO}(n) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Chapitre 5
La géométrie au plat pays

5.1 Préliminaires

On muni $\mathbb{R}^n$ de la structure d'espace euclidien définie par le produit scalaire usuel et par la métrique qui en dérive.

L'espace des endomorphismes de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera muni de la norme d'opérateur $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

On notera $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ le groupe des isométries de l''espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Rappelons que $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ contient le sous-groupe T dont les élément sont les translations

$$t_v \colon x \in \mathbb{R}^n \mapsto x + v \in \mathbb{R}^n, \qquad (v \in \mathbb{R}^n).$$

Le sous-groupe T est distinguée dans $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ et isomorphe au groupe additif $\mathbb{R}^n$ via l'application $v \mapsto t_v$. Il agit transitivement sur $\mathbb{R}^n$; par conséquent l'action de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathbb{R}^n$ est transitive.

Les isométries de $\mathbb{R}^n$ qui fixent l'origine sont des applications linéaires orthogonales ; le stabilisateur de l'origine est alors le groupe orthogonal $\mathrm{O}(n)$.

Le sous-groupe $\mathrm{SO}(n)$ de $\mathrm{O}(n)$, constitué par les applications préservant l'orientation (isométries directes), est la composante connexe de l'identité $I \in \mathrm{O}(n)$; l'autre composante sera noté $\mathrm{O}^-(n)$. En nous départant des conventions habituelles, nous appellerons "rotation" tout élément de $\mathrm{O}(n)$, même s'il renverse l'orientation.

Toute isométrie $L \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ s'écrit

$$L = L_{A,v} \colon x \mapsto Ax + v, \quad A \in \mathrm{O}(n), v \in \mathbb{R}^n;$$

toute isométrie est donc la composition d'une translation $t_v = L_{I,v}$ et d'une rotation $L_{A,0} = A$:

$$L_{A,v} = t_v \circ A$$

Le groupe $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ est donc le produit semi-direct de $\mathrm{O}(n) \ltimes T$ des ses sous-groupes $\mathrm{O}(n)$ et T. On notera

$$\rho\colon \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{O}(n), \qquad \rho(L_{A,v}) = A \tag{5.1}$$

l'homomorphisme qui associe à une isométrie sa partie de rotation ; et on notera

$$\tau\colon \operatorname{Iso}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n, \qquad \tau(L_{A,v}) = v \tag{5.2}$$

l'application qui associe à une isométrie sa partie de translation (l'image de 0). Remarquons que, différemment de l'application ρ, l'application *n'est pas* un homomorphisme ; en effet on a

$$\tau(L_{A,v}L_{B,w}) = v + Aw$$

Pour α, β éléments d'un groupe on note $[\alpha,\beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ leurs commutateurs. Puisque l'application ρ est un homomorphisme on a

$$\rho([L_{A,v}, L_{B,w}]) = [A,B] \tag{5.3}$$

et un calcul facile montre que

$$\begin{aligned} \tau([L_{A,v}, L_{B,w}]) &= -[A,B]\,w - ABA^{-1}v + Aw + v \\ &= \big(I - [A,B]\big)w - \big(I-A\big)w + A\big(I-B\big)A^{-1}v \end{aligned} \tag{5.4}$$

(La raison pour laquelle nous avons exprimé le membre à droite ci-dessus en fonction de $I-A$ et $I-B$ est que les voisinages de l'identité jouent un rôle particulier dans la suite).

Remarquons que la norme de tout $A \in \mathrm{O}(n)$ est égal à 1. Pour un élément $A \in \mathrm{O}(n)$ la norme

$$\|A - I\|$$

a une simple interprétation géométrique ; rappelons que tout $A \in \mathrm{O}(n)$, à une conjugaison près dans $\mathrm{O}(n)$ s'écrit dans la forme (4.10) ; ou encore que tout $A \in \mathrm{O}(n)$ se diagonalise sur $\mathbb{C}^n$ avec valeurs propres $e^{i\phi_j}$ avec $\phi_j \in [0,2\pi]$. Nous pouvons en conclure que $\|A - I\| = 2\max_j(1-\cos\phi_j)$. Donc le nombre $\|A-I\|$ encode le plus grand angle de rotation de la matrice A. Le voisinage de l'identité suivant

$$D_{\pi/3} = \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \|A - I\| \le 1/2\}$$

et donc formé par les matrices dont tous les angles de rotation ϕ_j sont inférieurs ou égales $\pi/3$, en valeur absolu. Ce voisinage joue un rôle particulier grâce au Lemme suivant.

