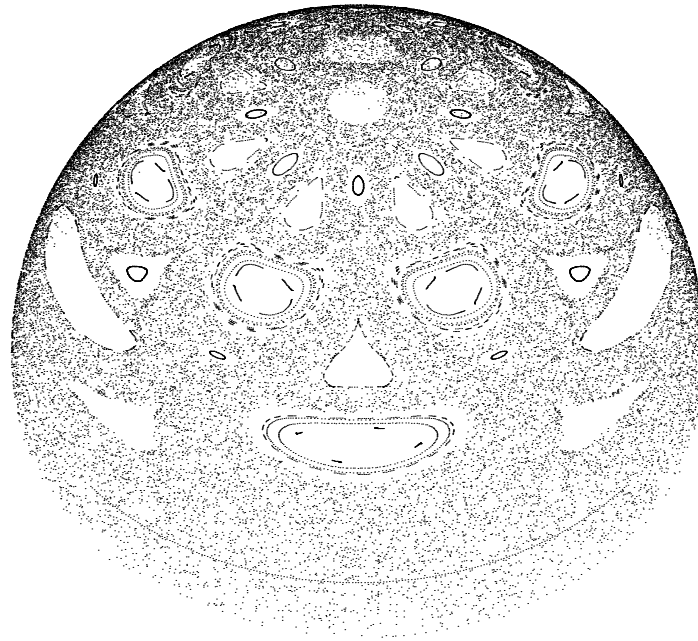


Le chaos en physique et en mathématiques

S. De Bièvre (Université de Lille)

March 28 2006



INTRODUCTION

CHAOS+PHYSIQUE+MATHEMATIQUES= 2.500.000 sites web :

- revues spécialisées :“Chaos,” “Chaos, solitons and fractals,” “International Journal of Bifurcation and Chaos,” “Nonlinearity,” ...
- Monographies pour spécialistes
- Conférences internationales
- Animations en ligne et livres de vulgarisation

MOTS CLEFS= systèmes dynamiques, dépendance sensible aux conditions initiales, exposant de Lyapounov, orbites périodiques instables, bifurcations, théorie ergodique, attracteur étrange, attracteur de Lorenz, effet papillon, chaos déterministe, cascade harmonique, chaos Hamiltonien, ensemble de Julia, fractals, entropie, complexité, codage, propriétés émergentes, chaos spatio-temporel, réseau d'applications couplés, turbulence, contrôle du chaos, chaos quantique, matrices aléatoires ...

DEUX QUESTIONS, COMBIEN DE RÉPONSES?

LES QUESTIONS Le présent détermine-t-il le futur? Peut-on connaître l'avenir?

DEUX QUESTIONS, COMBIEN DE RÉPONSES?

LES QUESTIONS Le présent détermine-t-il le futur? Peut-on connaître l'avenir?

LES RÉPONSES

- NON : Madame Soleil. Météo France. La Bourse.

DEUX QUESTIONS, COMBIEN DE RÉPONSES?

LES QUESTIONS Le présent détermine-t-il le futur? Peut-on connaître l'avenir?

LES RÉPONSES

- NON : Madame Soleil. Météo France. La Bourse.
- OUI : “Mêmes causes, mêmes effets.”
 - Zizou et le coup franc.



DEUX QUESTIONS, COMBIEN DE RÉPONSES?

LES QUESTIONS Le présent détermine-t-il le futur? Peut-on connaître l'avenir?

LES RÉPONSES

- NON : Madame Soleil. Météo France. La Bourse.
- OUI : “Mêmes causes, mêmes effets.”
 - Zizou et le coup franc.
 - Les recettes de cuisine.
 - Le réveil, la machine à café et le TGV.

DEUX QUESTIONS, COMBIEN DE RÉPONSES?

LES QUESTIONS Le présent détermine-t-il le futur? Peut-on connaître l'avenir?

LES RÉPONSES

- NON : Madame Soleil. Météo France. La Bourse.
- OUI : “Mêmes causes, mêmes effets.”
 - Zizou et le coup franc.
 - Les recettes de cuisine.
 - Le réveil, la machine à café et le TGV.
- LE COMPROMIS : Dans certaines circonstances bien contrôlées, le présent détermine le futur ; on peut alors à la fois **prédire et contrôler** l'avenir en fonction du présent ⇒ les sciences.

UNE PETITE REMARQUE : Les sciences sont considérées comme importantes dans nos sociétés modernes parce que les retombées des sciences et des technologies sont perçues comme constituant des ingrédients essentiels de notre confort, de notre sécurité et de notre bien-être. C'est pour cette raison que les états industrialisés sont prêts à consacrer une partie du budget public aux sciences, et qu'ils souhaitent aujourd'hui favoriser la recherche sur projet, de préférence appliquée. Cela agace les scientifiques parce que ce n'est pas la raison pour laquelle la plupart d'entre eux aiment les sciences :

“Je ne dis pas : la Science est utile parce qu'elle nous permet à construire des machines; je dis : les machines sont utiles, parce qu'en travaillant pour nous, elles nous laisseront un jour plus de temps pour faire de la science.” (H. Poincaré, La valeur de la Science)

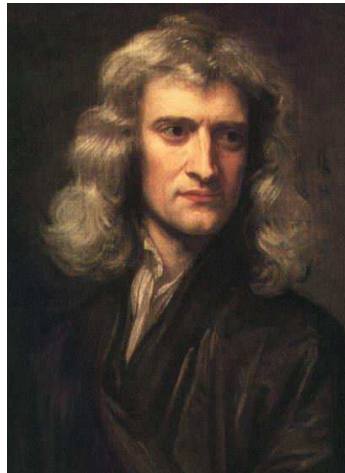
DÉTERMINISTE, PAS DÉTERMINISTE?

UNE DÉFINITION : Un système est déterministe si son état présent détermine son état futur.

Pour eux, la réponse à la première question est donc OUI!

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES :

- Le ballon de Zidane, le système planétaire : Newton meets Zidane ...



DÉTERMINISTE, PAS DÉTERMINISTE?

UNE DÉFINITION : Un système est déterministe si son état présent détermine son état futur.

Pour eux, la réponse à la première question est donc OUI!

EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES :

- Le ballon de Zidane, le système planétaire, ...
- La Bourse de Paris : les valeurs de demain ne dépendent pas que des valeurs d'aujourd'hui :

“Les performances passées ne présument en rien des performances futures”

- Le billard et le mouvement Brownien

UNE HYPOTHÈSE DE TRAVAIL : Lorsque l'évolution du système dépend de paramètres extérieurs au système, il n'est pas déterministe, sinon il l'est. Les systèmes isolés de leur environnement sont déterministes, les autres ne le sont pas.

SYSTÈME DYNAMIQUE

DÉFINITION : Un système dynamique est un modèle mathématique pour un système déterministe. Il comprend :

- Un **espace des phases** = l'ensemble des états possibles du système. La dimension de l'espace des phases = nombre de paramètres nécessaires pour spécifier un état du système. Pour le ballon, c'est 6 ou 10. Pour une boule de billard, 4.
- La **dynamique** elle-même = une équation qui décrit l'évolution du système.

RÈGLE GÉNÉRALE : Afin de simplifier au maximum les choses, on élimine les variables de l'environnement, et on réduit autant que possible la dimension de l'espace des phases.

