

Estimations d'erreur a posteriori par flux équilibrés pour les méthodes de Galerkin discontinues

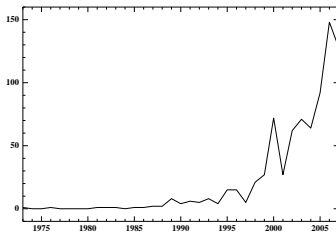
Alexandre Ern

Université Paris-Est, CERMICS, Ecole des Ponts

Valenciennes, 12 septembre 2008

Introduction

- méthodes de Galerkin discontinues (GD)
 - introduites en '73 [Reed & Hill] pour des simulations en neutronique
 - impact limité à l'époque
 - regain d'intérêt considérable depuis environ une décennie
- publications/an relatives à GD (source Mathscinet)



Quelques repères bibliographiques

■ problèmes hyperboliques

- analyse numérique, cas linéaire [Lesaint-Raviart '74]
- liens avec les volumes finis [Cockburn-Karniadakis-Shu '00]

■ problèmes elliptiques

- méthodes de pénalisation [Nitsche '71, Babuška '73, Douglas & Dupont '75, Baker '77, Wheeler '78, Arnold '82]
- analyse unifiée (Poisson) [Arnold, Brezzi, Cockburn & Marini '01]

■ analyse unifiée hyperbolique/elliptique

- systèmes de Friedrichs [Ern & Guermond '06]

Méthodes numériques concurrentes I

- différences finies (DF)
 - nuages de points (régulièrement disposés)
 - approximation de valeurs ponctuelles
- volumes finis (VF)
 - volumes de contrôle
 - approximations de valeurs moyennes sur les cellules
- éléments finis (EF)
 - espaces fonctionnels de dimension finie
 - approximations des composantes dans une base

Méthodes numériques concurrentes II

Différences finies

■ avantages

- simplicité d'implémentation
- cadre théorique (Von Neumann) pour linéaire/régulier/coef. cst.
- précision arbitraire en élargissant le stencil
- explicite en temps possible

■ inconvénients

- maillages cartésiens en 2D/3D
- stabilité et précision non immédiates avec CL
- solution suffisamment régulière (développements de Taylor)

Méthodes numériques concurrentes III

Volumes finis

■ avantages

- intuitif à construire (notion de flux)
- flexibilité géométrique (type de mailles)
- adaptés aux lois de conservation
- cadre théorique, même en non-lin. [Eymard, Gallouet & Herbin '00]
- explicite en temps possible

■ inconvénients

- ordre élevé complexe sur triangulations
- traitements spéciaux pour opérateurs du 2ème ordre

Méthodes numériques concurrentes IV

Éléments finis

■ avantages

- flexibilité géométrique (type de mailles)
- extension à l'ordre élevé
- adaptés aux problèmes elliptiques
- cadre théorique relativement complet [Brenner & Scott '02, Ern & Guermond '04]

■ inconvénients

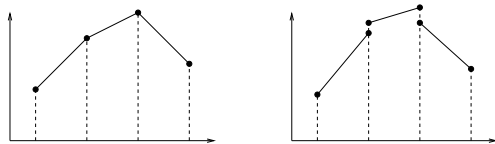
- stabilisation pour les opérateurs d'ordre un
- implicite en temps (sauf condensation de masse)

Méthodes numériques concurrentes V

- **GD : vers le meilleur de VF et EF?**
 - flexibilité géométrique
 - ordre élevé/variable
 - cadre théorique
 - efficacité raisonnable hyperbolique/elliptique
 - explicite/implicite en temps
 - parallélisation possible
- ... mais attention au coût numérique
 - beaucoup de degrés de liberté
 - solveurs/préconditionneurs pour GD
- **deux visions complémentaires des méthodes GD**
 1. VF avec description enrichie dans les mailles
 2. EF avec discontinuité aux interfaces

Espaces d'éléments finis discontinus I

- famille régulière de maillages $\{\mathcal{T}_h\}_h$
- $DP_h^p = \{v_h \in L^2(\Omega); \forall T \in \mathcal{T}_h, v_h|_T \in \mathbb{P}_p\}$ ($p \geq 1$)
- les degrés de liberté locaux sont indépendants d'une maille à l'autre (pas de condition de raccord)
- $\dim(DP_h^p) = N_{\text{ma}} \dim(\mathbb{P}_p) = C_{p+d}^p N_{\text{ma}}$
- éléments finis continus : $CP_h^p = DP_h^p \cap C^0(\Omega)$



Espaces d'éléments finis discontinus II

- relations d'Euler

- 2D : $N_{\text{ma}} \simeq 2N_{\text{so}}$, $N_{\text{ar}} \simeq 3N_{\text{so}}$
- 3D : $N_{\text{ma}} \simeq 6N_{\text{so}}$, $N_{\text{fa}} \simeq 12N_{\text{so}}$, $N_{\text{ar}} \simeq 7N_{\text{so}}$

- exemples

- ($d = 2, p = 1$) $\dim(\text{CP}_h^1) = N_{\text{so}}$, $\dim(\text{DP}_h^1) = 3N_{\text{ma}} \simeq 6N_{\text{so}}$
- ($d = 2, p = 2$) $\dim(\text{CP}_h^2) \simeq 4N_{\text{so}}$, $\dim(\text{DP}_h^2) = 6N_{\text{ma}} \simeq 12N_{\text{so}}$

- tableau comparatif

p	$d = 2$		$d = 3$	
	DP_h^p	CP_h^p	DP_h^p	CP_h^p
1	6	1	24	1
2	12	4	40	8
3	20	9	80	27

Espaces d'éléments finis discontinus III

■ avantages de l'approche discontinue

- flexibilité dans le choix des fonctions de base
- possibilité de maillages non-conformes
- variation locale de l'ordre polynômial
- taux de convergence optimaux quand la solution exacte est localement régulière à condition que le maillage soit adapté aux chocs

■ inconvénients

- augmentation du coût des calculs (à maillage fixé)
- extension de codes EF continus en EF discontinus pas toujours aisée (structure de données, boucles sur les faces)

Plan de l'exposé

- Introduction à la méthode GD
 - le Laplacien
 - méthode avec poids en diffusion hétérogène anisotrope
 - advection–diffusion–réaction (ADR)
- Estimations d'erreur a posteriori par flux équilibrés
 - diffusion pure
 - ADR : estimation semi-robuste
 - ADR : estimation robuste
- Bibliographie
 - AE, Stephansen & Zunino, IMA JNA '08
 - Di Pietro, AE & Guermond, SINUM '08
 - AE & Stephansen, JCM '08
 - AE, Stephansen & Vohralík, Submitted

Le Laplacien

Le problème modèle ($f \in L^2(\Omega)$)

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- formulation faible : $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$B(u, v) := (\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le p.s. de $L^2(\Omega)$

Design de la forme bilinéaire I

- problème discret: $u_h \in V_h := \text{DP}_h^p$ t.q.