Lemme 5.1.1. *Pour tout* $A, B \in \mathrm{O}(n)$

$$\|[A,B] - I\| \le 2\|A-I\|\,\|B-I\|.$$

En particulier si $A, B \in D_{\pi/3}$ *alors* $[A,B] \in D_{\pi/3}$.

Preuve. Puisque $(A-I)(B-I) = AB - A - B + I$, on obtient

$$[A,B]-I=\big(AB-BA\big)A^{-1}B^{-1}=\big((A-I)(B-I)-(B-I)(A-I)\big)A^{-1}B^{-1}.$$

On conclut en se souvenant que la norme d'opérateur est sous-multiplicative : $\|A_1A_2\|\le\|A_1\|\|A_2\|$. □

Pour toute matrice $A\in\mathrm{O}(n)$, soit ϕ le plus grand angle de rotation de la matrice A, soit V_ϕ le sous-espace propre correspondant au valeur propres $e^{\pm i\phi}$ dans $\mathbb{C}^n$ et $V_A=V_\phi\cap\mathbb{R}^n$. Par la formule (4.10), nous avons que e sous-espace V_A est stable par A et est égal à

$$V_A=\big\{v\in\mathbb{R}^n \mid \|(I-A)v\|=2(1-\cos\phi)\|v\|=\|I-A\|\,\|v\|\big\}.$$

Le sous-espace orthogonale à V_A est stable par A et nous le notons $V_A^\perp$. Pour tout $A\in\mathrm{O}(n)$ on a donc une décomposition orthogonale

$$\mathbb{R}^n=V_A\oplus V_A^\perp \tag{5.5}$$

La norme de la matrice $I-A$ restreinte au sous-espace $V_A^\perp$ est strictement inférieure à $2(1-\cos\phi)$. Nous notons $\mu(A)$ le trou spectrale entre ce deux sous-espaces. Plus précisément

Notation. Pour tout $A\in\mathrm{O}(n)$ on on pose

$$\mu(A)=\sup_{v\in V_A}\frac{\|(I-A)v\|}{\|v\|}-\sup_{v\in V_A^\perp}\frac{\|(I-A)v\|}{\|v\|}.$$

5.2 Sous-groupes d'isométries

Définition 5.2.1. Un groupe d'isométries de $\mathbb{R}^n$ est dit *uniforme* si $\mathbb{R}^n/\Gamma$ est compact.

Proposition 5.2.2. *Soit Γ un sous-groupe discret d'isométries de $\mathbb{R}^n$. Alors Γ agit proprement sur $\mathbb{R}^n$.*

Preuve. Exercice. □

Proposition 5.2.3. *Un sous-groupe discret d'isométries de $\mathbb{R}^n$ agit librement sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement s'il est il est sans torsion*[1].

Preuve. Soit $Gamma$ un sous-groupe discret d'isométries de $\mathbb{R}^n$.

Si $L\in Gamma\setminus\{L_{I,0}\}$ est un élément de torsion alors, il existe $k>1$ tel que $L^k=L_{I,0}$. Le point $x=\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k-1}L^i(0)$ est alors un point fixe de L et l'action de Γ n'est pas libre.

1. Un groupe G est sans torsion si et seulement si $g\in G$ et $g^k=E_G$ implique $g=e_G$. (Un élément d'ordre fini > 1 d'un groupe est dit un élément de torsion).

