Les IIème théorème de Bieberbach

Théorème A (Les IIème théorème de Bieberbach)**.** *Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes cristallographiques de $\mathbb{R}^n$. Les groupes Γ_1 et Γ_2 sont isomorphes si et seulement s'il sont conjugués par une application affine de $\mathbb{R}^n$.*

Exercice 1.1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{O}(n)$ et soit $f\colon G \to \mathbb{R}^n$ une application telle que

$$f(A_1A_2) = f(A_1) + A_1 f(A_2), \quad \forall (A_1, A_2) \in G^2. \tag{1.1}$$

Montrer qu'il existe un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(A) = Ax - x$.

Solution. On remarque que si un tel x existe on a

$$\frac{1}{|G|}\sum_{A\in G} f(A) = \frac{1}{|G|}\sum_{A\in G} Ax - x,$$

et que $\frac{1}{|G|}\sum_{A\in G} Ax$ est un vecteur invariante sous l'action de G. Or, l'équation (1.1), nous dit que la composante de f sur l'espace des vecteurs invariante sous l'action de G est nulle.

Cet observation nous amène à définir

$$x := -\frac{1}{|G|}\sum_{A\in G} f(A).$$

Vérifions que x satisfait la propriété demandée. Pour tout $A_1 \in G$, on obtient

$$\begin{aligned} A_1 x &= -\frac{1}{|G|}\sum_{A_2\in G} A_1 f(A_2) = -\frac{1}{|G|}\sum_{A_2\in G} A_1 f(A_2) \\ &= -\frac{1}{|G|}\sum_{A_2\in G}\big(f(A_1A_2) - f(A_1)\big) = x + f(A_1), \end{aligned}$$

la dernière égalité résultant de l'observation suivante : ... □

Notation . Pour $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$ on note $L_{A,v}$ l'application affine $L_{A,v}x = Ax + v$ et t_v la translation $t_v(x) = x + v$ (où $x \in \mathbb{R}^n$). On confondra l'application A et $L_{A,0}$.

Exercice 1.2. Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes cristallographiques de $\mathbb{R}^n$ isomorphes par un isomorphisme $\Phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. Notons T le sous-groupe de $\mathrm{Iso}(\mathbb{R}^n)$ formé par le translations. Quitte à conjuguer Γ_2 par une application affine on peut supposer que $\Gamma_1 \cap T = \Gamma_2 \cap T$ et que Φ est un isomorphisme satisfaisant $\Phi(t_b) = t_b$ pour tout $t_b \in \Gamma_1 \cap T$.

Solution. Par le Ier théorème de Bieberbach (citation), on sait que $\Gamma_1 \cap T$ et $\Gamma_2 \cap T$ sont deux réseaux de $\mathbb{R}^n$ engendrés par deux bases de $\mathbb{R}^n$, disons les $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e'_1, \dots, e'_n)$. Cela signifie que $\Gamma_1 \cap T$ consiste des toutes et seules les translations t_b de vecteur $b = k_1e_1 + \cdots + k_ne_n$, avec $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Une affirmation analogue s'applique à $\Gamma_2 \cap T$.

Pour toute application $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ et toute translation $t_v \in T$ on a

$$L_{A,0} \circ t_v \circ L_{A,0}^{-1} = t_{Av}$$

Soit $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^n$ telle que $Ae'_i = e_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$. On pose $\Gamma'_2 = L_{A,0} \circ \Gamma_2 \circ L_{A,0}^{-1}$. Le groupe Γ'_2 est alors une groupe cristallographique conjugué à Γ_2 et tel que $\Gamma_1 \cap T = \Gamma'_2 \cap T$ car ...

L'application $\Phi'\colon \gamma \mapsto L_{A,0} \circ \Phi(\gamma) \circ L_{A,0}^{-1}$ est un isomorphisme de Γ_1 sur Γ'_2 tel que pour tout $t_b \in \Gamma_1 \cap T$ on a $\Phi'(t_b) = t_{b'} \in \Gamma_1 \cap T$.

Il existe alors (pourquoi ?) une application linéaire $B \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ telle que le groupe cristallographique $\Gamma''_2 = L_{B,0} \circ \Gamma'_2 \circ L_{B,0}^{-1}$, conjugué de Γ_2, et l'isomorphisme $\Phi''\colon \Gamma_1 \to \Gamma''_2$ défini par $\Phi''(\gamma) = L_{B,0} \circ \Phi(\gamma) \circ L_{B,0}^{-1}$ satisfont les propriétés suivantes $\Gamma_1 \cap T = \Gamma''_2 \cap T$ et $\Phi''(t_b) = t_b$ pour tout $t_b \in \Gamma_1 \cap T$. □

Rappelons que si Γ est un groupe cristallographique l'application

$$\rho\colon L_{A,v} \in \Gamma \mapsto A \in \mathrm{O}(n)$$

est un homomorphisme.

