

# L'analyse a posteriori et ses applications

**Christine Bernardi**

Laboratoire Jacques-Louis Lions

C.N.R.S. et Université Pierre et Marie Curie

L'analyse a posteriori est en quelques années devenue l'outil de base pour l'adaptation automatique de maillages en éléments et volumes finis. Toutefois elle a bien d'autres applications.

## À propos des estimations a posteriori

Soit  $X$  un espace de Banach, et  $A$  une application continue de  $X$  dans  $X$ .  
Pour un élément  $f$  de  $X$ , on s'intéresse à la discrétisation de l'équation :

Trouver  $u$  dans  $X$  tel que

$$A(u) = f.$$

$\delta$  : paramètre positif

On considère le problème :

Trouver  $u_\delta$  dans  $X_\delta$  tel que

$$A_\delta(u_\delta) = f_\delta,$$

où  $X_\delta$  est un sous-espace de dimension finie de  $X$ ,  $A_\delta$  une approximation de  $A$  et  $f_\delta$  une approximation de  $f$  dans  $X_\delta$ .

## Estimations a priori

$$\|u - u_\delta\|_X \leq F(\delta, u) + H(\delta, f).$$

La quantité  $F(\delta, u)$  est en général une puissance de  $\delta$  multipliée par une certaine norme de  $u$ , elle fait donc appel à la régularité de  $u$  **(la plupart du temps inconnue)**.

$\implies$  prouve la convergence de la méthode.

## Estimations a posteriori

$$\|u - u_\delta\|_X \leq G(\delta, f_\delta, u_\delta) + K(\delta, f).$$

La quantité  $G(\delta, f_\delta, u_\delta)$  peut se calculer explicitement une fois la solution discrète  $u_\delta$  calculée.

$\implies$  Permet de vérifier des critères de sécurité.

## Application de base : adaptation de maillages

$$\|u - u_\delta\|_X \leq G(\delta, f_\delta, u_\delta) + K(\delta, f).$$

Si l'on suppose que la quantité  $G(\delta, f_\delta, u_\delta)$  s'écrit  $c \left( \sum_k \eta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , où les  $\eta_k$  sont des quantités "locales" (liées à des sous-domaines de petites tailles), les  $\eta_k$  forment une famille d'**indicateurs d'erreur**.

**Critère d'optimalité** : Une famille d'indicateurs d'erreur  $(\eta_k)_k$  est optimale s'il existe des constantes  $c_1$  et  $c_2$  indépendantes de  $\delta$  telles que

$$\|u - u_\delta\|_X \leq c_1 \left( \sum_k \eta_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} + K_1(\delta, f),$$

$$\eta_k \leq c_2 \|u - u_\delta\|_{X_k} + K_2^k(\delta, f),$$

où  $X_k$  désigne l'espace des restrictions des fonctions de  $X$  à un domaine de petite taille.

Lorsque la famille d'indicateurs d'erreur est optimale, on peut penser que les  $\eta_k$  forment une bonne carte de l'erreur.

**Stratégie d'adaptation :**

$\bar{\eta}$  : moyenne des  $\eta_k$ .

Lorsque un des  $\eta_k$  est supérieur à  $\bar{\eta}$ , on raffine le maillage dans le sous-domaine correspondant à cet  $\eta_k$ .

Sous des hypothèses convenables et pour un maillage initial fixé, on peut prouver la convergence de la méthode.

**W. Dörfler**

**P. Binev, W. Dahmen, R. DeVore**

## Application à la discrétisation multi-étapes

Dans de nombreuses exemples de discrétisations d'équations aux dérivées partielles, un ou plusieurs problèmes intermédiaires (**non discrets**) interviennent entre le problème continu et le problème discret final.

**Problème initial** : Trouver  $u$  appartenant à  $X$  tel que  $A(u) = f$ .

**Problème intermédiaire** : Trouver  $u_\varepsilon$  appartenant à  $X$  tel que  $A_\varepsilon(u_\varepsilon) = f$ .

**Problème discret** : Trouver  $u_{\varepsilon\delta}$  appartenant à  $X_\delta$  tel que  $A_{\varepsilon\delta}(u_{\varepsilon\delta}) = f_\delta$ .

Des indicateurs d'erreur ne dépendant que de la solution discrète peuvent être construits pour chaque étape de la discrétisation.