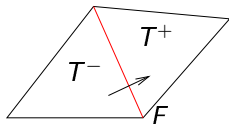
$$B_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

- faces du maillage : $\mathcal{F}_h = \mathcal{F}_h^i \cup \mathcal{F}_h^\partial$

- moyennes et sauts (normale \mathbf{n}_F dirigée de T^- vers T^+)

$$\{\{\varphi\}\} = \frac{1}{2}(\varphi^- + \varphi^+) \quad \llbracket \varphi \rrbracket = \varphi^- - \varphi^+$$

(au bord, $\{\{\varphi\}\} = \llbracket \varphi \rrbracket = \varphi$)



Design de la forme bilinéaire II

- localisation des gradients maille par maille (gradients brisés)

$$B_h(u_h, v_h) := (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla u_h, \nabla v_h)_T$$

- B_h n'est pas **consistante** pour v_h discontinue

$$B_h(u_h, v_h) := (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\mathbf{n}_F \cdot \{\{\nabla_h u_h\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_F$$

Pour la solution exacte u , par IPP, $B_h(u, v_h) = (-\Delta u, v_h)$

Design de la forme bilinéaire III

- B_h n'est pas **symétrique**

$$B_h(u_h, v_h) := (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \{(\mathbf{n}_F \cdot \{\nabla_h u_h\}, \llbracket v_h \rrbracket)_F + (\mathbf{n}_F \cdot \{\nabla_h v_h\}, \llbracket u_h \rrbracket)_F\}$$

- B_h n'est pas **coercive**

$$B_h(u_h, v_h) := (\nabla_h u_h, \nabla_h v_h) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \varpi h_F^{-1} (\llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket)_F - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \{(\mathbf{n}_F \cdot \{\nabla_h u_h\}, \llbracket v_h \rrbracket)_F + (\mathbf{n}_F \cdot \{\nabla_h v_h\}, \llbracket u_h \rrbracket)_F\}$$

avec ϖ suffisamment grand (dépend de la régularité du maillage)

- méthode SIPG (Symmetric Interior Penalty)

Design par flux numériques I

- formulation mixte (problème à deux champs)
- $z = (\mathbf{s}, u)$, u : variable primale; \mathbf{s} : flux diffusif

$$\begin{cases} \mathbf{s} + \nabla u = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{s} = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- $z_h = (\mathbf{s}_h, u_h)$, $u_h \in U_h := V_h = \text{DP}_h^p$, $\mathbf{s}_h := \mathbf{S}_h = [U_h]^d$
- principe : considérer des fonctions tests localisées sur une maille et intégrer par parties

Design par flux numériques II

- formulation locale : $\forall T \in \mathcal{T}_h$,

$$(\mathbf{s}_h, \mathbf{q})_T - (u_h, \nabla \cdot \mathbf{q})_T + \sum_{F \subset \partial T} (\phi_{T,F}^s(z_h), \mathbf{q})_F = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in [\mathbb{P}_p(T)]^d$$

$$-(\mathbf{s}_h, \nabla r)_T + \sum_{F \subset \partial T} (\phi_{T,F}^u(z_h), r)_F = (f, r)_T \quad \forall r \in \mathbb{P}_p(T)$$

- **flux numériques** (\mathbf{n}_T : normale extérieure à T)

$$\phi_{T,F}^s(z_h) := \begin{cases} \mathbf{n}_T \{ \{ u_h \} \} \\ 0 \end{cases} \quad \phi_{T,F}^u(z_h) := \begin{cases} \mathbf{n}_T \cdot \{ \{ \mathbf{s}_h \} \} + (\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{n}_F) \varpi h_F^{-1} [[u_h]] & (\mathcal{F}_h^i) \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}_h + \varpi h_F^{-1} u_h & (\mathcal{F}_h^\partial) \end{cases}$$

- flux conservatifs ($\phi_{T^+,F}(z_h) + \phi_{T^-,F}(z_h) = 0$)
- flux consistants : $\phi_{T,F}(z)$ coïncide avec les flux exacts

Design par flux numériques III

- pour $F \in \mathcal{F}_h$, $\mathbf{r}_F : L^2(F) \ni v \mapsto \mathbf{r}_F(v) \in \mathbf{S}_h$ est tel que

$$\forall \mathbf{q}_h \in \mathbf{S}_h, \quad (\mathbf{r}_F(v), \mathbf{q}_h) = (v, \mathbf{n}_F \cdot \{\{\mathbf{q}_h\}\})_F$$

- \mathbf{r}_F est à valeurs vectorielles, colinéaire à \mathbf{n}_F
- le support de \mathbf{r}_F se réduit au(x) triangle(s) dont F est une face

- on introduit l'opérateur global

$$\mathbf{R}_h : U_h \ni u_h \mapsto \mathbf{R}_h(u_h) = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \mathbf{r}_F(\llbracket u_h \rrbracket) \in \mathbf{S}_h$$

Design par flux numériques IV

- **élimination locale du flux \mathbf{s}_h**
- on avait obtenu l'équation vectorielle discrète: $\forall \mathbf{q}_h \in \mathbf{S}_h$,

$$(\mathbf{s}_h + \nabla_h u_h, \mathbf{q}_h) - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\mathbf{n}_F \cdot \{\{\mathbf{q}_h\}\}, \llbracket u_h \rrbracket)_F = 0$$

qui se réécrit

$$(\mathbf{s}_h + \mathbf{G}_h(u_h), \mathbf{q}_h) = 0$$

avec le gradient discret

$$\mathbf{G}_h(u_h) = \nabla_h u_h - \mathbf{R}_h(u_h)$$

- d'où $\mathbf{s}_h = -\mathbf{G}_h(u_h)$

Design par flux numériques V

- on avait obtenu l'équation scalaire discrète: $\forall v_h \in U_h$,

$$-(\mathbf{s}_h, \nabla_h v_h) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\mathbf{n}_F \cdot \{\{\mathbf{s}_h\}\}, \llbracket v_h \rrbracket)_F + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \varpi h_F^{-1} (\llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket)_F = (f, v_h)$$

ou encore

$$B_h(u_h, v_h) := (\mathbf{G}_h(u_h), \mathbf{G}_h(v_h)) + j_h^{\text{LDG}}(u_h, v_h) = (f, v_h)$$

avec le terme de stabilisation ($\varpi > 0$)

$$j_h^{\text{LDG}}(u_h, v_h) = \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \varpi h_F^{-1} (\llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket)_F$$

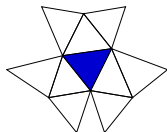
- Local DG [Cockburn & Shu '98]

Lien entre les deux approches I

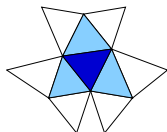
- on considère une fonction test v_h à support sur une maille
- $\mathbf{G}_h(v_h)$ est à support sur cette maille et les trois voisines
- on identifie les mailles où les degrés de liberté de u_h sont couplés à ceux de v_h dans la méthode LDG

Lien entre les deux approches II

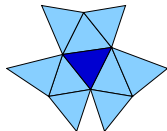
$$(\nabla_h u_h, \nabla_h v_h)$$



$$(\mathbf{R}_h(u_h), \nabla_h v_h) + (\nabla_h u_h, \mathbf{R}_h(v_h)) \\ + j_h^{\text{LDG}}(u_h, v_h)$$



$$(\mathbf{R}_h(u_h), \mathbf{R}_h(v_h))$$



Lien entre les deux approches III

- seul terme responsable de l'élargissement du stencil à 10 triangles

$$\rho_h(u_h, v_h) := (\mathbf{R}_h(u_h), \mathbf{R}_h(v_h))$$

- nouvelle stratégie de pénalisation

$$j_h^{\text{SIPG}}(u_h, v_h) := j_h^{\text{LDG}}(u_h, v_h) - (\mathbf{R}_h(u_h), \mathbf{R}_h(v_h))$$

- on retrouve exactement la méthode SIPG
- on comprend pourquoi ϖ doit maintenant être suffisamment grand

Lien entre les deux approches IV

- variante BRMPS [Bassi, Rebay et al. '97]

$$j_h^{\text{BRMPS}}(u_h, v_h) := \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \varpi(\mathbf{r}_F(\llbracket u_h \rrbracket), \mathbf{r}_F(\llbracket v_h \rrbracket))$$

- condition de stabilité plus simple : $\varpi > N_\partial$, le nombre de faces d'une maille

Diffusion hétérogène anisotrope

Le problème modèle ($f \in L^2(\Omega)$)

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- formulation faible : $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q.

$$B(u, v) := (\mathbf{K} \nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

- $\mathbf{K} \in [L^\infty(\Omega)]^{d,d}$ symétrique et unif. défini positif
- maillage aligné avec les discontinuités de \mathbf{K}