Si l'action de Γ n'est pas libre il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $L_{A,b} \in \Gamma$ tel que $L_{A,b}x_0 = x_0$, ce qui revient à dire $Ax_0 + b = x_0$. Observons que $A \neq I$ car le translations n'ont pas de points fixes. Le groupe $\Gamma' = t_{-x_0}\Gamma t_{x_0}$ est un sous-groupe discret qui n'agit pas librement sur $\mathbb{R}^n$ car il est conjugué à Γ. Ce groupe contient l'élément $t_{-x_0}L_{A,b}t_{x_0} = L_{A,0} \in \mathrm{O}(n)$. Puisque Γ' est discret $L_{A,0}$ est d'ordre fini, ce qui implique que Γ' et Γ ont de la torsion. □

Définition 5.2.4. Un groupe *cristallographique* de $\mathbb{R}^n$ est un sous-groupe discret et uniforme du groupe d'isométries de $\mathbb{R}^n$. Le quotient de $\mathbb{R}^n$ par l'action d'un groupe cristallographique est dit un *orbifold euclidien.* Un groupe cristallographique sans torsion est dit un *groupe de Bieberbach.*

Si Γ est un groupe de Bieberbach, l'application $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma$ est un revêtement (galoisien), dont Γ est le groupe d'automorphismes. Remarquons que, puisque Γ agit sur $\mathbb{R}^n$ par isométries, tout point dans l'espace quotient $\mathbb{R}^n/\Gamma$ possède un voisinage isométrique à un voisinage de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Lemme 5.2.5. *Si Γ groupe cristallographique de $\mathbb{R}^n$ il existe un nombre d tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $y \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $\Gamma.x \cap B(y,d) \neq \emptyset$.*

Preuve. Exercice. □

5.3 Réseaux de $\mathbb{R}^n$

Définition 5.3.1. Un sous-groupe Λ du groupe T des translations de $\mathbb{R}^n$ est dit un *réseau* s'il est discret et uniforme.

En d'autres termes, *un réseau est une groupe cristallographique qui consiste uniquement de translations.*

Proposition 5.3.2. *Un groupe discret d'isométries de $\mathbb{R}^n$ est un réseau de $\mathbb{R}^n$ si est seulement s'il existe une base $(b_1,\dots,b_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que*

$$\Lambda = \{t_{k_1b_1+\dots+k_nb_n} \in \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n) \mid (k_1,\dots,k_n) \in \mathbb{Z}^n\}. \tag{5.6}$$

En particulier un réseau de $\mathbb{R}^n$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^n$. Le quotient $\mathbb{R}^n/\Lambda$ est homéomorphe au tore $\mathbb{T}^n$ via l'application obtenue par passage au quotient de l'application

$$(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto (e^{2\pi i\langle b_1,x\rangle},\dots,e^{2\pi i\langle b_n,x\rangle}) \in \mathbb{T}^n.$$

Le *groupe vectoriel de* Λ, défini par

$$\Lambda' = \{b \in \mathbb{R}^n \mid t_b \in \Lambda\}.$$

est, d'habitude identifié au réseau (5.6) via l'isomorphisme $b \mapsto t_b$.

Remarquons que l'orbite de tout point $x \in \mathbb{R}^n$ est donnée par $x + \Lambda'$; en particulier Λ' coïncide avec l'orbite de l'origine sous l'action de Λ.

Définition 5.3.3. La *systole* d'un réseau Λ de $\mathbb{R}^n$ est le nombre réel

$$\inf\left\{\|b\| \mid t_b \in \Lambda, b \neq 0\right\}$$

Puisque, pour tout $t_b \in \Lambda$ on a

$$\|t_b.x - x\| = \|b\|$$

deux points d'une orbite d'un réseau sont toujours à distance plus grand ou égale à la systole du réseau.

Proposition 5.3.4. *Soit* Λ *un réseau dont la systole est minorée par* 1. *Alors la boule de rayon R centrée dans l'origine contient au plus* $(2R+1)^n$ *points de* Λ'.

Preuve. Les boules de rayon $1/2$, centrées au points du réseau appartenant à la boule de rayon R centrée dans l'origine, sont disjointes deux à deux et contenues dans la boule de rayon $R+1/2$. Leur volume est égal à $\gamma_n(1/2)^n$ et le volume de la boule de rayon est égal à $\gamma_n(R+1/2)^n$, où γ_n est le volume de la boule unité. □

Soit Λ un réseau, soient $c_1,\ldots,c_k \in \Lambda'$ et soit V l'espace vectoriel engendré par $c_1,\ldots,c_k$. La proposition suivante nous dit que si x est un point du réseau Λ' qui n'appartient pas au sous-espace V, alors x est asses éloigné de V dans le sens que la composante de x orthogonale à V est minorée par une quantité qui ne dépend que de du sous-réseau engendré par $c_1,\ldots,c_k$, de la dimension n et de la systole du réseau.