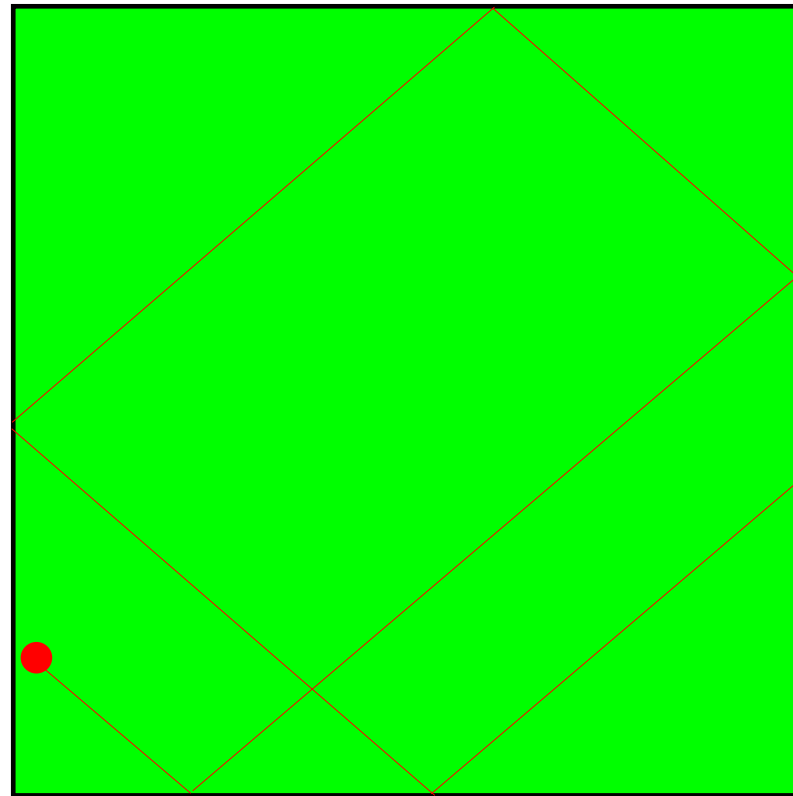
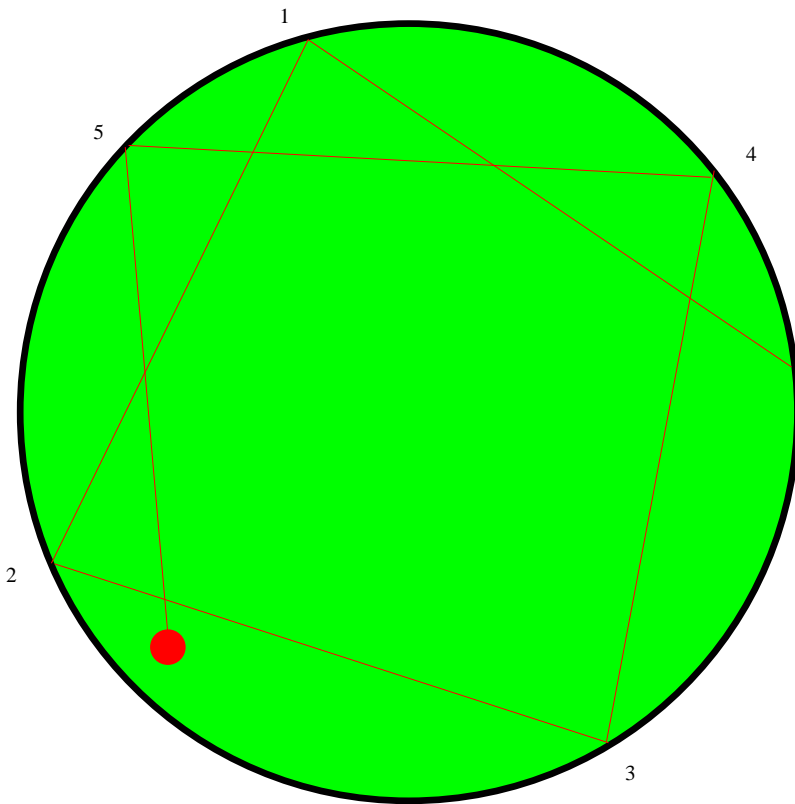
“Tout devrait être rendu aussi simple que possible, mais pas plus.”

(A.Einstein)

LE BUT : Prédire l'avenir = calculer l'évolution future du système.

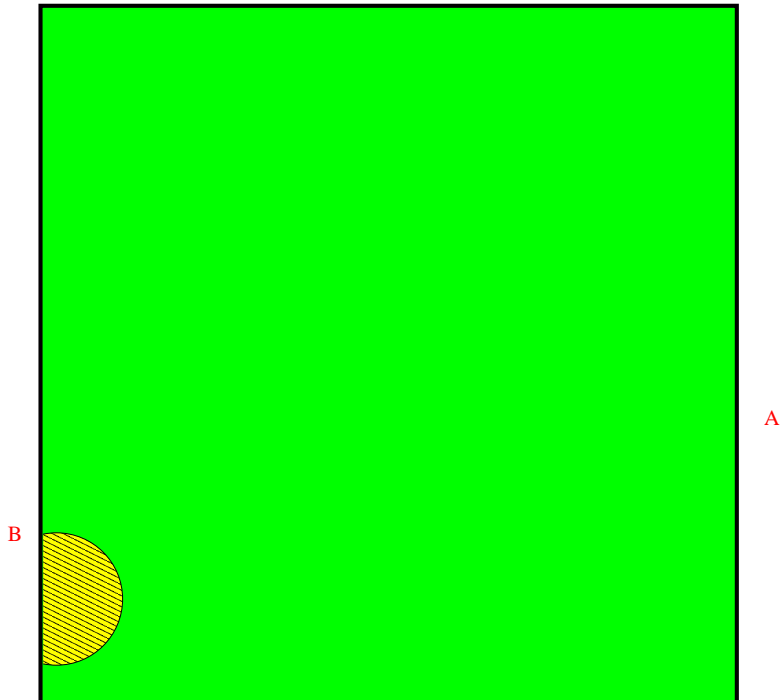
Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

SIMPLE Le problème de Kepler, le billard circulaire ou rectangulaire : le mouvement est régulier et stable.



Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

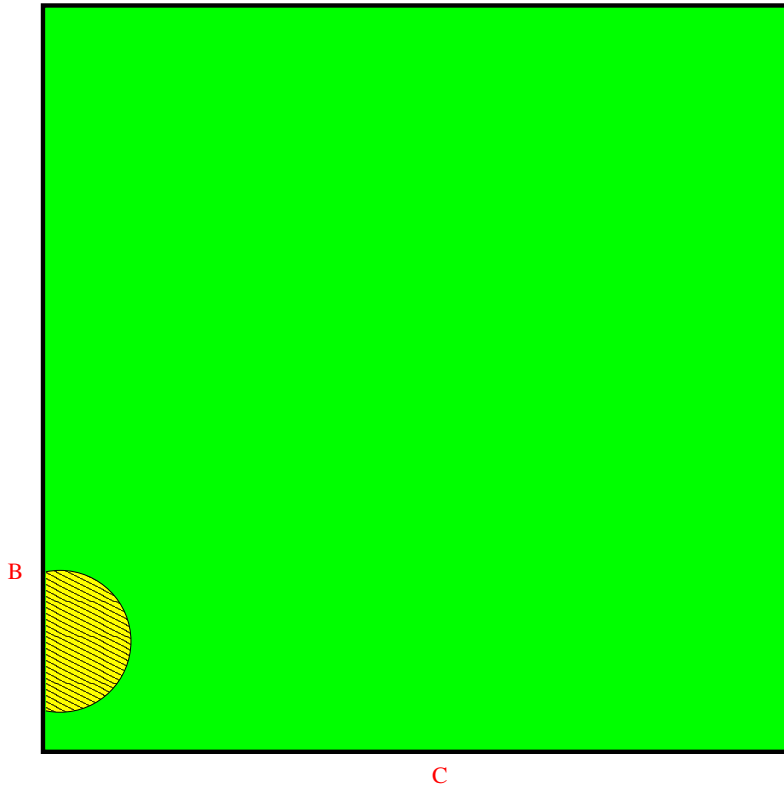
SIMPLE Le problème de Kepler, le billard circulaire ou rectangulaire.



Peut-on tirer une boule qui va de A à B, après cinq rebonds sur les bords du billard?

Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

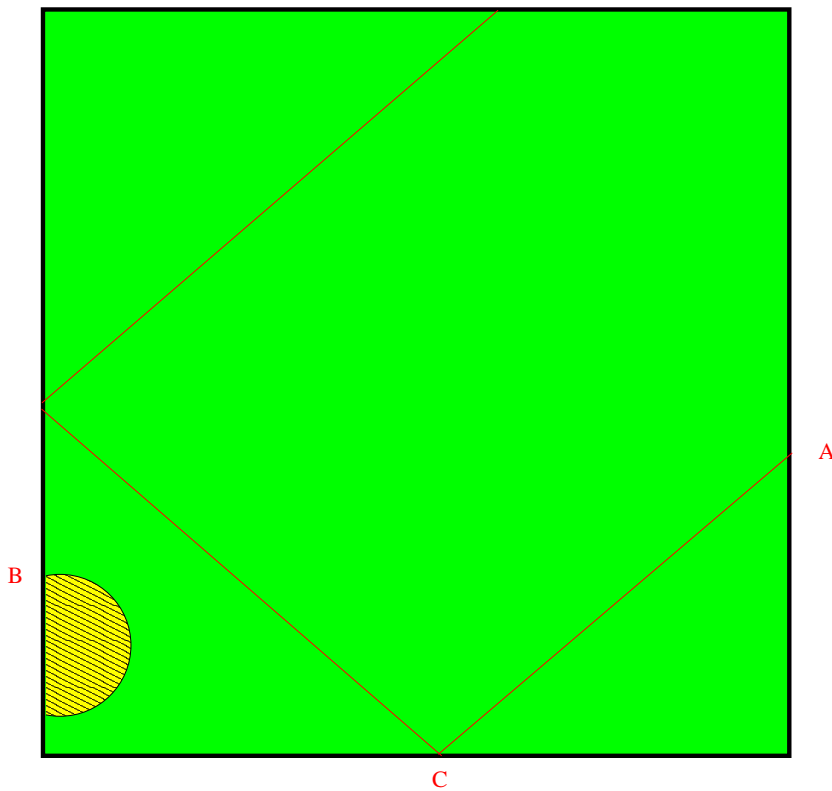
SIMPLE Le problème de Kepler, le billard rectangulaire ou circulaire.



Un conseil : visez C!

Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

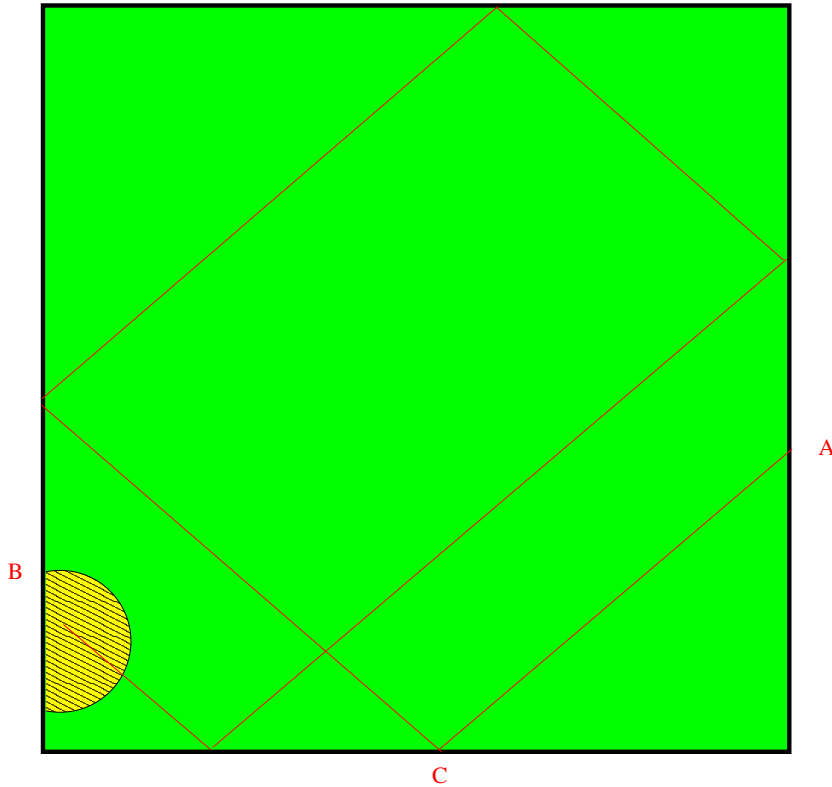
SIMPLE Le problème de Kepler, le billard rectangulaire ou circulaire.



T'es sûr que ça marche?

Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

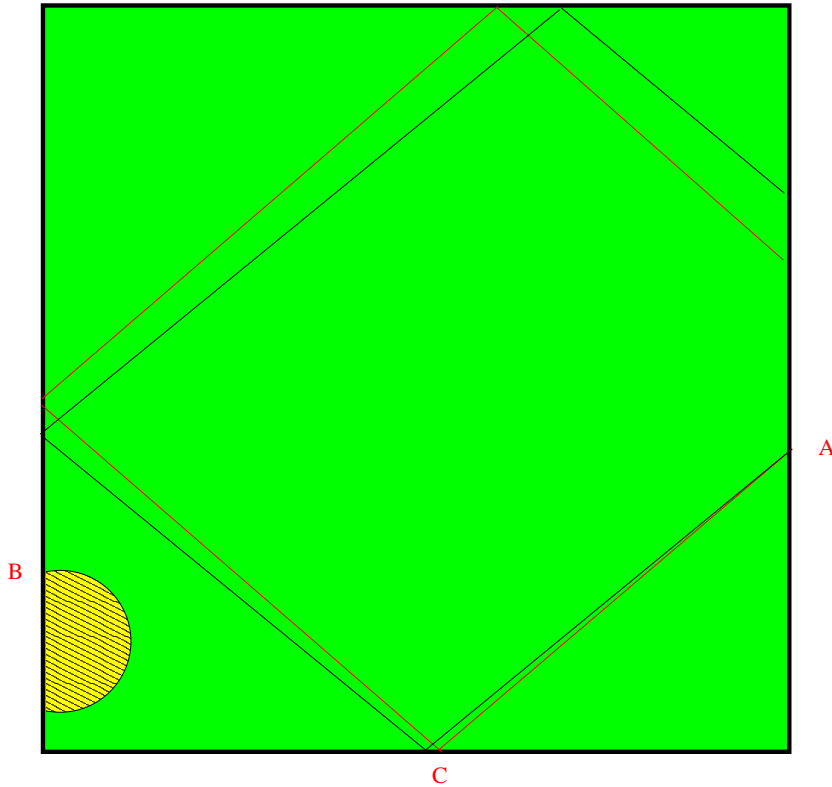
SIMPLE Le problème de Kepler, le billard rectangulaire ou circulaire.



Yes!

Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

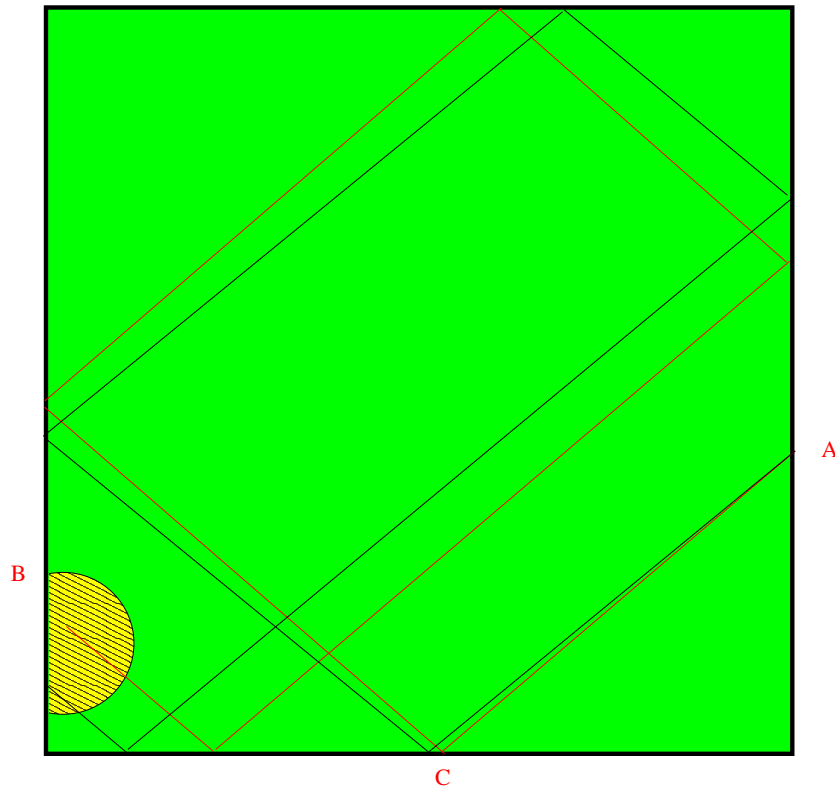
SIMPLE Le problème de Kepler, le billard rectangulaire ou circulaire.



Et si je rate un peu mon coup?

Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

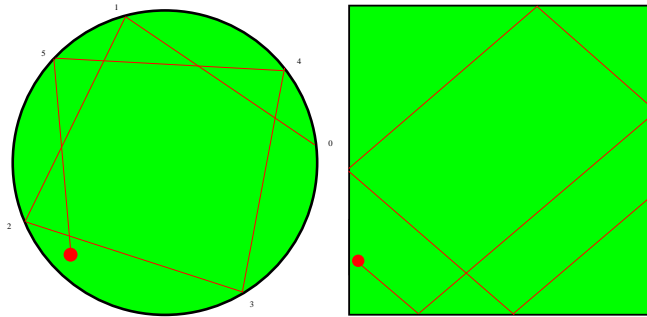
SIMPLE Le problème de Kepler, le billard rectangulaire ou circulaire.



T'inquiète, ça march encore! Le mouvement est **stable**. L'écart entre les trajectoires n'augmente que lentement : il est proportionnel au temps écoulé.

Du simple via le moins simple au compliqué : le chaos

SIMPLE Le problème de Kepler, le billard rectangulaire ou circulaire.



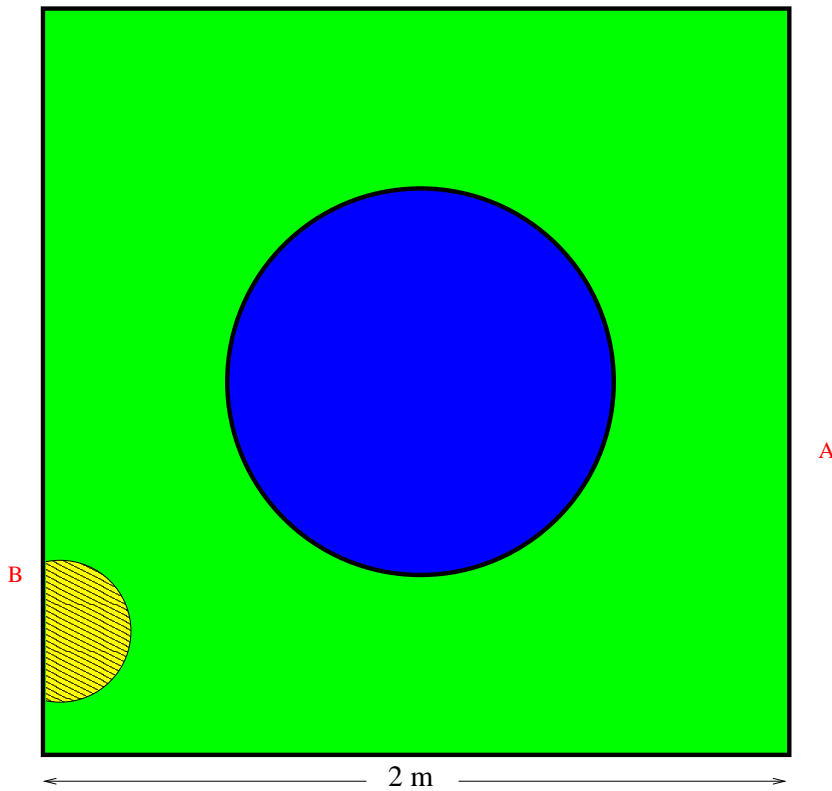
MOINS SIMPLE Il fait comment Zidane? Le système planétaire : où est Neptune?

COMPLIQUÉ Même si on a réduit autant que possible la dimension de l'espace des phases et simplifié au maximum la dynamique, de façon à ce que le système dynamique ait une apparence extraordinairement simple, la description ses trajectoires peut s'avérer très difficile tout de même. C'est ce qui arrive dans les systèmes dits **chaotiques**.

“Tout devrait être rendu aussi simple que possible, mais pas plus.”

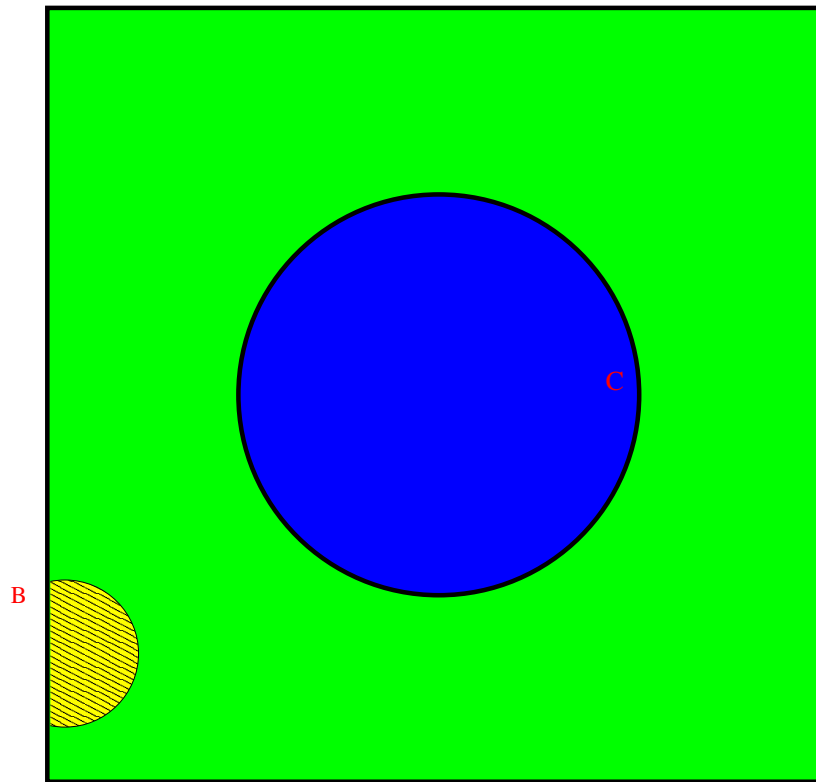
(A.Einstein)

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI



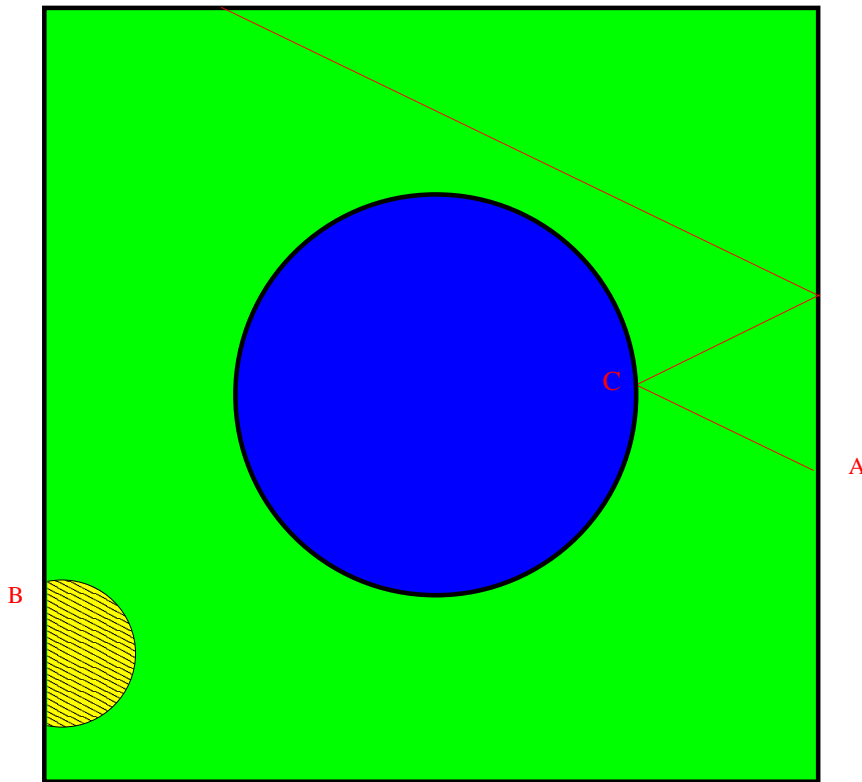
Peut-on tirer une boule de A à B, qui rebondit quatre fois sur le bord extérieur du billard?