Dans ce cas, le paramètre de discrétisation est souvent multiple. Le but est d'optimiser chacune de ses composantes, donc de découpler autant que possible l'erreur issue des différentes étapes (ce n'est pas toujours le cas pour les majorations a posteriori). Plusieurs familles d'indicateurs d'erreur sont nécessaires pour cela.

La notion d'estimation locale doit être abandonnée ou pour le moins modifiée dans certaines estimations. Mais l'optimisation des différents paramètres doit rester compatible avec l'adaptation de maillage et les indicateurs liés à la discrétisation par éléments finis doivent rester locaux.

- Équations paraboliques (ou hyperboliques simples)

Problème intermédiaire : problème semi-discret en temps

Paramètres de discrétisation : pas de temps et taille du maillage

- ★ Équation de la chaleur linéaire ou semi-linéaire

A. Bergam, C.B., Z. Mghazli

- ★ Équations de Stokes

C.B., R. Verfürth

- ★ Équation des ondes

C.B., E. Süli

- ★ Équations de Darcy instationnaire

C.B., V. Girault, K.R. Rajagopal

- Développement asymptotique

Problème intermédiaire : équations vérifiées par chaque coefficient du développement

Paramètres de discrétisation : ordre de troncature et taille du maillage

- ★ Problèmes de plaques et de coques

M. Dauge, E. Faou

- ★ Traitement de domaines tridimensionnels axisymétriques

Z. Belhachmi, C.B., S. Deparis, F. Hecht

- **Méthodes de stabilisation et de pénalisation**

**Problème intermédiaire : problème continu stabilisé**

**Paramètres de discrétisation : paramètre de stabilisation et taille du maillage**

- ★ **Le problème de Stokes pénalisé**

**C.B., V. Girault, F. Hecht**

- ★ **Un modèle régularisé de fluide de grade 2**

**M. Amara, C.B., V. Girault, F. Hecht**

- ★ **Un algorithme de décomposition de domaine**

**C.B., T. Chacón Rebollo, E. Chacón Vera, D. Franco Coronil**

- ★ **Le modèle de coque de Naghdi pénalisé**

**C.B., A. Blouza, F. Hecht, H. Le Dret**

- **Modélisation automatique**

**Problème intermédiaire : modèle réduit**

**Paramètres de discrétisation : géométrie de la décomposition suivant les modèles utilisés et taille du maillage**

- ★ **Analyse a posteriori dans un cadre abstrait**

**M. Braack, A. Ern**

- ★ **Réduction de dimension dans un estuaire**

**M. Amara, D. Capatina-Papaghiuc, D. Trujillo**

- ★ **Insertion automatique d'un modèle de turbulence**

**C.B., T. Chacón Rebollo, F. Hecht, R. Lewandowski**

## Plan du cours :

- **Indicateurs d'erreur et adaptation de maillage**
  - ★ Les estimations de base
  - ★ **Un exemple de discrétisation non conforme**
- **Indicateurs d'erreur en discrétisation multi-étapes**
  - ★ Optimisation de la pénalisation pour le problème de Stokes
  - ★ **Adaptation en temps et espace pour une équation parabolique**
  - ★ ...

## Principales restrictions et limitations :

- ★ Estimations en norme de l'énergie
  - ★ Indicateurs essentiellement de type résidu
    - ★ Discrétisations principalement par éléments finis
      - ★ Maillages isotropes

# Les estimations de base

- Indicateurs par résidu,
- Indicateurs par résidu et problèmes locaux,
- Extension au problème de Stokes.

Travail commun avec B. Métivet et R. Verfürth

## Indicateurs par résidu

Le problème modèle que l'on considère ici est l'équation de Laplace.

$\Omega$  : polygone ou polyèdre à frontière lipschitzienne.

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$  tel que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

où la forme  $a(\cdot, \cdot)$  est définie par

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, d\mathbf{x}.$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Le lemme de Lax-Milgram entraîne que

Le problème variationnel admet une solution unique  $u$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . En outre, cette solution vérifie

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{-1}(\Omega)},$$

où  $c$  est la constante de Poincaré–Friedrichs, donc ne dépend que de la géométrie de  $\Omega$ .