Design de la forme bilinéaire I

- Houston, Schwab & Süli 02

$$\begin{aligned}
 B_h(u_h, v_h) := & (\mathbf{K} \nabla_h v, \nabla_h w) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\gamma_{\mathbf{K}, F} \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket)_F \\
 & - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \{ (\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h u_h \}, \llbracket v_h \rrbracket)_F + (\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h v_h \}, \llbracket u_h \rrbracket)_F \}
 \end{aligned}$$

- paramètre de pénalisation ($\varpi > 0$ suffisamment grand)

$$\gamma_{\mathbf{K}, F} = \varpi h_F^{-1} \{ \mathbf{n} \mathbf{K} \mathbf{n} \}$$

→ moyenne arithmétique des diffusivités normales à l'interface

Design de la forme bilinéaire II

- moyennes pondérées $\{\{\varphi\}\}_\omega = \omega^- \varphi^- + \omega^+ \varphi^+$ avec des poids dépendant de la diffusion ($\omega^- + \omega^+ = 1$)

$$\omega^- = \frac{\delta_{\mathbf{K}^+}}{\delta_{\mathbf{K}^+} + \delta_{\mathbf{K}^-}} \quad \omega^+ = \frac{\delta_{\mathbf{K}^-}}{\delta_{\mathbf{K}^+} + \delta_{\mathbf{K}^-}} \quad \delta_{\mathbf{K}^\mp} = \mathbf{n}_F(\mathbf{K}|_{T^\mp})\mathbf{n}_F$$

- moyennes usuelles : $\omega^- = \omega^+ = \frac{1}{2}$
- au bord, $\{\{\varphi\}\}_\omega = \varphi$
- permet de définir les coefficients $\omega_{T,F}$, $T \in \mathcal{T}_h$, F face de T

Design de la forme bilinéaire III

- Symmetric Weighted Interior Penalty (SWIP)

$$B_h(u_h, v_h) := (\mathbf{K} \nabla_h u_h, \nabla_h v_h) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\gamma_{\mathbf{K}, F} \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket)_F \\ - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \{ (\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h u_h \}_\omega, \llbracket v_h \rrbracket)_F + (\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h v_h \}_\omega, \llbracket u_h \rrbracket)_F \}$$

- paramètre de pénalisation ($\varpi > 0$ suffisamment grand)

$$\gamma_{\mathbf{K}, F} = \varpi h_F^{-1} \left(\frac{\delta_{\mathbf{K}_+} \delta_{\mathbf{K}_-}}{\delta_{\mathbf{K}_+} + \delta_{\mathbf{K}_-}} \right)$$

→ moyenne **harmonique** des diffusivités normales à l'interface

- estimations d'erreur (a priori) **robustes en \mathbf{K}**

Advection–diffusion–réaction

Problème modèle

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- formulation faible : $u \in H_0^1(\Omega)$ t.q. $\forall v \in H_0^1(\Omega)$

$$B(u, v) := (\mathbf{K} \nabla u, \nabla v) + (\beta \cdot \nabla u, v) + (\mu u, v) = (f, v)$$

- Difficultés spécifiques
 - advection dominante (grand Péclet)
 - réaction dominante (grand Damköhler)
 - diffusion fortement hétérogène et anisotrope

Traitement GD des termes advectifs–réactifs I

- $\beta \in [L^\infty(\Omega)]^d$, $\nabla \cdot \beta \in L^\infty(\Omega)$, $\mu \in L^\infty(\Omega)$ et

$$\exists \mu_0 > 0 \quad \text{tel que} \quad \mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \mu_0 \quad \text{p.p. dans } \Omega$$

- cette hypothèse implique que la forme bilinéaire

$$A(u, v) := (\mu u + \beta \cdot \nabla u, v)$$

est L^2 -coercive sur $H_0^1(\Omega)$

- formulation DG
 - localisation du gradient
 - restauration consistante de la L^2 -coercivité (flux centrés)
 - pénalisation moindres carrés des sauts (flux upwind)

Traitement GD des termes advectifs–réactifs II

- localisation du gradient

$$A_h(u_h, v_h) := (\mu u_h + \beta \cdot \nabla_h u_h, v_h)$$

- A_h n'est pas L^2 -coercive

$$A_h(u_h, v_h) := (\mu u_h + \beta \cdot \nabla_h u_h, v_h) - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\beta \cdot \mathbf{n}_F \llbracket u_h \rrbracket, \{\!\{ v_h \}\!\})_F$$

(au bord, la moyenne arith. est redéfinie comme $\{\!\{ \varphi \}\!\} = \frac{1}{2} \varphi$)

- cette nouvelle forme bilinéaire est L^2 -coercive et consistante

Traitement GD des termes advectifs–réactifs III

- par simple IPP

$$A_h(u_h, v_h) = ((\mu - \nabla \cdot \beta)u_h, v_h) - (u_h, \beta \cdot \nabla v_h) + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\beta \cdot \mathbf{n}_F \{u_h\}, [v_h])_F$$

- formulation locale : $\forall T \in \mathcal{T}_h, \forall q \in \mathbb{P}_p(T)$,

$$A_h(u_h, q1_T) = ((\mu - \nabla \cdot \beta)u_h, q)_T - (u_h, \beta \cdot \nabla q)_T + \sum_{F \subset \partial T} (\phi_{T,F}(u_h), q)_F$$

avec le **flux numérique**

$$\phi_{T,F}(u_h) = \beta \cdot \mathbf{n}_T \{u_h\} \quad (F \in \mathcal{F}_h^i)$$

- ce flux est conservatif et consistant
- il s'agit du **flux centré**

Traitement GD des termes advectifs–réactifs IV

- pénalisation moindres carrés des sauts ($\gamma_{\beta,F} = \frac{1}{2}|\beta \cdot \mathbf{n}_F|$)

$$A_h(u_h, v_h) := (\mu u_h + \beta \cdot \nabla_h u_h, v_h) - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\beta \cdot \mathbf{n}_F \llbracket u_h \rrbracket, \{\{v_h\}\})_F$$

$$+ \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\gamma_{\beta,F} \llbracket u_h \rrbracket, \llbracket v_h \rrbracket)_F$$

- modification du flux numérique

$$\phi_{T,F}(u_h) = \beta \cdot \mathbf{n}_T u_h^\uparrow \quad (F \in \mathcal{F}_h^i)$$

- ce flux est conservatif et consistant
- il s'agit du **flux upwind**

Méthode SWIP pour ADR I

$$\begin{aligned}
 B_h(u_h, v_h) &:= (\mathbf{K} \nabla_h u_h, \nabla_h v_h) + ((\mu - \nabla \cdot \beta) u_h, v_h) - (u_h, \beta \cdot \nabla_h v_h) \\
 &\quad - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} \{ (\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h u_h \}_\omega, [v_h])_F + (\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h v_h \}_\omega, [u_h])_F \} \\
 &\quad + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\gamma_F [u_h], [v_h])_F + \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\beta \cdot \mathbf{n}_F \{ u_h \}, [v_h])_F
 \end{aligned}$$

avec le paramètre de pénalisation $\gamma_F = \gamma_{\mathbf{K},F} + \gamma_{\beta,F}$ où

$$\gamma_{\mathbf{K},F} = \varpi h_F^{-1} \left(\frac{\delta_{\mathbf{K}^+} \delta_{\mathbf{K}^-}}{\delta_{\mathbf{K}^+} + \delta_{\mathbf{K}^-}} \right) \quad \gamma_{\beta,F} = \frac{1}{2} |\beta \cdot \mathbf{n}_F|$$

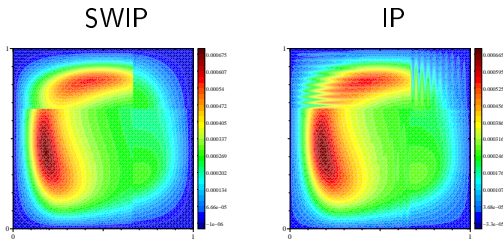
- estimations d'erreur (quasi-)optimales (en h) et robustes (en \mathbf{K})
 - \mathbf{K} défini positif [AE, Stephansen & Zunino '08]
 - \mathbf{K} semi-défini positif [Di Pietro, AE & Guermond '08]