Exercice 1.3. Soient Γ_1 et Γ_2 deux groupes cristallographiques de $\mathbb{R}^n$ tels que $\Gamma_1 \cap T = \Gamma_2 \cap T$ et soit $\Phi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ un isomorphisme satisfaisant $\Phi(t_b) = t_b$ pour tout $t_b \in \Gamma_1 \cap T$.

a) En considérant l'effet des conjugaisons sur des éléments de $\Gamma_1 \cap T$, montrer que

$$\rho(\Phi(L_{A,v})) = \rho(L_{A,v}) = A.$$

Cette identité nous permet de définir une fonction $g\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^n$ telle que

$$\Phi(L_{A,v}) = L_{A,g(L_{A,v})}.$$

En calculant $\Phi(L_{A_1,v_1} \circ L_{A_2,v_2})$ de deux façons différentes montrer que

$$g(L_{A_1A_2,s_1+A_1s_2}) = g(L_{A_1,s_1}) + A_1 g(L_{A_2,s_2}) \tag{1.2}$$

En déduire que pour tout $t_b \in \Gamma_1 \cap T$ on a

$$g(L_{A,v+b}) = g(L_{A,v}) + b \tag{1.3}$$

b) Montrer que la fonction $f\colon A \in \rho(\Gamma_1) \to g(L_{A,v}) - v \in \mathbb{R}^n$ est bien définie et satisfait

$$f(A_1A_2) = f(A_1) + A_1 f(A_2), \quad \forall (A_1, A_2) \in \rho(\Gamma_1) \times \rho(\Gamma_1). \tag{1.4}$$

En déduire qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(A) = Ax - x$ pour tout $A \in \rho(\Gamma_1)$.

c) Montrer que le conjugué de Γ_2 défini par $\Gamma_2' = t_x \circ \Gamma_2 \circ t_x^{-1}$ coïncide avec Γ_1.

Solution. (1) Soit $\Phi(L_{A,v}) = L_{A',v'}$. Pour tout $t_b \in \Gamma_1 \cap T$ on a

$$\Phi(L_{A,v} \circ t_b \circ L_{A,v}^{-1}) = L_{A',v'} \circ t_b \circ L_{A',v'}^{-1}$$

et donc

$$t_{Ab} = \Phi(t_{Ab}) = t_{A'b}$$

Puisque cette identité est valable pour tous les éléments b d'un réseau de $\mathbb{R}^n$ on conclut que $A = A'$.

Comme Φ est un isomorphisme l'on a $\Phi(L_{A_1,v_1} \circ L_{A_2,v_2}) = \Phi(L_{A_1,v_1}) \circ \Phi(L_{A_2,v_2})$. En développant le membre à gauche on obtient

$$\Phi(L_{A_1,v_1} \circ L_{A_2,v_2}) = \Phi(L_{A_1A_2,s_1+A_1s_2}) = L_{A_1A_2,g(A_1A_2,s_1+A_1s_2)}$$

et en développent l'autre membre

$$\Phi(L_{A_1,v_1}) \circ \Phi(L_{A_2,v_2}) = L_{A_1,g(A_1,v_1)} \circ L_{A_2,g(A_2,v_2)} = L_{A_1A_2,g(A_1,v_1)+A_1g(A_2,v_2)},$$

d'où l'identité souhaitée. Lorsque $L_{A_1,v_1} = t_b$ on obtient l'identité (1.3), car ...

(2) Le groupe $\rho(\Gamma_1)$ isomorphe à $\Gamma_1/\Gamma_1 \cap T$ car ... . Pour montrer que la fonction $f\colon \Gamma_1/\Gamma_1 \cap T \to \mathbb{R}^n$ est bien définie il suffit vérifier que si $f(L_{A,v} \circ t_b) = f(L_{A,v})$ pour tout $L_{A,v} \in \Gamma_1$ et tout $t_b \in \Gamma_1 \cap T$. Ceci découle de l'identité (1.3), car ... .

En soustrayant la quantité ... de l'identité (1.2) on obtient ... ; l'identité (1.4) s'obtient alors par passage au quotient. Par l'exercice 1.1 on sait que l'identité (1.4) implique qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(A) = Ax - x$ pour tout $A \in \rho(\Gamma_1)$.

(3) Pour tout $L_{A,v} \in \Gamma_1$ on a

$$t_x \Phi(L_{A,v}) t_x^{-1} = t_x L_{A,g(L_{A,v})} t_x^{-1} = L_{A,g(L_{A,v})-v+x-Ax+v} = L_{A,v}$$

□

Le deuxième théorème de Bieberbach suit de les résultats combinés des exercices 1.2 *et* 1.3