La remarque suivante sera utile dans la preuve : pour tout $v \in V$ il existe une combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs c_j, $v' = \ell_1 c_1 + \cdots + \ell_k, c_k$, telle que le vecteur $v - v'$ appartient à l'ensemble

$$V_0 = \{s_1 c_1 + \cdots + s_k c_k, \mid |s_i| \leq 1/2, \forall i = 1,\ldots,k\}.$$

Proposition 5.3.5. *Soit* Λ *un réseau dont la systole est minorée par* 1. *Soient* $c_1,\ldots,c_k$ *des point de* Λ' *et notons V l'espace vectoriel V engendré par* $c_1,\ldots,c_k$. *Alors pour tout* $x \in \Lambda' \setminus V$ *la composante* $x^{V^\perp}$ *de x orthogonale à V satisfait la minoration*

$$\|x^{V^\perp}\| \geq (3 + \|c_1\| + \ldots \|c_k\|)^{-n}.$$

Preuve. Supposons par l'absurde que $\|x^{V^\perp}\| < (\frac{1}{6}(\|c_1\| + \cdots + \|c_k\|))^{-n+1}$ et considérons les points $x_j = jx \in \Lambda \setminus V$ for $j = 1,2,\ldots,N$, avec $N = [(3(\|c_1\| + \ldots \|c_k\|))^n]$. Nous pouvons écrire $x = x^{V^\perp} + v$ avec $v \in V$ et par conséquent

$$x_j = jx^{V^\perp} + jv.$$

Par la remarque précédente on peut soustraire à chaque point x_j une combinaison linéaire à coefficients entiers des vecteurs c_j, de façon à obtenir des nouveau points x'_j du réseau Λ satisfaisant

$$x'_j = jx^{V^\perp} + v_j, \quad v_j \in V_0.$$

Ces points sont tous distincts (car leurs composantes orthogonales à V sont distinctes) et contenus dans la boule de rayon

$$R = N\|x^{V^\perp}\| + \frac{1}{2}(\|c_1\| + \ldots \|c_k\|) < \|c_1\| + \ldots \|c_k\|$$

Cela contredit le Lemme car leur nombre $N = [3(\|c_1\| + \ldots \|c_k\|)^n]$ est supérieur à $(2(\|c_1\| + \cdots + \|c_k\|) + 1)^n$. $\square$

5.4 Les théorèmes de Bieberbach

Théorème 5.4.1 (Premier Théorème de Bieberbach). *Soit* Γ *groupe cristallographique de* $\mathbb{R}^n$*. Alors* $\rho(\Gamma)$ *est un sous-groupe fini et* $\Gamma \cap T$ *est un réseau de* $\mathbb{R}^n$ *et l'unique sous-groupe abélien distingué maximal de* Γ*. (Tout sous-groupe abélien distingué de* Γ *est contenu dans* $\Gamma \cap T$*).*

Théorème 5.4.2 (Deuxième Théorème de Bieberbach). *Soient* Γ *et* Γ' *des groupes cristallographiques de* $\mathbb{R}^n$*. Si Alors* Γ *et* Γ' *sont isomorphes alors ils sont conjugués dans le groupe* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$*.*

Théorème 5.4.3 (Troisième Théorème de Bieberbach). *À une conjugaison près dans le groupe* $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$*, le nombre de groupes cristallographiques de* $\mathbb{R}^n$ *est fini.*

Dorénavant son supposera que Γ est un groupe cristallographique de $\mathbb{R}^n$.
On note $\measuredangle(u,v)$ l'angle entre deux vecteurs u et v de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 5.4.4. *Pour tout vecteur unitaire* $u \in \mathbb{R}^n$ *et pour tout* $\epsilon > 0$ *et* $\delta > 0$*, il existe* $L_{A,v} \in \Gamma$ *tel que*

$$\|A - I\| < \epsilon, \quad v \neq 0, \quad \measuredangle(u,v) < \delta.$$

Preuve. Il existe $D > 0$ tel que l'orbite de 0 rencontre toute boule de rayon D. En particulier il existe une suite

$$L_j = L_{A_j,v_j} \in \Gamma \quad \text{telle que} \quad \|v_j - 2^{2^j} D\, u\| < D.$$