Méthode SWIP pour ADR II

- en présence d'advection, les hétérogénéités de la diffusion peuvent déclencher des **couches intérieures**
 - cas 1D isotrope [Gastaldi & Quarteroni '89]
 - cas multi-D anisotrope semi-défini [Di Pietro, AE & Guermond '08] où la solution exacte peut être **discontinue**
- décomposition de domaine par GD
 - diffusion isotrope hétérogène : robustesse requiert l'utilisation de **moyennes pondérées** [Burman & Zunino '06]

Méthode SWIP pour ADR III

- comparaison entre SWIP et une méthode IP sans pondération
- carré unité divisé en 4 sous-domaines, champ β tournant
- diffusion en x dans 2 quadrants et en y dans les deux autres, taux d'anisotropie 10^6



- les méthodes GD robustes pour ADR avec diffusion hétérogène doivent utiliser des moyennes pondérées

A posteriori error estimates

- energy norm error estimates
- let u be the exact solution of a PDE with energy norm $\|\cdot\|$
- let u_h be an approximate solution
- a posteriori error estimate

$$\|u - u_h\| \leq C \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h)^2 \right\}^{1/2}$$

- local efficiency

$$\forall T \in \mathcal{T}_h, \quad \eta_T(u_h) \leq C_{\text{eff}*} \|u - u_h\|_{\mathcal{T}_T}$$

- can be used to drive mesh adaptivity, but not to deliver actual error bounds if C is unknown

What properties should be fulfilled?

- **guaranteed upper bound**

- $\|u - u_h\| \leq \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h)^2 \right\}^{1/2}$
- no unknown constant

- **robustness in local efficiency**

- $\eta_T(u_h) \leq C_{\text{eff}^*} \|u - u_h\|_{\mathcal{T}_T}$
- C_{eff^*} independent of model data

- **asymptotic exactness**

- $\left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_T(u_h)^2 \right\}^{1/2} \leq C_{\text{eff}} \|u - u_h\|$
- $C_{\text{eff}} \rightarrow 1$ with computational effort

Literature overview

A posteriori error estimates

- Babuška & Rheinboldt '78: introduction
- Ladevèze & Leguillon '83: equilibrated fluxes for elasticity
- Zienkiewicz & Zhu '87: gradient reconstruction
- Verfürth '96: residual-based estimates
- Ainsworth & Oden '00: equilibrated residuals
- Repin '01: functional estimates
- Luce & Wohlmuth '04: equilibrated fluxes for mixed FE
- Vohralík '06: equilibrated fluxes for FV and mixed FE

Equilibrated fluxes for DG

- previous work restricted to pure diffusion
- reconstruction of interface fluxes
 - Ainsworth '07
- reconstruction of conservative (i.e. $\mathbf{H}(\text{div})$) diffusive flux from discrete solution
 - Kim '07, Cochez-Dhondt & Nicaise '08
 - numerical experiments [Lazarov, Repin & Tomar '08]
- present work [AE, Stephansen & Vohralík '08]
 - heterogeneous, anisotropic diffusion
 - nonconforming meshes
 - singular regimes resulting from dominant advection or reaction

Outline

- Pure diffusion
- ADR: semi-robust estimates
- ADR: robust estimates
- Numerical results

Pure diffusion

- Model problem: $-\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) = f$
- Energy (semi)norm: $\|v\|^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_T^2$ with

$$\|v\|_T^2 := \|\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \nabla v\|_T^2$$

- set $\mathcal{S} = \{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\| = 1\}$

Abstract estimate I

- There holds

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &\leq \inf_{s \in H_0^1(\Omega)} \|u_h - s\|^2 \\ &\quad + \inf_{\mathbf{t} \in \mathbf{H}(\text{div})} \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} ((f - \nabla \cdot \mathbf{t}, \varphi) - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}, \nabla \varphi))^2 \\ &\leq 2 \|u - u_h\|^2 \end{aligned}$$

- Guaranteed, globally robust, (almost) asymptotically exact, but not practically computable

Abstract estimate II

- Proof of upper bound (Kim '07)
 - Riesz projection of discrete solution u_h onto $H_0^1(\Omega)$

$$B(\psi, v) = B(u_h, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

whence it readily follows by Pythagoras

$$\|u - u_h\|^2 = \|u_h - \psi\|^2 + \|u - \psi\|^2$$

since $B(v, v) = \|v\|^2$

Abstract estimate III

- Observe that

$$\|u_h - \psi\|^2 = \inf_{s \in H_0^1(\Omega)} \|u_h - s\|^2$$

and that

$$\|u - \psi\|^2 = B(u - \psi, u - \psi) = B(u - u_h, u - \psi)$$

so that

$$\|u - \psi\|^2 = B\left(u - u_h, \frac{u - \psi}{\|u - \psi\|}\right)^2 \leq \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} B(u - u_h, \varphi)^2$$

Abstract estimate IV

■ Proof of upper bound (ctn'd)

- To conclude, observe that for all
- $\mathbf{t} \in \mathbf{H}(\text{div})$
- and
- $\varphi \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} B(u - u_h, \varphi) &= (f, \varphi) - (\mathbf{K} \nabla_h u_h, \nabla \varphi) \\ &= (f, \varphi) + (\mathbf{t}, \nabla \varphi) - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}, \nabla \varphi) \\ &= (f - \nabla \cdot \mathbf{t}, \varphi) - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}, \nabla \varphi) \end{aligned}$$

■ Proof of lower bound

-
- $s = u \in H_0^1(\Omega)$
- and
- $\mathbf{t} = -\mathbf{K} \nabla u \in \mathbf{H}(\text{div})$

Locally computable estimate I

- Particular $s_h \in H_0^1(\Omega)$ and $\mathbf{t}_h \in \mathbf{H}(\text{div})$ need to be chosen
- s_h : **Oswald interpolate** of u_h
 - prescribed at suitable Lagrange nodes by arithmetic averages

$$\mathcal{I}_{\text{Os}}(u_h)(V) = \frac{1}{\#(\mathcal{T}_V)} \sum_{T \in \mathcal{T}_V} u_h|_T(V)$$

- diffusivity-weighted averages (Ainsworth '05)
- \mathbf{t}_h : **new $\mathbf{H}(\text{div})$ -flux reconstruction**
 - AE, Nicaise & Vohralík, CRAS '07 (conforming meshes)
 - AE, Stephansen & Vohralík, '08 (nonconforming meshes)

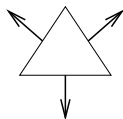
Locally computable estimate II

H(div)-flux reconstruction for DG

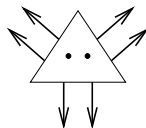
- Previous work by Bastian & Rivière '03
 - cheap (local) reconstruction
 - use neighboring values of $-\mathbf{K}\nabla u_h$ but not DG scheme
 - projection onto Brezzi–Douglas–Marini FE space
 - L^2 -norm estimate
- Present work
 - cheap (local) reconstruction
 - use DG scheme explicitly
 - projection onto Raviart–Thomas FE space
 - **H**(div)-norm estimate
 - can be used for many DG schemes (not only SWIP)

Locally computable estimate III

- Raviart–Thomas FE spaces of degree l : \mathbf{RT}_h^l



$l = 0$



$l = 1$

- Construction of $\mathbf{t}_h \in \mathbf{RT}_h^l$ ($l = p$ or $p - 1$)

- dof's for normal component on each face: $\forall q_h \in \mathbb{P}_l(F)$,

$$(\mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_F, q_h)_F = (-\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h u_h \} \omega + \gamma_F \llbracket u_h \rrbracket, q_h)_F$$