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI



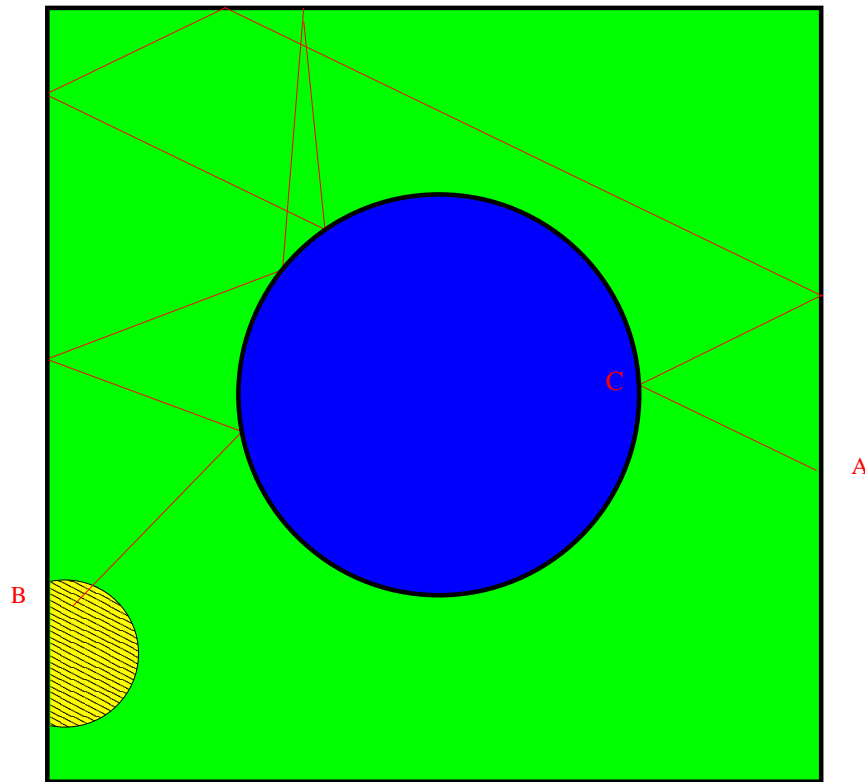
Un conseil : visez C.

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI



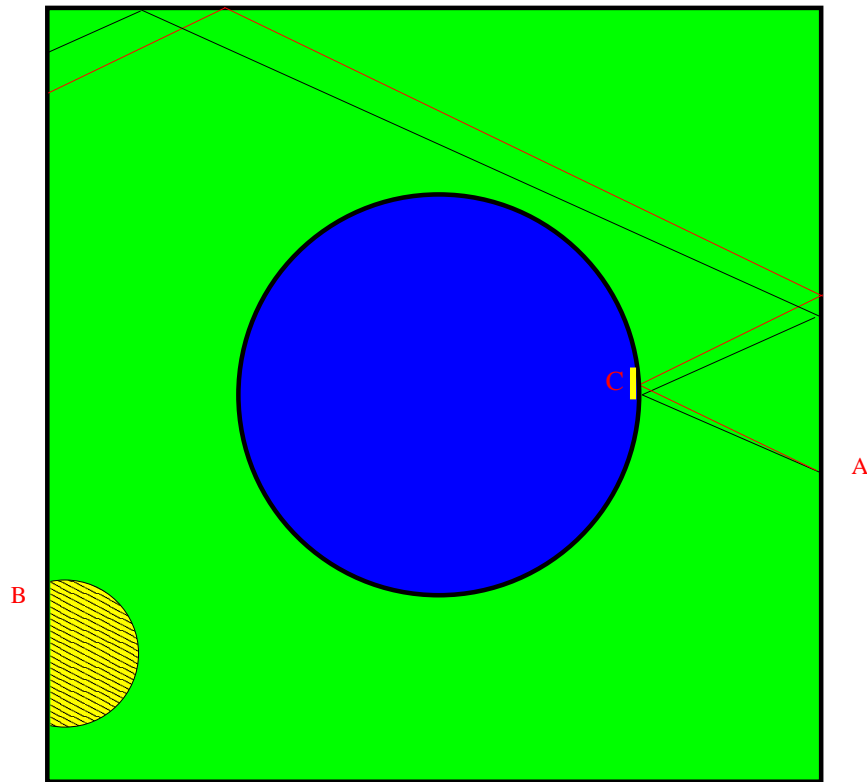
Trois secondes plus tard : “T’es sûr que ça marche?”

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI



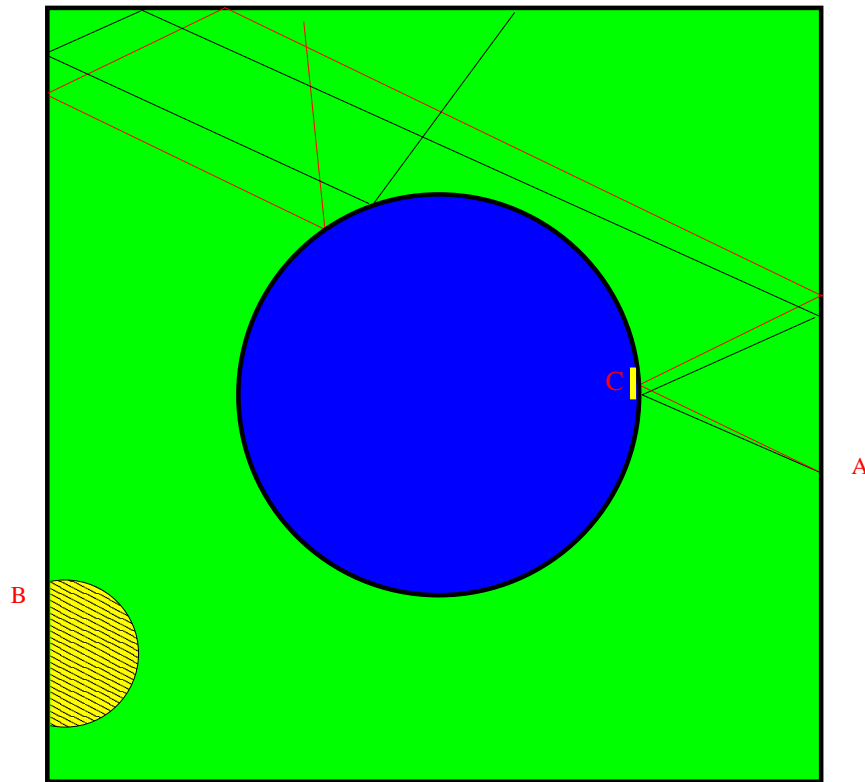
Six secondes plus tard : "Yes!!"

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI



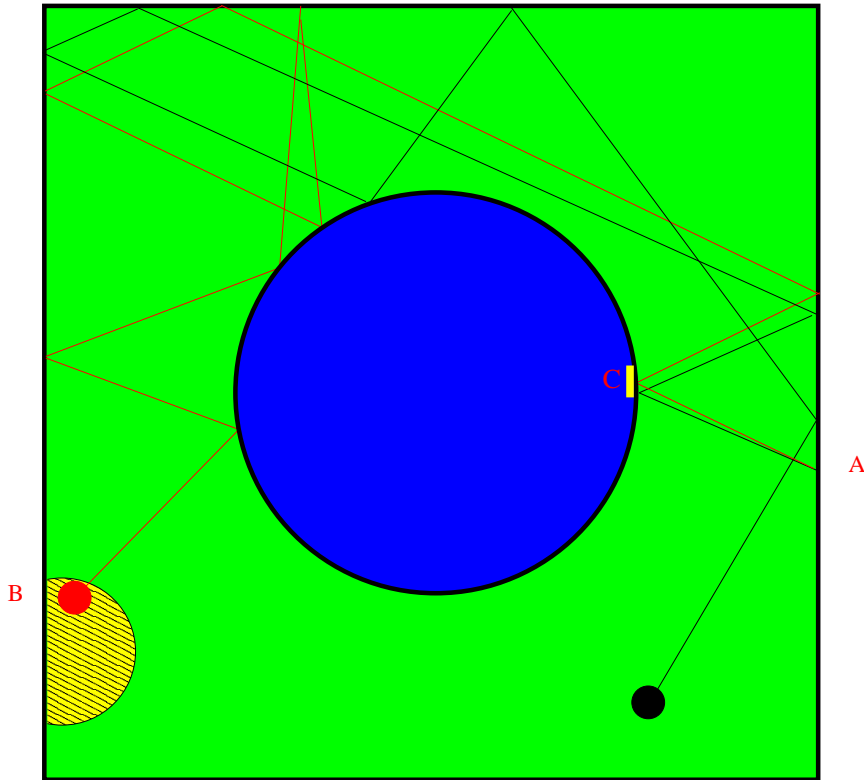
Et si je rate un peu mon coup?