Puisque $\mathrm{O}(n)$, on pourra extraire une sous-suite $L_{\phi(j)}$ telle que $\{A_{\phi(j)}\}$ converge. Pour $k > j$ suffisamment grands $L = L_{\phi(k)} L_{\phi(j)}^{-1}$ satisfait les conditions requises car

$$\rho(L_{\phi(k)} L_{\phi(j)}^{-1}) = A_{\phi(k)} A_{\phi(j)}^{-1}, \quad \tau(L_{\phi(k)} L_{\phi(j)}^{-1}) = v_{\phi(k)} - A_{\phi(j)}^{-1} v_{\phi(j)}$$

avec $\lim_{j,k-j\to\infty} \|A_{\phi(k)} A_{\phi(j)}^{-1} - I\| = 0$ et

$$\|\tau(L_{\phi(k)} L_{\phi(j)}^{-1}) - 2^{2^k} D\, u\| \leq (2 + 2^{2^j}) D = o(\|2^{2^k} D\, u\|). \qquad \square$$

Proposition 5.4.5. *Tout élément $L = L_{A,v} \in \Gamma$ satisfaisant $\|A - I\| \le 1/2$ est une translation (c'est à dire $v = 0$ et $L \in T$).*

Preuve. Si la proposition est fausse alors il existe $L_{A,v} \in \Gamma$ satisfaisant

$$\|A - I\| \le 1/2, \qquad v \ne 0. \tag{5.7}$$

Dans ce cas, comme Γ est discret et agit proprement sur $\mathbb{R}^n$, il existe $L_{A,v} \in \Gamma$ tel que $\|A - I\| \le 1/2$, $v \ne 0$ et v est de norme minimale :

$$\|v\| = \delta = \min\left\{\|w\| \mid L_{B,w} \in \Gamma, \|B - I\| \le 1/2, w \ne 0\right\}.$$

Soit $\mathbb{R}^n = V_A \oplus V_A^{\perp}$ la décomposition orthogonale de $\mathbb{R}^n$ définie en (**??**) et, pour $w \in \mathbb{R}^n$ soit $w = w_A + w_A^{\perp}$ la décomposition orthogonale de w correspondante.

Si $u \in V_A$, par la Proposition 5.4.4, il existe $L_{B,w} \in \Gamma$ tel que $\|\tilde{B} - I\| \le 1/2$, $w \ne 0$ et $\measuredangle(u, w) \le \pi/4$. En particulier, pour tout

$$\epsilon < \mu(A)/8$$

l'ensemble $U_{A,\epsilon}$ des $L_{B,w} \in \Gamma$ tels que

$$w \ne 0, \quad \|w_A^{\perp}\| \le \|w_A\|, \quad \text{et} \quad \|B - I\| \le \epsilon \tag{5.8}$$

est non vide.

On peut alors choisir $L_{B,w} \in U_{A,\epsilon}$, tel que la norme $\|w\|$ soit minimale. En particulier on a $\|w\| > \|v\|$ par le choix de $L_{A,v}$.

Soit $L_{\tilde{B},\tilde{w}} = [L_{A,v}, L_{B,w}]$, pour $L_{B,v} \in U_{A,\epsilon}$. Alors

$$\|\tilde{B} - I\| < 2\epsilon\|A - I\| \le \epsilon \tag{5.9}$$

et

$$\tilde{w} = \left(A - I\right)w + \left(I - \tilde{B}\right)w + A\left(I - B\right)A^{-1}v \tag{5.10}$$