- dof's in each element: $\forall \mathbf{r}_h \in \mathbb{P}_{l-1}^d(T)$,

$$(\mathbf{t}_h, \mathbf{r}_h)_T = -(\mathbf{K} \nabla u_h, \mathbf{r}_h)_T + \sum_{F \subset \partial T} \omega_{T,F} (\mathbf{n}_F^t \mathbf{K} \mathbf{r}_h, \llbracket u_h \rrbracket)_F$$

Locally computable estimate IV

- Π_h^l ($l \geq 0$): L^2 -orthogonal projection onto DP_h^l
- Key property: $\nabla \cdot \mathbf{t}_h = \Pi_h^l f$
 - let $T \in \mathcal{T}_h$ and let $\xi \in \mathbb{P}_l(T)$,

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{t}_h, \xi)_T &= (\mathbf{t}_h, \nabla \xi)_T + \sum_{F \subset \partial T} (\mathbf{n}_T \cdot \mathbf{t}_h, \xi)_F \\ &= B_h(u_h, \xi \mathbf{1}_T) \\ &= (f, \xi)_T \end{aligned}$$

Locally computable estimate V

- Basic estimate yields

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &\leq \|u_h - s_h\|^2 + \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} ((f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h, \varphi) - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}_h, \nabla \varphi))^2 \\ &= \|u_h - s_h\|^2 + \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} ((f - \Pi_h^l f, \varphi - \Pi_h^0 \varphi) - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}_h, \nabla \varphi))^2 \end{aligned}$$

- (Important notation) $C_{\mathbf{K}, T}$ ($c_{\mathbf{K}, T}$) max (min) eigenvalue of \mathbf{K} on T
- Poincaré inequality

$$\begin{aligned} \|\varphi - \Pi_h^0 \varphi\|_T^2 &\leq C_P h_T \|\nabla \varphi\|_T^2 \quad (\text{with } C_P = 1/\pi^2) \\ &\leq C_P \frac{h_T^2}{c_{\mathbf{K}, T}} \|\varphi\|_T^2 \\ &:= m_{\mathbf{K}, T}^2 \|\varphi\|_T^2 \end{aligned}$$

Locally computable estimate VI

- There holds

$$\|u - u_h\| \leq \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{\text{NC},T}^2 + (\eta_{\text{R},T} + \eta_{\text{DF},T})^2 \right\}^{1/2}$$

with

$$\eta_{\text{NC},T} := \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}(u_h)\|_T \quad (\text{nonconformity})$$

$$\eta_{\text{R},T} := m_{\mathbf{K},T} \|f - \Pi'_h f\|_T \quad (\text{residual})$$

$$\eta_{\text{DF},T} := \|\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \nabla u_h + \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_h\|_T \quad (\text{diffusion flux})$$

- valid for arbitrary meshes (even anisotropic), polynomial degree and data (in $L^2(\Omega)$)

Locally computable estimate VII

Residual-based estimate for Laplacian

- Becker, Hansbo & Larson '03, Karakashian & Pascal '03

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|^2 &\leq C_1 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T^2 \|f + \Delta u_h\|_T^2 && \text{(elt. residual)} \\ &+ C_2 \sum_{F \in \mathcal{F}_h^i} h_F \|\mathbf{n} \cdot [\nabla u_h]\|_F^2 && \text{(flux nonconf.)} \\ &+ C_3 \sum_{F \in \mathcal{F}_h} h_F^{-1} \|[u_h]\|_F^2 && \text{(sol. nonconf.)} \end{aligned}$$

- C_1 , C_2 and C_3 remain undetermined
- for pcw. linears, $\Delta u_h = 0$: $h_T \|f\|_T$ as residual estimator is not sharp enough for DG
- present estimate is a **lower bound** for residual-based estimate

Local efficiency I

- Residual estimator $\eta_{R,T}$ **superconverges**
- Diffusion flux estimator $\eta_{DF,T}$
 - bounds on solution and gradient jumps [AE & Stephansen '08]
 - weights $\omega_{T,F}$ play a key role in the analysis

$$\eta_{DF,T} \leq C \frac{C_{K,T}^{1/2}}{C_{K,T}^{1/2}} \left(\|u - u_h\|_{*,\mathcal{F}_T} + \sum_{T' \in \mathcal{I}_T} \frac{C_{K,T'}^{1/2}}{C_{K,T'}^{1/2}} \|u - u_h\|_{T'} \right)$$

with DG jump seminorm $\|v\|_{*,\mathcal{F}}^2 = \sum_{F \in \mathcal{F}} \|\gamma_F^{1/2} [v]\|_F^2$ and

$$\mathcal{F}_T = \{F \in \mathcal{F}_h; F \subset \partial T\} \quad \mathcal{I}_T = \{T' \in \mathcal{I}_h; \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_{T'} \neq \emptyset\}$$

- robust w.r.t. heterogeneities
- anisotropies remain local

Local efficiency II

- Nonconformity estimator $\eta_{\text{NC},T}$
 - standard approximation result for Oswald interpolate

$$\eta_{\text{NC},T} \leq C \frac{C_{\mathbf{K},T}^{1/2}}{C_{\mathbf{K},\mathfrak{T}_T}^{1/2}} \|u - u_h\|_{*,\mathfrak{T}_T}$$

with

$$\mathfrak{F}_T = \{F \in \mathcal{F}_h; F \cap \partial T \neq \emptyset\} \quad \mathfrak{T}_T = \{T' \in \mathcal{T}_h; T \cap T' \neq \emptyset\}$$

- with “monotonicity around vertices” assumption (Bernardi & Verfürth '00) and a weighted Oswald interpolate (Ainsworth '05), $\eta_{\text{NC},T}$ can be made robust w.r.t. heterogeneities in isotropic case
- the DG jump seminorm is controlled by the error energy norm for $d = 2$, $p = 1$ and $\mathbf{K} = Id$ (Ainsworth '07)

ADR: semi-robust estimates

- **Model problem:** $-\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u) + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f$
- Recall that $c_{\beta, \mu, T} := \min_T (\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta) \geq 0$
- Energy (semi)norm $\|v\|_T^2 = \|\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \nabla v\|_T^2 + \|(\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta)^{\frac{1}{2}} v\|_T^2$
 - $\|v\|^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_T^2$
 - set $\mathcal{S} = \{\varphi \in H_0^1(\Omega), \|\varphi\| = 1\}$
- **Semi-robustness:** cutoff functions of local Péclet and Damköhler numbers [Verfürth '98]

$$h_T \|\beta\|_{\infty, T} c_{\mathbf{K}, T}^{-1} \quad \text{and} \quad h_T^2 c_{\beta, \mu, T} c_{\mathbf{K}, T}^{-1}$$

Abstract estimate I

- Decomposition of bilinear form B into $B = B_S + B_A$ with

$$B_S(u, v) := (\mathbf{K} \nabla_h u, \nabla_h v) + ((\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta) u, v),$$
$$B_A(u, v) := (\beta \cdot \nabla_h u + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta) u, v)$$

- B_S is symmetric and $B_S(v, v) = \|v\|^2$ on broken Sobolev space $H^1(\mathcal{T}_h)$
- B_A is skew-symmetric on $H_0^1(\Omega)$

Abstract estimate II

- Abstract framework [Vohralík '07, AE & Stephansen '08]

$$\|u - u_h\| \leq \inf_{s \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|u_h - s\| + \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} \{ B(u - u_h, \varphi) + B_A(u_h - s, \varphi) \} \right\}$$

- Compared to pure diffusion case,
 - triangular (and not Pythagorean) inequality
 - additional contribution from B_A

Abstract estimate III

- Introducing arbitrary $(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbf{H}(\text{div}) \times \mathbf{H}(\text{div})$ and rearranging yields