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI



Ça risque de mal se passer!

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI



Raté, je te l'avais bien dit. Le mouvement est **très instable**. L'écart entre les trajectoires augmente très rapidement : il est multiplié par 3 chaque seconde en moyenne.

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI

UN PETIT CALCUL TOUT DE MÊME

I_0 = la distance entre l'impact de votre boule sur l'obstacle et le point C .

I_n = la distance n secondes plus tard entre votre boule et une autre boule tiré de A parfaitement sur C.

On trouve : $I_0 = 2\text{mm} \Rightarrow I_1 = 3 \times 2 = 6\text{mm} \Rightarrow I_2 = 3 \times 6 = 18\text{mm} \Rightarrow$

$I_3 = 54\text{mm} \Rightarrow I_4 = 162\text{mm} \Rightarrow I_5 = 486\text{mm} \Rightarrow I_6 = 1458\text{mm} \approx 1,5\text{m}!!!$

CONCLUSION : Si vous ne connaissez la position du premier impact qu'à quelques millimètres près, tout ce qu'on peut encore dire sur la boule après quelques secondes, est qu'elle est quelque part sur la table de billard. Mais cela est équivalent à ne rien dire du tout!

UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI

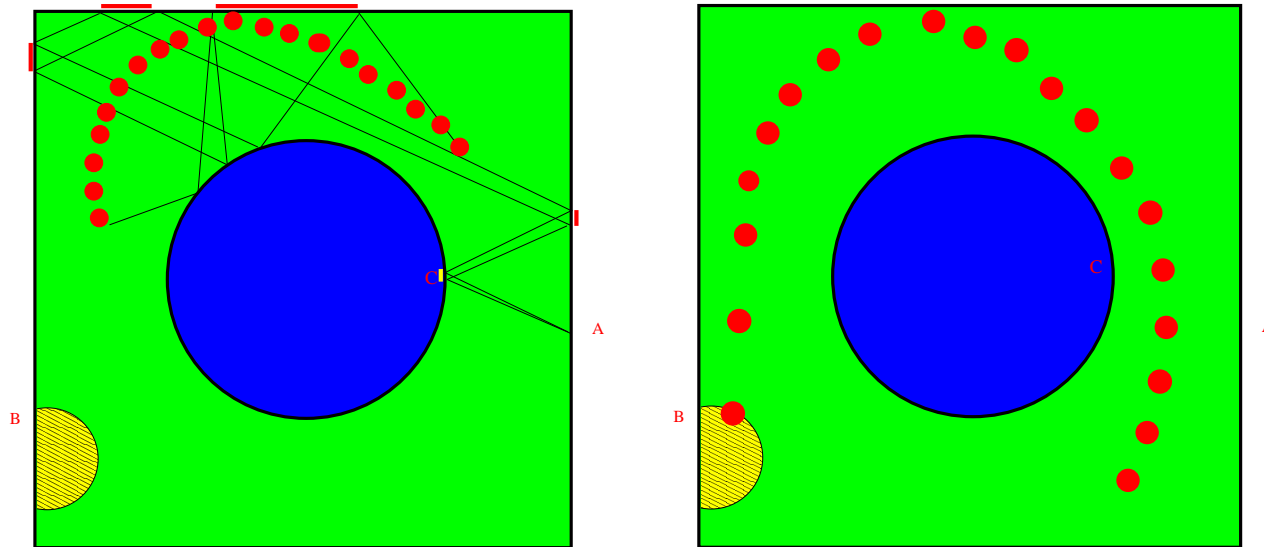
UN PETIT CALCUL TOUT DE MÊME

I_0 = la distance entre l'impact de votre boule sur l'obstacle et le point C .

I_n = la distance n secondes plus tard entre votre boule et une autre boule tiré de A parfaitement sur C .

On trouve : $I_0 = 2\text{mm} \Rightarrow \dots \Rightarrow I_5 = 486\text{mm} \Rightarrow I_6 = 1458\text{mm} \approx 1,5\text{m}!!!$

ET ÇA SE VOIT :



UN EXEMPLE DE SYSTÈME CHAOTIQUE : LE BILLARD DE SINAI

OÙ EST LE PROBLÈME? Prédire l'avenir de la boule est impossible, bien qu'il soit parfaitement déterminé par l'état présent. **QUESTION 1, OUI; QUESTION 2, NON.**

Y A-T-IL UNE SOLUTION? Améliorer la précision du tir initial? Inutile! Si on veut prédire la position de la boule à dix centimètres près, pendant dix secondes, I_{10} ne doit pas dépasser $10\text{cm} = 100\text{mm} \Rightarrow I_9 \leq 33\text{cm} \Rightarrow I_8 = 11\text{cm} \Rightarrow I_0 \leq 2$ centièmes d'un millimètre : l'impact de la boule sur l'obstacle doit être à moins de $0,02$ mm de C. Bonne chance!

FAUDRA VIVRE AVEC Le billard de Sinai est un exemple de système dynamique ayant cette propriété de **dépendance sensible aux conditions initiales**. On les appelle **les systèmes dynamiques chaotiques** : pour eux, presque n'importe quels deux états initialement proches s'éloigneront l'un de l'autre selon une progression géométrique de raison a plus grand que 1. Ce qui a étonné est que ce comportement est la règle et non l'exception, même dans des systèmes d'apparence simple et ayant peu de degrés de liberté : tout n'est pas perturbation de mouvement simple.

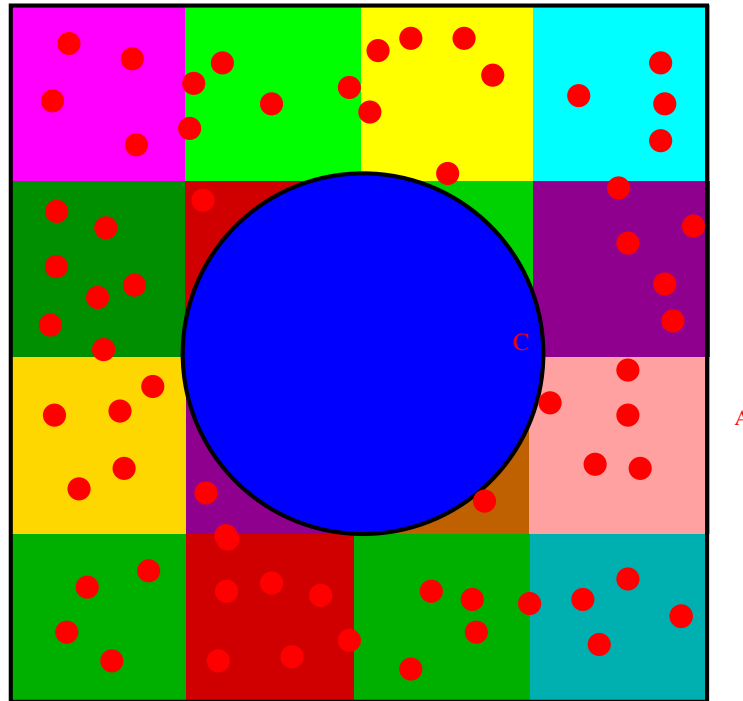
QUELQUES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈME CHAOTIQUES

LA VISION ANTHROPOMORPHE : LA BOULE PERD LA MÉMOIRE Si vous regardez une boule et que vous lui demandez d'où elle vient, le même problème se pose que tout à l'heure, lorsqu'on voulait prédire l'avenir de la boule : si elle ne connaît pas avec une précision inaccessiblement grande sa position et sa vitesse actuelle, tout ce que elle pourra dire sur son état dix secondes plus tôt est qu'elle était quelque part dans le billard, ce qui ne nous apprend rien. C'est comme si elle a oublié d'où elle venait!

TEMPS CARACTÉRISTIQUE Le temps après lequel aucune prédiction utile ne peut être fait sur l'évolution du système. Pour le billard de Sinai ci-dessus, si on admet que la position de l'impact proche de C peut être connue à un millimètre près, ce temps est de quatre à cinq secondes. Au delà, la balle peut être "n'importe où."