$(\mathcal{T}_h)_h$  : famille régulière de triangulations de  $\Omega$  par des triangles ou des tétraèdres, au sens usuel que

- Pour tout  $h$ ,  $\overline{\Omega}$  est l'union des éléments de  $\mathcal{T}_h$ ,
- Pour tout  $h$ , l'intersection de deux éléments distincts de  $\mathcal{T}_h$  est soit vide soit un sommet soit un côté entier soit une face entière de ces deux éléments,
- Le quotient  $h_K/\rho_K$  du diamètre  $h_K$  d'un élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  par le diamètre  $\rho_K$  de son cercle inscrit ou de sa sphère inscrite est inférieur ou égal à une constante  $\sigma$  qui ne dépend ni de  $K$  ni de  $h$ .

$h$  : plus grand diamètre des éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ .

$$X_h^0 = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_\ell(K) \right\}.$$

**Le problème discret est construit par la méthode de Galerkin.**

**Trouver  $u_h$  dans  $X_h^0$  tel que**

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

**Il admet une solution unique.**

**Estimations d'erreur a priori :**

**Par définition de la méthode de Galerkin, on a**

$$\forall w_h \in X_h^0, \quad a(u - u_h, w_h) = 0,$$

**d'où**

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h).$$

**On déduit de la continuité et l'ellipticité de la forme  $a(\cdot, \cdot)$**

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \inf_{v_h \in X_h^0} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega)}.$$

## Outil de base : opérateur d'interpolation de Lagrange

Dans le cas  $\ell = 1$  et pour toute fonction  $v$  continue sur  $\overline{\Omega}$ , il existe une unique fonction  $\mathcal{I}_h v$  de  $X_h^0$  qui soit égale à  $v$  en tous les sommets des éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ . On démontre également que, pour  $k = 0$  et  $1$  et pour toute fonction  $v$  de  $H^{s+1}(\Omega)$ ,  $\frac{d}{2} - 1 < s \leq 1$ ,

$$\|v - \mathcal{I}_h v_h\|_{H^k(\Omega)} \leq c h^{s+1-k} \|v\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

**Théorème.** Il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle que, si la solution  $u$  appartient à  $H^{s+1}(\Omega)$ ,  $\frac{d}{2} - 1 < s \leq \ell$ ,

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c h^s \|u\|_{H^{s+1}(\Omega)}.$$

## Les indicateurs d'erreur par résidu

$\mathcal{E}_K$  : ensemble des côtés ( $d = 2$ ) ou faces ( $d = 3$ ) d'un élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  qui ne sont pas contenues dans  $\partial\Omega$ .

$h_K$  : diamètre d'un élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ .

$h_e$  : longueur ou diamètre d'un élément  $e$  de  $\mathcal{E}_K$ .

$f_h$  : approximation de la donnée  $f$  dans

$$Z_h = \left\{ g_h \in L^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_m(K) \right\}.$$

Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , l'indicateur d'erreur  $\eta_K$  est défini par

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}.$$

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)}.$$

**Indicateur par résidu :** Si l'on supprime les indices  $h$  dans cette définition, tout s'annule.

L'indicateur d'erreur est très facile à calculer une fois que la solution discrète  $u_h$  est connue.

Par exemple, lorsque  $\ell$  est égal à 1,  $m$  est le plus souvent choisi égal à 0, et

$$\eta_K = h_K \text{mes}(K)^{\frac{1}{2}} |f_h|_K + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \text{mes}(e)^{\frac{1}{2}} |[\partial_n u_h]_e|.$$

## Pourquoi ?

### Équation du résidu :

L'équation du résidu s'obtient en "appliquant" le problème continu à l'erreur  $u - u_h$ .

Pour tous  $v$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $v_h$  dans  $X_h^0$ ,

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= a(u - u_h, v - v_h) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K f(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_K \mathbf{grad} u_h \cdot \mathbf{grad} (v - v_h) \, d\mathbf{x}, \right. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x})(v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau)(v - v_h)(\tau) \, d\tau \right). \end{aligned}$$

## La majoration de l'erreur a posteriori

L'ellipticité de  $a(\cdot, \cdot)$  entraîne

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{a(u - u_h, v)}{\|v\|_{H^1(\Omega)}}.$$

D'après l'équation du résidu, par inégalité de Cauchy–Schwarz,

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} & \left( (\|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)}) \|v - v_h\|_{L^2(K)} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|v - v_h\|_{L^2(e)} \right). \end{aligned}$$

On prend  $v_h$  égal à l'image de  $v$  par l'opérateur de régularisation de Clément.