Comme $(A - I)$ préserve la décomposition orthogonale $\mathbb{R}^n = V_A \oplus V_A^{\perp}$, par les inégalités (5.8) et (5.9), comme $\|w\| > \|v\|$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\|\tilde{w}_A\| &\ge \|\left(I - A\right)w_A\| - \epsilon\|w\| - \epsilon\|v\| \\ &\ge \|\left(I - A\right)w_A\| - 2\epsilon\|w\|\end{aligned}$$

et encore

$$\|\tilde{w}_A^{\perp}\| \le \|\left(I - A\right)w_A^{\perp}\| + 2\epsilon\|w\|.$$

d'où

$$\begin{aligned}\|\tilde{w}_A\| - \|\tilde{w}_A^{\perp}\| &\ge \|\left(I - A\right)w_A\| - \|\left(I - A\right)w_A^{\perp}\| - 4\epsilon\|w\| \\ &\ge \left(\frac{1}{2}\mu(A) - 4\epsilon\right)\|w\| > 0.\end{aligned} \tag{5.11}$$

Les inégalités (5.8) et (5.9), on a $L_{\tilde{B},\tilde{w}} \in U_{A,\epsilon}$. Par les inégalités (5.7), (5.8) et (5.9), comme $\|w\| > \|v\|$, nous obtenons

$$\|\tilde{w}\| \leq (\frac{1}{2} + 2\epsilon)\|w\| < \|w\|.$$

Cela nous amène à une contradiction car $L_{B,w}$ a été choisi comme un élément de $U_{A,\epsilon}$ pour lequel la norme $\|w\|$ est minimale. □

Corollaire 5.4.6. *Tout groupe cristallographique de $\mathbb{R}^n$ contient contient un sous-groupe engendré par n translations linéairement indépendantes.*

Preuve. Soit Γ un groupe cristallographique de $\mathbb{R}^n$. Par la proposition 5.4.4, pour toute base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ et tout $\delta > 0$, il existe n éléments $L_{A_j,v_j} \in \Gamma$ tels que $\|A_j - I\| < 1/2$, $v_j \neq 0$, et $\measuredangle(e_j, v_j) < \delta$. Par la proposition 5.4.5, les éléments L_{A_j,v_j} sont des translations t_{v_j}. Si δ est suffisamment petit, les vecteurs v_j sont linéairement indépendants. □

Corollaire 5.4.7. *Tout groupe cristallographique de $\mathbb{R}^n$ contient contient un sous-groupe engendré par n translations linéairement indépendantes.*

Preuve. Soit Γ un groupe cristallographique de $\mathbb{R}^n$. Par la proposition 5.4.4, pour toute base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{R}^n$ et tout $\delta > 0$, il existe n éléments $L_{A_j,v_j} \in \Gamma$ tels que $\|A_j - I\| < 1/2$, $v_j \neq 0$, et $\measuredangle(e_j, v_j) < \delta$. Par la proposition 5.4.5, les éléments L_{A_j,v_j} sont des translations t_{v_j}. Si δ est suffisamment petit, les vecteurs v_j sont linéairement indépendants. □

Proposition 5.4.8. *Soit Γ un groupe cristallographique de $\mathbb{R}^n$. Il existe un conjugué $\tilde{\Gamma}$ de Γ dans le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ tel que*
- *La systole du réseau $\tilde{\Gamma} \cap T$ est égal à 1.*
- *Il existe une base de vecteurs normés dans $(\tilde{\Gamma} \cap T)'$.*

Lemme 5.4.9. *Si $L = L_{A,v} \in \Gamma$ et $t_w \in \Gamma$, alors $t_{Aw} \in \Gamma$. Autrement dits, l'ensemble des vecteurs de translations de Γ est stable par les automorphismes dans $\rho(\Gamma)$.*

Preuve. $L_{A,v} t_w L_{A,v}^{-1} = t_{Aw}$. □

Lemme 5.4.10. *Si $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ est une décomposition de $\mathbb{R}^n$ en somme de deux espaces orthogonaux préservés par le groupe cristallographique Γ, alors pour tout isomorphisme $J = J_{\lambda_1,\lambda_2}$ de $\mathbb{R}^n$ qui restreint à V_i est une homothétie de rapport λ_i, le groupe défini par $\Gamma_{\lambda_1,\lambda_2} = J\Gamma J^{-1}$ est un groupe d'isométries de $\mathbb{R}^n$, et donc un groupe cristallographique. Si $b_i \in V_i$ et $t_{b_1+b_2} \in \Gamma$ alors $J t_{b_1+b_2} J^{-1} = t_{\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2}$.*