QUELQUES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈME CHAOTIQUES

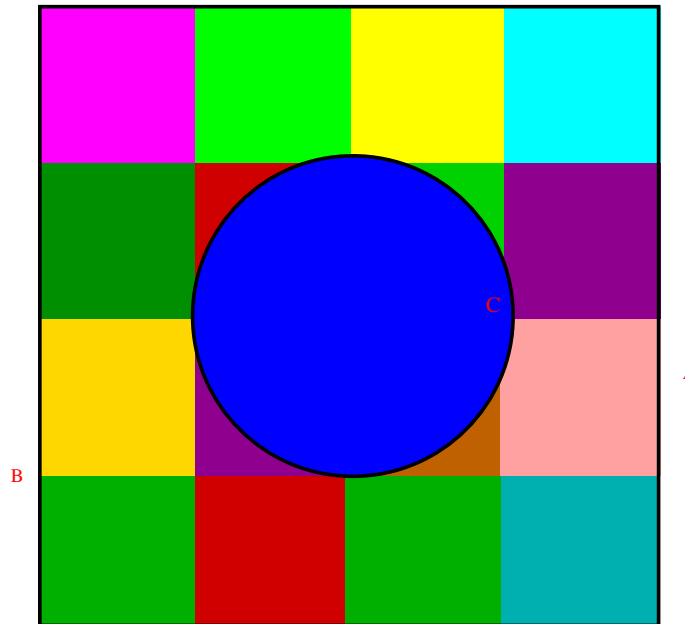
LE CHAOS, SOURCE DE HASARD



Théorème 1 [Sinai, Bunimovich, Young] *Si vous lancez un grand nombre de boules du point A vers C, alors après une dizaine de secondes la même fraction de boules se trouve dans chacun des carrés coloriés.*

QUELQUES CARACTÉRISTIQUES DES SYSTÈME CHAOTIQUES

LE CHAOS, SOURCE DE HASARD : LE MULTICOLORE



Si maintenant je me prépare à tirer une boule de A vers C et je vous demande de prédire où la boule que je vais tirer sera après dix secondes, vous pouvez répondre une couleur au hasard. L'issue de l'expérience de cet expérience paraît en effet comme étant complètement *aléatoire ou imprévisible*.

LE CHAOS QUANTIQUE

MÉCANIQUE QUANTIQUE Remplace la mécanique classique au niveau moléculaire et atomique. **NEWTON** ↓ **SCHRÖDINGER** ↑

Le principe d'incertitude de Heisenberg : on ne peut pas assigner une position et une vitesse précises à une particule. Il y a toujours une incertitude fondamentale sur ces grandeurs.

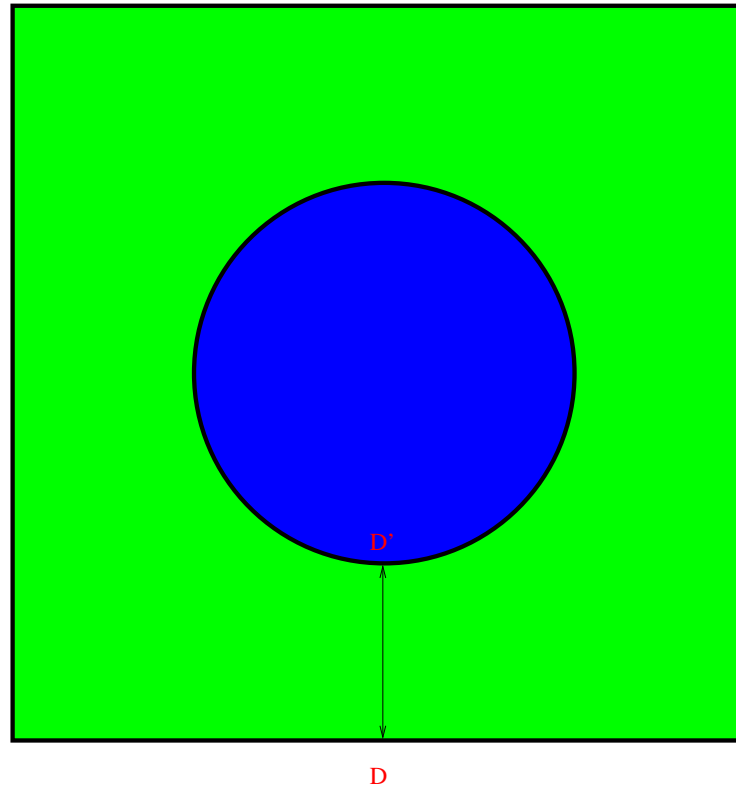
Seules des *distributions de probabilité*, permettant de déterminer la probabilité que la particule a telle ou telle vitesse ou position font encore partie de la théorie et si l'incertitude sur la position d'une particule est très petite, l'incertitude sur sa vitesse sera forcément relativement grande, et vice versa.

CHAOS QUANTIQUE Quelle est la pertinence du chaos dans le contexte quantique? Il s'agit plus particulièrement de comprendre quelle est la signature du chaos dans le monde quantique.

LE CHAOS QUANTIQUE : LE BILLARD DE SINAI QUANTIQUE

=un électron piégé dans une boîte microscopique.

Au niveau classique, le billard permet plusieurs orbites périodiques.



QUESTION : “Une particule quantique peut-elle être localisée entièrement sur une telle trajectoire ou en tout cas en rester très proche?”

LE CHAOS QUANTIQUE : LE BILLARD DE SINAI QUANTIQUE

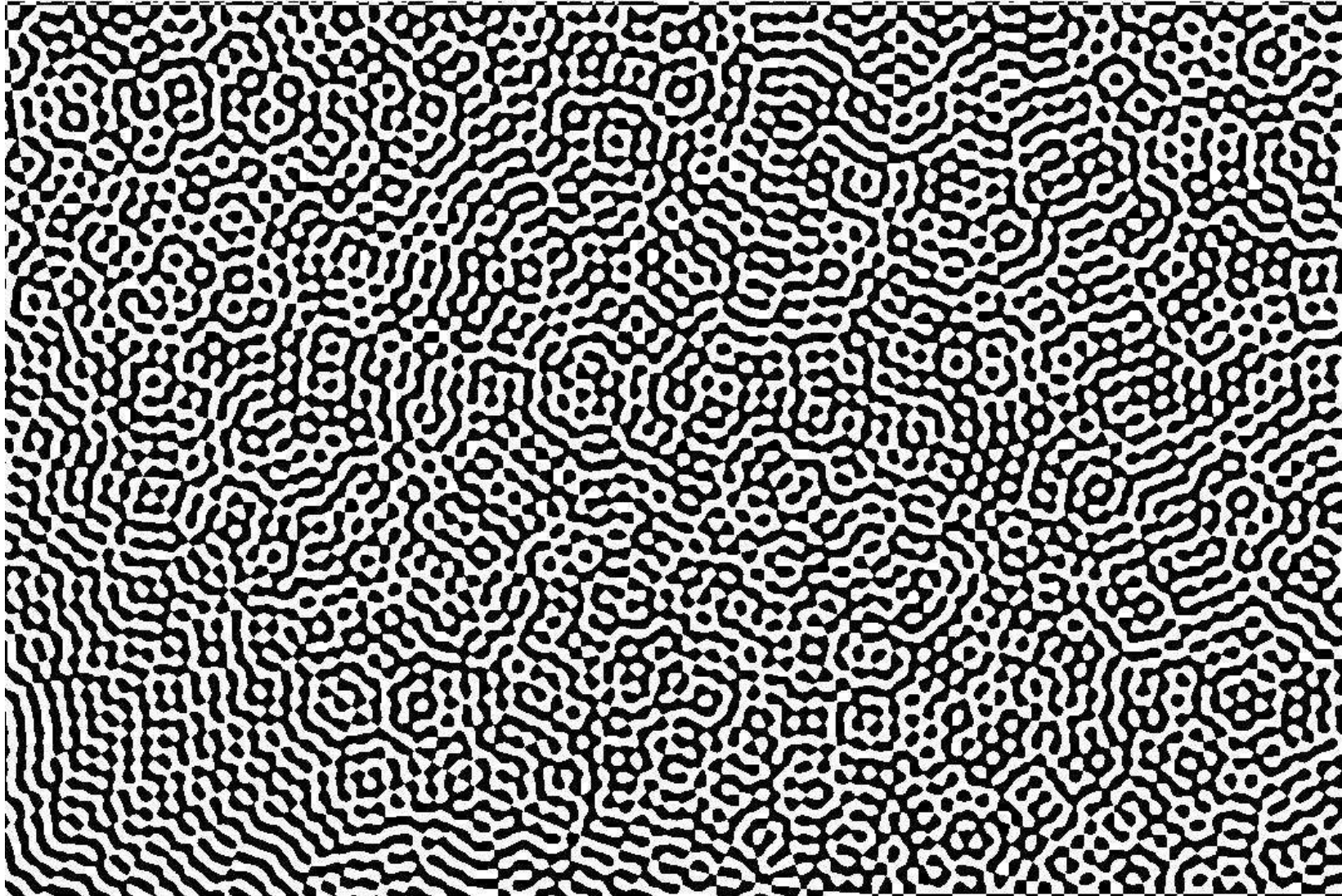
ÉLÉMENT DE RÉPONSE

Théorème 2 [Schnirelman, S. Zelditch, Y. Colin de Verdière, M. Zworski, . . .] *Si un électron est placé avec une énergie bien définie dans un billard de Sinai ou dans un autre billard chaotique, alors pour presque toutes les énergies possibles, la probabilité de le trouver dans une des cases coloriés du billard est la même pour toutes les cases.*