## Outil de base : opérateur de Clément

Cet opérateur  $R_h$  est défini sur des fonctions non régulières (en particulier non continues) à valeurs dans  $X_h^0$  et possède des propriétés d'approximation locale.

Pour toute fonction  $v$  de  $H_0^1(\Omega)$ ,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(K)} \leq c h_K \|v\|_{H^1(\Delta_K)},$$

où  $\Delta_K$  désigne l'union des éléments de  $\mathcal{T}_h$  dont l'intersection avec  $K$  est non vide,

$$\|v - R_h v\|_{L^2(e)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Delta_e)},$$

où  $\Delta_e$  désigne l'union des éléments de  $\mathcal{T}_h$  dont l'intersection avec  $e$  est non vide,

La constante  $c$  est difficile à évaluer et dépend grandement du paramètre de régularité  $\sigma$ .

$$a(u - u_h, v) \leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( h_K \left( \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right) \|v\|_{H^1(\Delta_K)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|v\|_{H^1(\Delta_e)} \right).$$

plus encore une inégalité de Cauchy–Schwarz.

**Théorème.** Il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

## Une majoration pour chaque indicateur d'erreur

Équation du résidu :

$$a(u - u_h, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) v(\tau) d\tau \right).$$

Pour tout  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$ , on choisit  $v$  égal à  $v_K$ , avec

$$v_K = (f_h + \Delta u_h) \psi_K \quad \text{sur } K \quad v_K = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus K.$$

où  $\psi_K$  désigne la fonction bulle sur  $K$ ,

$$\|(f_h + \Delta u_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq |u - u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

On utilise alors des inégalités inverses sur chaque  $K$ .

## Outil de base : inégalités inverses

Soit  $r$  un entier  $\geq 0$ . Les inégalités inverses se démontrent par passage à l'élément de référence, grâce à l'équivalence de normes sur un espace de dimension finie.

Pour tout polynôme  $v$  de  $\mathcal{P}_r(K)$ ,

$$c \|v\|_{L^2(K)} \leq \|v \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)} \leq c' \|v\|_{L^2(K)},$$

et

$$\|v\|_{H^1(K)} \leq c h_K^{-1} \|v\|_{L^2(K)}.$$

La constante  $c$  dépend encore du paramètre de régularité  $\sigma$  mais est plus facile à évaluer.

$$\|(f_h + \Delta u_h) \psi_K^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(K)}^2 \leq |u - u_h|_{H^1(K)} |v_K|_{H^1(K)} + \|f - f_h\|_{L^2(K)} \|v_K\|_{L^2(K)}.$$

**Puis on note que  $f_h + \Delta u_h$  appartient à  $\mathcal{P}_{\max\{m, \ell-2\}}(K)$ , donc que  $v_K$  appartient à  $\mathcal{P}_{\max\{m, \ell-2\}+d+1}(K)$ .**

$$h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \leq c \left( |u - u_h|_{H^1(K)} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K)} \right).$$

**$\implies$  Une majoration du premier terme de  $\eta_K$ .**

Pour tout  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$  et  $e \in \mathcal{E}_K$ , si  $K'$  désigne l'autre élément de  $\mathcal{T}_h$  qui contient  $e$ , on choisit  $v$  égal à  $v_e$ , avec

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa}([\partial_n u_h] \psi_e) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\} \quad v_e = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K').$$

où  $\psi_e$  désigne la fonction bulle sur  $e$ .

$\mathcal{L}_{e,\kappa}$  : opérateur de relèvement des polynômes de  $\mathcal{P}_{\ell-1+d}(e)$  s'annulant sur  $\partial e$  en des polynômes sur  $\kappa$  s'annulant sur  $\partial\kappa \setminus e$ , **construit par transformation affine à partir d'un opérateur  $\hat{\mathcal{L}}$  similaire sur le triangle de référence.**

$$\begin{aligned} \|([\partial_n u_h] \psi_e^{\frac{1}{2}})\|_{L^2(e)}^2 &\leq \|u - u_h\|_{H^1(K \cup K')} \|v_e\|_{H^1(K \cup K')} + \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_e\|_{L^2(K \cup K')} \\ &\quad + \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K \cup K')} \|v_e\|_{L^2(K \cup K')}. \end{aligned}$$