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq \inf_{s \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|u_h - s\| \right. \\ &\quad + \inf_{(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbf{H}(\text{div})^2} \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} \left\{ (f - \nabla \cdot \mathbf{t} - \nabla \cdot \mathbf{q} - (\mu - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta})u_h, \varphi) \right. \\ &\quad - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}, \nabla \varphi) - \left(\frac{1}{2} (\nabla \cdot \boldsymbol{\beta})(u_h - s), \varphi \right) \\ &\quad \left. \left. + (\nabla \cdot (\mathbf{q} - \boldsymbol{\beta}s), \varphi) \right\} \right\} \\ &\leq 2 \|u - u_h\| \end{aligned}$$

- Guaranteed, globally robust, (almost) asymptotically exact, but not practically computable

Locally computable estimate I

- Particular $s_h \in H_0^1(\Omega)$ and $(\mathbf{t}_h, \mathbf{q}_h) \in \mathbf{H}(\text{div}) \times \mathbf{H}(\text{div})$ need to be chosen
- s_h : Oswald interpolate of u_h
- \mathbf{t}_h : previous diffusive flux reconstruction
 - dof's for normal component on each face: $\forall q_h \in \mathbb{P}_1(F)$,

$$(\mathbf{t}_h \cdot \mathbf{n}_F, q_h)_F = (-\mathbf{n}_F^t \{ \mathbf{K} \nabla_h u_h \} \omega + \gamma_{\mathbf{K}, F} [u_h], q_h)_F$$

- dof's in each element: $\forall \mathbf{r}_h \in \mathbb{P}_{l-1}^d(T)$,

$$(\mathbf{t}_h, \mathbf{r}_h)_T = -(\mathbf{K} \nabla u_h, \mathbf{r}_h)_T + \sum_{F \subset \partial T} \omega_{T, F} (\mathbf{n}_F^t \mathbf{K} \mathbf{r}_h, [u_h])_F$$

Locally computable estimate II

- \mathbf{q}_h : advective flux reconstruction in \mathbf{RT}_h^l ($l = p$ or $p - 1$)
 - dof's for normal component on each face: $\forall q_h \in \mathbb{P}_l(F)$,

$$(\mathbf{q}_h \cdot \mathbf{n}_F, q_h)_F = (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n}_F \{ \{ u_h \} \} + \gamma_{\boldsymbol{\beta}, F} [[u_h]], q_h)_F$$

- dof's in each element: $\forall \mathbf{r}_h \in \mathbb{P}_{l-1}^d(T)$,

$$(\mathbf{q}_h, \mathbf{r}_h)_T = (u_h, \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{r}_h)_T$$

- Key property: for all $T \in \mathcal{T}_h$ and all $\xi \in \mathbb{P}_l(T)$,

$$(\nabla \cdot \mathbf{t}_h + \nabla \cdot \mathbf{q}_h + (\mu - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta}) u_h, \xi)_T = (f, \xi)_T$$

Locally computable estimate III

- Abstract estimate yields

$$\|u - u_h\| \leq \|u_h - s_h\| + \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} R_h(u_h, s_h, \mathbf{t}_h, \mathbf{q}_h; \varphi)$$

where

$$\begin{aligned} R_h(u_h, s_h, \mathbf{t}_h, \mathbf{q}_h; \varphi) &= (f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h - \nabla \cdot \mathbf{q}_h - (\mu - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta})u_h, \varphi) \\ &\quad - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}_h, \nabla \varphi) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta})(u_h - s_h), \varphi\right) \\ &\quad + (\nabla \cdot (\mathbf{q}_h - \boldsymbol{\beta} s_h), \varphi) \end{aligned}$$

whence

Locally computable estimate IV

$$\begin{aligned}
 R_h(u_h, s_h, \mathbf{t}_h, \mathbf{q}_h; \varphi) &= (f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h - \nabla \cdot \mathbf{q}_h - (\mu - \nabla \cdot \boldsymbol{\beta})u_h, \varphi - \Pi_h^0 \varphi) \\
 &\quad - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}_h, \nabla \varphi) \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2}(\nabla \cdot \boldsymbol{\beta})(u_h - s_h), \varphi\right) \\
 &\quad + (\nabla \cdot (\mathbf{q}_h - \boldsymbol{\beta} s_h), \varphi - \Pi_h^0 \varphi) \\
 &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} ((\mathbf{q}_h - \boldsymbol{\beta} s_h) \cdot \mathbf{n}_T, \Pi_h^0 \varphi)_F \\
 &:= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5
 \end{aligned}$$

Locally computable estimate V

- Observe that $\|\varphi - \Pi_h^0 \varphi\|_T \leq m_T \|\varphi\|_T$ with cutoff function

$$m_T^2 := \min\{C_P h_T^2 c_{K,T}^{-1}, c_{\beta,\mu,T}^{-1}\}$$

whence

$$\begin{aligned} T_1 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h - \nabla \cdot \mathbf{q}_h - (\mu - \nabla \cdot \beta) u_h, \varphi - \Pi_h^0 \varphi)_T \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{m_T \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h - \nabla \cdot \mathbf{q}_h - (\mu - \nabla \cdot \beta) u_h\|_T}_{\eta_{R,T}} \|\varphi\|_T \end{aligned}$$

Locally computable estimate VI

- Similarly,

$$\begin{aligned} T_4 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\nabla \cdot (\mathbf{q}_h - \beta s_h), \varphi - \Pi_h^0 \varphi)_T \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{m_T \| (Id - \Pi_h^0)(\nabla \cdot (\mathbf{q}_h - \beta s_h)) \|_T}_{\eta_{C,1,T}} \|\varphi\|_T \end{aligned}$$

and

$$T_3 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{c_{\beta,\mu,T}^{-1/2} \left\| \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta)(u_h - s_h) \right\|_T}_{\eta_{C,2,T}} \|\varphi\|_T$$

Locally computable estimate VII

- Generalized Friedrichs inequality [Vohralík '05]

$$\|\varphi - \Pi_{0,F}\varphi\|_T^2 \leq C_{F,T,F} h_T^2 \|\nabla\varphi\|_T^2$$

with $C_{F,T,F} = 3d$ on simplices

- As a result [Vohralík '08]

$$\|[\Pi_h^0\varphi]\|_F \leq m_F \sum_{T \in \mathcal{T}_F} \|\varphi\|_T$$

with cutoff function

$$m_F^2 := \min \left\{ \max_{T \in \mathcal{T}_F} \left\{ C_{F,T,F} \frac{|F| h_T^2}{|T| c_{K,T}} \right\}, \max_{T \in \mathcal{T}_F} \left\{ \frac{|F|}{|T| c_{\beta,\mu,T}} \right\} \right\}$$

Locally computable estimate VIII

- Using the fact that the normal component of $\mathbf{q}_h - \beta s_h$ is **continuous** across interfaces yields

$$\begin{aligned} T_5 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} ((\mathbf{q}_h - \beta s_h) \cdot \mathbf{n}_T, \Pi_h^0 \varphi)_F \\ &\leq \underbrace{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} m_F \|\Pi_{0,F}((\mathbf{q}_h - \beta s_h) \cdot \mathbf{n}_F)\|_F \|\varphi\|_T}_{\eta_{U,T}} \end{aligned}$$

Locally computable estimate IX

- Trace inequality [Stephansen '07, Carstensen & Funken '00]

$$\|\varphi\|_F^2 \leq C_{t,T,F}(h_T^{-1}\|\varphi\|_T^2 + \|\varphi\|_T\|\nabla\varphi\|_T)$$

with $C_{t,T,F} = |F|h_T/|T|$ on simplices

- As a result [Cheddadi, Fučík, Prieto & Vohralík '08]

$$\|\varphi - \Pi_h^0\varphi\|_F \leq C_{t,T,F}^{1/2}\tilde{m}_T^{1/2}\|\varphi\|_T$$

with cutoff function

$$\tilde{m}_T := \min\{(C_P + C_P^{1/2})h_T c_{K,T}^{-1}, h_T^{-1}c_{\beta,\mu,T}^{-1} + c_{\beta,\mu,T}^{-1/2}c_{K,T}^{-1/2}/2\}$$