UN CONSTAT NUMÉRIQUE Si on calcule à l'aide d'un ordinateur la probabilité de trouver l'électron dans chacune des cases, pour une longue suite d'énergies différentes, alors on constate que pour certaines énergies, l'électron est plus probable de se trouver très proche de certaines orbites périodiques dans le billard et donc moins probable de se trouver ailleurs.

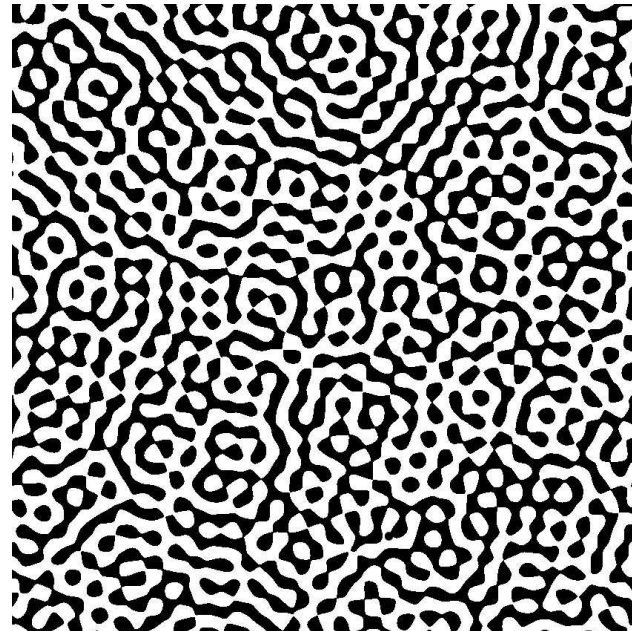
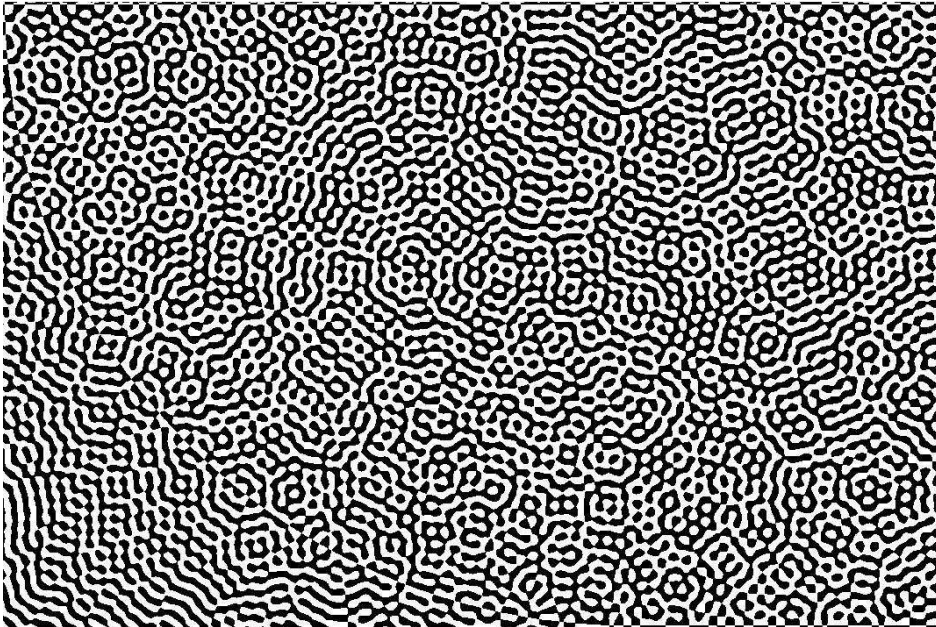
OÙ EST L'ÉLECTRON?

Un peu partout?



OÙ EST L'ÉLECTRON?

Un peu partout, au hasard?



OÙ EST L'ÉLECTRON?

Ou près d'orbites périodiques?

LE CHAOS QUANTIQUE : LE BILLARD DE SINAI QUANTIQUE

QUESTION OUVERTE Montrer rigoureusement l'existence ou la non-existence de telles énergies, et calculer la probabilité de trouver l'électron proche de telle ou telle orbite périodique. On veut par exemple savoir si cette probabilité peut valoir 1, ce qui voudrait dire qu'on est sûr de trouver la particule proche de l'orbite périodique. Dans certains modèles nettement plus simples à traiter mathématiquement que les billards, on sait montrer qu'il existe de telles énergies où la probabilité de trouver la particule proche de l'orbite périodique vaut 0,5, mais pas plus. Pour les billards, on ne sait pas exactement ce qui se passe.

CONCLUSION

Une des choses que les recherches des trente à quarante dernières années sur la théorie des systèmes dynamiques et sur leurs applications dans les sciences ont permis d'établir clairement est que les deux questions que j'ai posées au début sont distinctes : **certains systèmes, mêmes simples, peuvent être déterministes, sans pour autant être prévisibles.**

Les scientifiques avaient l'habitude de penser que, si on pouvait isoler un système des influences de son environnement et le décrire à l'aide d'un nombre réduit de variables, il serait à la fois déterministe et prévisible. Le développement de la théorie des systèmes dynamiques a permis de clairement mettre en évidence l'observation à posteriori assez banale que, pour être prévisible, le système doit être stable : si des petites incertitudes sur l'état initial du système s'amplifient trop vite, toute prédiction sur le comportement futur du système devient illusoire.

S'ajoute à cela le constat que **l'instabilité est la règle, pas l'exception.**

MATHÉMATIQUES : SPIELEREI DES GEISTES?

UNE INQUIÉTUDE LÉGITIME Mais paie-t-on vraiment les mathématiciens pour étudier en grand détail des jeux de billards futiles, abstraits et irréalistes, où les boules roulent sans frottement et sans glisser?

MATHÉMATIQUES : SPIELEREI DES GEISTES?

UNE INQUIÉTUDE LÉGITIME Mais paie-t-on vraiment les mathématiciens pour étudier en grand détail des jeux de billards futiles, abstraits et irréalistes, où les boules roulent sans frottement et sans glisser?

DEUX RÉPONSES • Le chaos est partout : la météo et le système solaire sont des exemples. L'étude de modèles simples aide à comprendre les mécanismes sous-jacents. Les idées développées dans les modèles simples sont utilisées en physique, chimie, biologie, épidémiologie, économie, dans la théorie de la complexité, *etc.*

MATHÉMATIQUES : SPIELEREI DES GEISTES?

UNE INQUIÉTUDE LÉGITIME Mais paie-t-on vraiment les mathématiciens pour étudier en grand détail des jeux de billards futiles, abstraits et irréalistes, où les boules roulent sans frottement et sans glisser?

DEUX RÉPONSES ● Le chaos est partout : la météo et le système solaire sont des exemples. L'étude de modèles simples aide à comprendre les mécanismes sous-jacents. Les idées développées dans les modèles simples sont utilisées en physique, chimie, biologie, épidémiologie, économie, dans la théorie de la complexité, *etc.*

● **“Je ne dis pas : la Science est utile parce qu'elle nous permet à construire des machines; je dis : les machines sont utiles, parce qu'en travaillant pour nous, elles nous laisseront un jour plus de temps pour faire de la science.”** (H. Poincaré, La valeur de la Science)