## Outil de base : inégalités inverses (bis) plus

Les résultats suivants se démontrent encore et toujours par passage à l'élément de référence,

Pour tout polynôme  $v$  de  $\mathcal{P}_r(e)$ ,

$$c \|v\|_{L^2(e)} \leq \|v \psi_e^{\frac{1}{2}}\|_{L^2(e)} \leq c' \|v\|_{L^2(e)}.$$

et pour tout polynôme  $v$  de  $\mathcal{P}_r(e)$  s'annulant sur  $\partial e$ ,

$$\|\mathcal{L}_{e,\kappa} v\|_{L^2(\kappa)} + h_e |\mathcal{L}_{e,\kappa} v|_{H^1(\kappa)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} \|v\|_{L^2(e)}.$$

$$h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \leq c \left( |u - u_h|_{H^1(K \cup K')} + h_K \|f - f_h\|_{L^2(K \cup K')} + h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K \cup K')} \right)$$

$\implies$  Une majoration du second terme de  $\eta_K$ .

**Théorème.** L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur  $\eta_K$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , et pour une constante  $c$  indépendante de  $K$  et de  $h$  :

$$\eta_K \leq c \left( |u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} \right),$$

où  $\omega_K$  désigne l'union soit des triangles partageant au moins un côté avec  $K$  ( $d = 2$ ), soit des tétraèdres partageant au moins une face avec  $K$  ( $d = 3$ ).

## Conclusions

- Aux termes portant sur la donnée près, l'erreur est équivalente à la quantité  $\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2\right)^{\frac{1}{2}}$ , avec des constantes d'équivalence indépendantes de  $h$ .

$$\begin{aligned} c_1 \left( \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2)^{\frac{1}{2}} - h \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \right) &\leq \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq c_2 \left( \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2)^{\frac{1}{2}} + h \|f - f_h\|_{L^2(\Omega)} \right) \right). \end{aligned}$$

Estimations parfaitement optimales.

- Les indicateurs d'erreur sont faciles à calculer dès que l'on connaît la solution discrète.
- La dernière estimation est locale.

Permet une stratégie d'adaptativité très simple.

## Cas de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver  $u$  dans  $H^1(\Omega)$  tel que

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

et que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

$$X_h = \left\{ v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K) \right\}.$$

**Le problème discret s'écrit**

**Trouver  $u_h$  dans  $X_h$  tel que**

$$u_h = g_h \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

**et que**

$$\forall v_h \in X_h^0, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

**où  $g_h$  appartient à l'espace des traces de  $X_h$  sur  $\partial\Omega$  et est en général égal à l'interpolé de Lagrange de  $g$ .**

**Les indicateurs d'erreur sont définis exactement comme précédemment :**

$$\eta_K = h_K \operatorname{mes}(K) |f_h|_K + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \operatorname{mes}(e) |[\partial_n u_h]_e|.$$

**L'analogie des estimations précédentes s'écrit maintenant**

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|g - g_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}.$$

$$\eta_K \leq c \left( |u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} \right),$$

## Cas de conditions aux limites de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ \partial_n u = k & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

On suppose que

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau) \, d\tau = 0.$$

Ce problème admet la formulation variationnelle équivalente suivante

Trouver  $u$  dans  $H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  tel que

$$\forall v \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad a(u, v) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau)v(\tau) \, d\tau,$$

où  $L_0^2(\Omega)$  désigne l'espace

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

**Le problème discret s'écrit**

**Trouver  $u_h$  dans  $X_h \cap L_0^2(\Omega)$  tel que**

$$\forall v_h \in X_h \cap L_0^2(\Omega), \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} k(\tau)v_h(\tau) \, d\tau,$$

$\mathcal{E}_K^b$  : ensemble des côtés ( $d = 2$ ) ou faces ( $d = 3$ ) d'un élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  qui sont contenues dans  $\partial\Omega$ .

$k_h$  : approximation de la donnée  $k$  qui appartient à  $\mathcal{P}_m(e)$  pour tout  $e$  dans  $\mathcal{E}_K^b$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ .

**Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , l'indicateur d'erreur  $\eta_K$  est défini par**

$$\eta_K = h_K \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} h_e^{\frac{1}{2}} \|k_h - \partial_n u_h\|_{L^2(e)}.$$

## Pourquoi ?

Équation du résidu :

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_K (f - f_h)(\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) (v - v_h)(\tau) \, d\tau \\ & \left. + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} \left( \int_e (k_h - \partial_n u_h)(\tau) (v - v_h)(\tau) \, d\tau + \int_e (k - k_h)(\tau) (v - v_h)(\tau) \, d\tau \right) \right). \end{aligned}$$

On a les estimations

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_K^b} h_e \|k - k_h\|_{L^2(e)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\eta_K \leq c \left( |u - u_h|_{H^1(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|f - f_h\|_{L^2(\kappa)} + \sum_{e \subset \mathcal{E}_K^b} h_e^{\frac{1}{2}} \|k - k_h\|_{L^2(e)} \right).$$

## Indicateurs par résidu et problèmes locaux

L'idée est maintenant d'évaluer le résidu par la résolution de problèmes discrets locaux qui peuvent être munis de conditions aux limites soit de type Neumann soit de type Dirichlet (sur un domaine légèrement plus grand).

### Problèmes de Neumann locaux

Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,

$$X_h(K) = \left\{ v_K \in \mathcal{P}_L(K); v_K = 0 \text{ aux coins de } K \text{ et sur } \partial\Omega \cap K \right\},$$

où  $L$  est égal à  $\sup\{\ell + d - 1, m + d + 1\}$ .

**Trouver  $u_K$  dans  $X_h(K)$  tel que**

$$\begin{aligned} \forall w_K \in X_h(K), \quad & \int_K \mathbf{grad} u_K \cdot \mathbf{grad} w_K \, dx \\ & = \int_K (f_h + \Delta u_h)(\mathbf{x}) w_K(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) w_K(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

**Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , l'indicateur d'erreur  $\eta_K^N$  est défini par**

$$\eta_K^N = |u_K|_{H^1(K)}.$$

**Proposition.** On a les estimations

$$c\eta_K^N \leq \eta_K \leq c'\eta_K^N.$$

**Démonstration :**

1) Pour majorer  $\eta_K^N$ , on choisit dans le problème de Neumann local  $v_K$  égal à  $u_K$ , ce qui donne

$$|u_K|_{H^1(K)}^2 \leq \|f_h + \Delta u_h\|_{L^2(K)} \|u_K\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \|[\partial_n u_h]\|_{L^2(e)} \|u_K\|_{L^2(e)}.$$

Puis on utilise les inégalités de Poincaré–Friedrichs généralisées, dues au fait que les fonctions de  $X_h(K)$  s'annulent aux sommets de  $K$  et prouvées par passage à l'élément fini de référence :

$$\forall w_K \in X_h(K), \quad \|w_K\|_{L^2(K)} \leq c h_K |w_K|_{H^1(K)}$$

$$\text{et} \quad \|w_K\|_{L^2(e)} \leq c h_e^{\frac{1}{2}} |w_K|_{H^1(K)}.$$

2) Pour majorer  $\eta_K$ , on choisit dans le problème de Neumann local  $w_K$  successivement égal aux restrictions à  $K$  de  $v_K$ , puis égal de  $v_e$  pour tout  $e$  dans  $\mathcal{E}_K$ .

**Rappel :** Par exemple,  $v_K = (f_h + \Delta u_h) \psi_K$ .

plus les mêmes inégalités inverses que précédemment.

Chaque indicateur  $\eta_K^N$  est parfaitement équivalent à  $\eta_K$ . Donc on a la même majoration de l'erreur globale par

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^n)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

plus des termes portant sur les données et la même majoration de  $\eta_K^N$  en fonction de l'erreur locale.

## Problèmes de Dirichlet locaux

Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,

$$X_h^0(K) = \left\{ v_K \in H_0^1(\omega_K); \forall \kappa \subset \omega_K, v_K|_{\kappa} \in \mathcal{P}_L(\kappa) \right\}.$$