Locally computable estimate X

- T_2 can be either simply bounded as

$$T_2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\|\mathbf{K}^{\frac{1}{2}} \nabla u_h + \mathbf{K}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{t}_h\|_T}_{\eta_{\text{DF},T}^{(1)}} \|\varphi\|_T$$

or, after IPP, as $T_2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{\text{DF},T}^{(2)} \|\varphi\|_T$ with

$$\begin{aligned} \eta_{\text{DF},T}^{(2)} &:= m_T \|(Id - \Pi_h^0)(\nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla u_h + \mathbf{t}_h))\|_T \\ &\quad + \tilde{m}_T^{1/2} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} C_{t,T,F}^{1/2} \|(\mathbf{K} \nabla u_h + \mathbf{t}_h) \cdot \mathbf{n}_F\|_F \end{aligned}$$

Locally computable estimate XI

- This yields

$$T_2 \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\min \left\{ \eta_{DF,T}^{(1)}, \eta_{DF,T}^{(2)} \right\}}_{\eta_{DF,T}} \|\varphi\|_T$$

- $\eta_{DF,T}^{(1)}$ alone cannot be shown to be semi-robust [Verfürth '08]
- the idea of defining $\eta_{DF,T}$ using a min has been recently proposed in [Cheddadi, Fučík, Prieto & Vohralík '08] in the context of conforming FEM and reaction–diffusion problems

Locally computable estimate XII

- Final result: $\|u - u_h\| \leq \eta$ with

$$\eta := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \eta_{\text{NC},T}^2 \right\}^{1/2} + \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\eta_{\text{R},T} + \eta_{\text{DF},T} + \eta_{\text{C},1,T} + \eta_{\text{C},2,T} + \eta_{\text{U},T})^2 \right\}^{1/2}$$

$$\eta_{\text{NC},T} := \|u_h - \mathcal{I}_{\text{Os}}(u_h)\|_T \quad (\text{sol. nonconf.})$$

$$\eta_{\text{R},T} := m_T \|f - \nabla \cdot \mathbf{t}_h - \nabla \cdot \mathbf{q}_h - (\mu - \nabla \cdot \beta) u_h\|_T \quad (\text{residual})$$

$$\eta_{\text{DF},T} := \min \left\{ \eta_{\text{DF},T}^{(1)}, \eta_{\text{DF},T}^{(2)} \right\} \quad (\text{diffusion})$$

$$\eta_{\text{C},1,T} := m_T \|(Id - \Pi_h^0)(\nabla \cdot (\mathbf{q}_h - \beta s_h))\|_T \quad (\text{convection})$$

$$\eta_{\text{C},2,T} := c_{\beta,\mu,T}^{-1/2} \left\| \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta)(u_h - s_h) \right\|_T \quad (\text{convection})$$

$$\eta_{\text{U},T} := \sum_{F \in \mathcal{F}_T} m_F \|\Pi_{0,F}((\mathbf{q}_h - \beta s_h) \cdot \mathbf{n}_F)\|_F \quad (\text{upwinding})$$

Locally computable estimate XIII

- Guaranteed upper bound with only known constants
- Valid for arbitrary polynomial degree and data
- Cutoff functions of Péclet and Damköhler numbers (explicit geometric parameters related to mesh regularity enter some of these functions)
- $\eta_{R,T}$ represents a higher-order term
- Extension to nonmatching meshes [AE, Stephansen & Vohralík '08]

Local efficiency I

- Residual estimator $\eta_{R,T}$ **superconverges**
- Diffusion flux estimator $\eta_{DF,T}$
 - it suffices to bound $\eta_{DF,T}^{(2)}$ yielding

$$\eta_{DF,T} \leq C \rho_{2,T} + C \frac{C_{K,T}^{1/2}}{c_{K,T}^{1/2}} \|u - u_h\|_{*,\mathcal{F}_T}$$

with gradient-jump residual-based estimator

$$\rho_{2,T} := m_T^{1/2} c_{K,T}^{-1/4} \sum_{F \in \mathcal{F}_T} \bar{\omega}_{T,F} \|\mathbf{n}_F \cdot [\mathbf{K} \nabla u_h]\|_F$$

shown to be semi-robust in [AE & Stephansen '08]

- weight $\bar{\omega}_{T,F} = 1 - \omega_{T,F}$ important for robustness w.r.t. diffusion heterogeneities

Local efficiency II

- Bounds on the estimators involving s_h

$$\eta_{\text{NC},T} \leq C \left(\frac{C_{\mathbf{K},T}^{1/2}}{c_{\mathbf{K},\mathfrak{T}_T}^{1/2}} + \left\| \mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} \right\|_{\infty,T}^{1/2} \chi_{\mathfrak{T}_T} \right) \|u - u_h\|_{*,\mathfrak{T}_T},$$

$$\eta_{\text{C},2,T} \leq C \left\| \frac{1}{2} \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} \right\|_{\infty,T} c_{\boldsymbol{\beta},\mu,T}^{-1/2} \chi_{\mathfrak{T}_T} \|u - u_h\|_{*,\mathfrak{T}_T},$$

$$\eta_{\text{U},T} \leq C m_{\mathcal{T}_T} h_T^{-1} \|\boldsymbol{\beta}\|_{\infty,T} \chi_{\mathfrak{T}_T} \|u - u_h\|_{*,\mathfrak{T}_T},$$

$$\eta_{\text{C},1,T} \leq C m_{\mathcal{T}_T} h_T^{-1} \|\boldsymbol{\beta}\|_{\infty,T} \chi_{\mathfrak{T}_T} \|u - u_h\|_{*,\mathfrak{T}_T},$$

with cutoff functions

$$\chi_{\mathfrak{T}_T} := \min(h_T c_{\mathbf{K},\mathfrak{T}_T}^{-1/2}, h_T^{1/2} c_{\boldsymbol{\beta},\mathfrak{T}_T}^{-1/2}), \quad m_{\mathcal{T}_T} := \min(h_T c_{\mathbf{K},\mathcal{T}_T}^{-1/2}, c_{\boldsymbol{\beta},\mu,\mathcal{T}_T}^{-1/2})$$

ADR: robust estimates

- Recall that

$$B_S(u, v) := (\mathbf{K} \nabla_h u, \nabla_h v) + ((\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta) u, v),$$

$$B_A(u, v) := (\beta \cdot \nabla_h u + \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta) u, v)$$

- Define

$$B_D(u, v) := - \sum_{F \in \mathcal{F}_h} (\beta \cdot \mathbf{n}_F \llbracket u \rrbracket, \{\{\Pi_h^0 v\}\})_F$$

- Introduce the augmented norm

$$\|v\|_{\oplus} := \|v\| + \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} \{B_A(v, \varphi) + B_D(v, \varphi)\}$$

- when $\|\nabla \cdot \beta\|_{\infty, \mathcal{T}}$ is controlled by $c_{\beta, \mu, \mathcal{T}}$, recover the augmented norm introduced in [Verfürth '05] for stabilized conforming FEM
- the B_D contribution is **new and specific to the DG setting**

Abstract estimate

- There holds

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\oplus} &\leq 2 \inf_{s \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \|u_h - s\| + \inf_{(\mathbf{t}, \mathbf{q}) \in \mathbf{H}(\text{div})^2} \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} R_h(u_h, s, \mathbf{t}, \mathbf{q}; \varphi) \right\} \\ &\quad + \inf_{\mathbf{t} \in \mathbf{H}(\text{div})} \sup_{\varphi \in \mathcal{S}} \left\{ (f - \nabla \cdot \mathbf{t} - \beta \cdot \nabla_h u_h - \mu u_h, \varphi) \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{K} \nabla_h u_h + \mathbf{t}, \nabla \varphi) - B_D(u_h, \varphi) \right\} \\ &\leq 5 \|u - u_h\|_{\oplus} \end{aligned}$$

- only the terms in red are new
- their form is similar to that for the $\|\cdot\|$ -norm estimate