Preuve. En décomposant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ suivant la décomposition orthogonale $V_1 \oplus V_2$, on montre que e tout élément de $\Gamma_{\lambda_1,\lambda_2}$ est une isométrie. Comme le groupe $\Gamma_{\lambda_1,\lambda_2}$ est conjugué à Γ, il est discret et uniforme. □

Preuve (Preuve de la proposition). Soit $M \geq 0$ le plus grand entier tel qu'il existe un conjugué $\tilde{\Gamma}$ de Γ dans le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ et un sous-espace vectoriel V de dimension M tel que

1. V est $\tilde{\Gamma}$ invariant.
2. La systole du réseau $\tilde{\Gamma} \cap T$ est égal à 1.
3. Il existe une base de vecteurs normés dans $(\tilde{\Gamma} \cap T)' \cap V$.

Montrons que $M > 1$. Par une changement d'échelle, (autrement dit en conjuguant Γ par une homothétie), nous pouvons supposer que pour toute translation $t_v \in \Gamma \cap T$, on a $\|v\| \geq 1$ et qu'il existe $e_1 \in (\Gamma \cap T)'$ normé. Soit V_1 l'espace vectoriel engendré par $\rho(\Gamma)e_1$. Cet espace est Γ-invariante et engendré par une famille finie de vecteurs normés Ae_1 avec $L_{A,v} \in \Gamma$. Donc V_1 satisfait les propriétés 1-3. ci-dessus et $M > 1$.

Supposons par l'absurde que $M < n$. Soit V_1 un sous-espace vectoriel V de dimension M tel que les propriétés 1-3. ci-dessus soient satisfaites pour un conjugué $\tilde{\Gamma}$ de Γ dans le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$.

Puisque $V_1 \neq \mathbb{R}^n$ et $(\tilde{\Gamma} \cap T)'$ engendre $\mathbb{R}^n$, il existe une translation $t_v \in \tilde{\Gamma} \cap T$ dont la composante suivant l'espace $V_1^\perp$ orthogonale à V_1 est non nulle.

En conjuguant $\tilde{\Gamma}$ par un isomorphisme J_λ de $\mathbb{R}^n$ qui est l'identité sur V_1 et un homothétie de rapport $\lambda \searrow 0$ sur $V_1^\perp$ on obtient un sous-groupe Γ_λ isomorphe à $\tilde{\Gamma}$ qui contient une translation dont la composante suivant l'espace $V_1^\perp$ est non nulle et aussi petite qu'on veut. Par la Proposition 5.3.5 la systole du réseau $\Gamma_\lambda \cap T$ est inférieur à 1 pour λ assez petit. Puisque pour tout $e \in (\Gamma_\lambda \cap T)' \cap V_1 = (\tilde{\Gamma} \cap T)' \cap V_1$ on a $\|e\| \geq 1$, il existe, pour tout λ assez petit, un nombre fini d'éléments $t_v \in \Gamma_\lambda \cap T$ dont la composante suivant l'espace $V_1^\perp$ orthogonale à V_1 est non nulle et dont le vecteur de translation $v \in \mathbb{R}^n$ est de norme inférieur à 1.

Il s'ensuit qu'il existe un plus petit $\lambda > 0$ tel que $\Gamma_\lambda \cap T$ satisfait les conditions suivantes :

— il existe $t_{e_2} \in \Gamma_\lambda \cap T$ dont la composante suivant l'espace $V_1^\perp$ est non nulle et $\|e_2\| = 1$.

— pour tout $t_v \in \Gamma_\lambda \cap T$ on a $\|v\| \geq 1$.

On pose alors V_2 le sous-espace engendré par la famille de vecteurs *normés* $\rho(\Gamma_\lambda)e_2$. Le sous-espace vectoriel $V_1 + V_2$ a dimension $> M$ et satisfait les propriétés 1-3. ci-dessus pour Γ_λ qui est un conjugué de Γ dans le groupe affine $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$. Cela contredit la maximalité de M. Donc $M = n$. $\square$

Index