Locally computable estimate

- There holds

$$\|u - u_h\|_{\oplus} \leq \tilde{\eta} := 2\eta + \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\eta_{R,T} + \eta_{DF,T} + \tilde{\eta}_{C,1,T} + \tilde{\eta}_{U,T})^2 \right\}^{1/2}$$

where η has been defined previously and

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_{C,1,T} &:= m_T \|(Id - \Pi_h^0)(\nabla \cdot (\mathbf{q}_h - \beta u_h))\|_T \\ \tilde{\eta}_{U,T} &:= \sum_{F \in \mathcal{F}_T} m_F \|\Pi_{0,F}(\gamma_{\beta,F}[\mathbf{u}_h])\|_F \end{aligned}$$

- the term $B_D(u_h, \varphi)$ is important so that $\tilde{\eta}_{U,T}$ has its present (optimal) form with cutoff factor m_F

Global efficiency I

- Define the global jump seminorm

$$\|v\|_{\#, \mathcal{F}_h}^2 := \sum_{T \in \mathcal{T}_h; F \in \mathfrak{F}_T} \frac{1}{\#(\mathfrak{F}_F)} \left\{ \frac{C_{K,T}}{C_{K,\mathfrak{F}_T}} \gamma_{K,F} h_F^{-1} \| [v] \|_F^2 + c_{\beta,\mu,T} h_F \| [v] \|_F^2 + m_{\mathcal{T}_T}^2 \| \beta \|_{\infty, \mathcal{T}_T}^2 h_F^{-1} \| [v] \|_{\mathcal{F}_F \cap \mathfrak{F}_T}^2 \right\}$$

- the first two terms are natural for DG methods
- the term in red is not, but at least contains the cutoff factor $m_{\mathcal{T}_T}$
- $\| \cdot \|_{\#, \mathcal{F}_h}$ is similar to jump seminorm introduced in [Schötzau & Zhu '08], but without the cutoff factor

Global efficiency II

- There holds

$$\tilde{\eta} \leq \tilde{C} (\|u - u_h\|_{\oplus} + \|u - u_h\|_{\#, \mathcal{F}_h})$$

- \tilde{C} can depend on the ratios

$$C_{K,T}/c_{K,T} \quad \text{and} \quad (\|\mu\|_{\infty,T} + \|\frac{1}{2}\nabla \cdot \beta\|_{\infty,T})/c_{\beta,\mu,T}$$

for all $T \in \mathcal{T}_h$ and the ratios

$$c_{\beta,\mu,T}/c_{\beta,\mu,T'}$$

for all $T, T' \in \mathcal{T}_h$ sharing a face

Global efficiency III

- As a result,

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{\oplus} + \|u - u_h\|_{\#, \mathcal{F}_h} &\leq \tilde{\eta} + \|u_h\|_{\#, \mathcal{F}_h} \\ &\leq \tilde{C}(\|u - u_h\|_{\oplus} + \|u - u_h\|_{\#, \mathcal{F}_h}) \end{aligned}$$

- fully robust result for DG methods applied to ADR
- sharper than [Schötzau & Zhu '08] because of cutoff factor in jump seminorm
- yet, not fully satisfactory since a priori estimates for the jump seminorm are not established

Numerical results

- Pure diffusion
- ADR (energy norm estimates)

Pure diffusion I

- Smooth solution in the unit square
- $u(x, y) = \cos(0.5\pi x) \cos(0.5\pi y)$, $\mathbf{K} = Id$ and suitable f
- $\rho = 1$, unstructured meshes

N	$\ u - u_h\ $	$l = 0$				$l = 1$		
		η_{NC}	η_R	η_{DF}	eff.	η_R	η_{DF}	eff.
112	3.16e-1	1.25e-1	7.01e-2	3.60e-1	1.2	5.13e-3	3.58e-1	1.2
448	1.58e-1	6.85e-2	1.76e-2	1.82e-1	1.2	6.90e-4	2.22e-1	1.5
1792	7.88e-2	3.53e-2	4.40e-3	9.10e-2	1.2	8.05e-5	9.43e-2	1.3
7168	3.93e-2	1.77e-2	1.10e-3	4.55e-2	1.2	1.01e-5	4.76e-2	1.3
order	1.1	1.1	2.1	1.1	-	3.2	1.1	-

- η_R sharper for $l = 1$, η_{DF} similar in both cases

Pure diffusion II

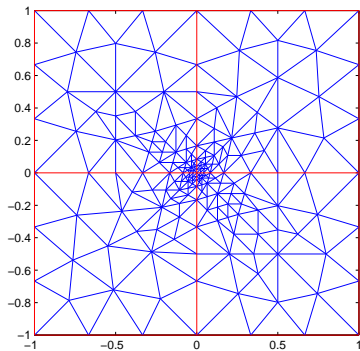
- Singular solution
- Unit square divided into 4 subdomains, $f = 0$
- Heterogeneity ratio $\alpha = 100$, $u \in H^{1.127}(\Omega)$
- $p = 1$, unstructured meshes

N	$\ u - u_h\ $	η_{NC}	$l = 0$		$l = 1$	
			η_{DF}	eff.	η_{DF}	eff.
112	3.27	11.8	2.39	3.7	1.89	3.7
448	3.11	11.3	2.33	3.7	1.84	3.7
1792	2.93	10.8	2.23	3.8	1.77	3.7
7168	2.75	10.3	2.12	3.8	1.68	3.8
order	0.09	0.08	0.08	-	0.07	-

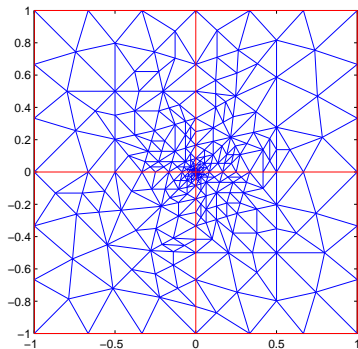
- $\eta_R = 0$ in both cases, η_{DF} slightly sharper for $l = 1$
- η_{NC} dominates

Pure diffusion III

■ Adaptive meshes for singular solution



342 elements



494 elements

ADR I

- $\Omega = \{0 < x, y < 1\}$, $\mu = 1$, $\beta = (1, 0)^t$, $\mathbf{K} = 10^{-4}Id$
- Analytical solution with internal layer

$$u = \frac{1}{2}x(x-1)y(y-1)(1 - \tanh(10 - 20x))$$

- Energy norm estimates (semi-robust setting)
- $p = 1$, structured meshes

N	$\ u - u_h\ $	η_{NC}	eff. $l = 0$	eff. $l = 1$
128	1.72e-3	2.73e-3	80	89
512	5.68e-4	6.74e-4	124	128
2048	2.14e-4	1.66e-4	145	152
8192	1.00e-4	6.78e-5	126	127
order	1.1	1.3	-	-

ADR II

N	$l = 0$			$l = 1$			
	η_R	$\eta_{DF}^{(1)}$	η_U	η_R	$\eta_{DF}^{(1)}$	η_U	$\eta_{C,1}$
128	6.84e-2	1.06e-3	6.98e-2	1.92e-2	1.03e-3	6.98e-2	6.55e-2
512	3.41e-2	6.20e-4	3.60e-2	3.44e-3	5.71e-4	3.60e-2	3.38e-2
2048	1.63e-2	3.23e-4	1.47e-2	2.01e-3	2.86e-4	1.60e-2	1.46e-2
8192	5.80e-3	1.60e-4	6.70e-3	3.66e-4	1.45e-4	6.70e-3	5.68e-3
order	1.5	1.0	1.1	2.5	1.0	1.1	1.5

- η_R converges faster for $l = 1$ than for $l = 0$
- $\eta_{DF}^{(1)}$ takes small values in both cases
- $\eta_{C,2} = 0$ since $\nabla \cdot \beta = 0$
- η_U and $\eta_{C,1}$ dominate ($\eta_{C,1} = 0$ for $l = 0$)
- little gain when going from $l = 0$ to $l = 1$