Trouver  $u_K^0$  dans  $X_h^0(K)$  tel que

$$\begin{aligned} \forall w_K \in X_h^0(K), \quad & \int_{\omega_K} \text{grad } u_K^0 \cdot \text{grad } w_K \, dx \\ & = \sum_{\kappa \subset \omega_K} \int_{\kappa} (f_{mh} + \Delta u_h)(\mathbf{x}) w_K(\mathbf{x}) \, dx \\ & \quad - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n u_h](\tau) w_K(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , l'indicateur d'erreur  $\eta_K^D$  est défini par

$$\eta_K^D = |u_K^0|_{H^1(K)}.$$

**Proposition.** On a les estimations

$$\eta_K^D \leq c \sum_{\kappa \subset \omega_K} \eta_\kappa \quad \text{et} \quad \eta_K \leq c' \sum_{\kappa \subset \omega_K} \eta_\kappa^D.$$

**Démonstration :** Dans le problème de Dirichlet local, on choisit successivement  $w_K$

1) égal à  $u_K^0$  (plus exactement les mêmes inégalités de Poincaré–Friedrichs généralisées que précédemment),

2) égal aux restrictions à  $\omega_K$  de  $v_K$  puis de  $v_e$  pour tout  $e$  dans  $\mathcal{E}_K$  (plus encore et toujours les mêmes inégalités inverses).

Les indicateurs  $\eta_N^D$  ont des propriétés parfaitement équivalentes à celles des  $\eta_K^N$ .

## Problèmes locaux réduits

Les résultats précédents sont encore valables si on remplace  $X_h(K)$  par

$$\widetilde{X}_h(K) = \mathbf{Vect} \left( \begin{aligned} & \{ \psi_K w, w \in \mathcal{P}_{\sup\{\ell-2, m\}}(K) \}, \\ & \cup_{e \in \mathcal{E}_K} \{ \mathcal{L}_{e, K}(\psi_e w)|_K, w \in \mathcal{P}_{\ell-1}(e) \} \end{aligned} \right),$$

et  $X_h^0(K)$  par

$$\widetilde{X}_h^0(K) = \mathbf{Vect} \left( \begin{aligned} & \{ \psi_K w, w \in \mathcal{P}_{\sup\{\ell-2, m\}}(K) \}, \\ & \cup_{e \in \mathcal{E}_K} \{ \mathcal{L}_{e, \omega_K}(\psi_e w), w \in \mathcal{P}_{\ell-1}(e) \} \end{aligned} \right).$$

**Par exemple, pour  $\ell = 1$  et  $m = 0$ ,**

**$\dim X_h(K) = 7$  en dimension 2 et 31 en dimension 3,**

**$\dim \widetilde{X}_h(K) = 4$  en dimension 2 et 5 en dimension 3.**

Les indicateurs par problèmes locaux réduits sont donc beaucoup moins chers à calculer que les indicateurs par problèmes locaux. Toutefois leur extension à des problèmes plus compliqués, par exemple non linéaires, s'avère nettement plus coûteuse que pour les indicateurs par résidu.

## Indicateurs pour le problème de Stokes

$\Omega$  : polygone ou polyèdre à frontière lipschitzienne.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

## Formulation variationnelle équivalente

Trouver  $(u, p)$  dans  $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } u : \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle,$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} (\text{div } u)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

**Le fait que ce problème soit bien posé requiert l'ellipticité de la première forme et une condition inf-sup sur la seconde.**

## Rappel :

I. Babuška, F. Brezzi

Soit  $X$  et  $M$  deux espaces de Hilbert et  $b(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire continue sur  $X \times M$ .

Les trois propriétés suivantes sont **équivalentes** :

(i) Il existe une constante  $\beta > 0$  telle que

$$\forall q \in M, \quad \sup_{v \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_M.$$

(ii) L'opérateur  $B$  défini de  $X$  dans  $M'$  par

$$\forall v \in X, \forall q \in M, \quad \langle Bv, q \rangle = b(v, q),$$

est un isomorphisme de l'orthogonal du noyau

$$V = \{v \in X; \forall q \in M, b(v, q) = 0\},$$

sur  $M'$ , et la norme de son inverse est  $\leq \beta^{-1}$ .

**(iii)** L'opérateur  $B'$  défini de  $M$  dans  $X'$  par

$$\forall v \in X, \forall q \in M, \quad \langle v, B'q \rangle = b(v, q),$$

est un isomorphisme de  $M$  sur le polaire du noyau  $V$ , c'est-à-dire l'espace

$$V^\circ = \{f \in X'; \forall v \in V, \langle f, v \rangle = 0\},$$

et la norme de son inverse est  $\leq \beta^{-1}$ .

**Théorème.** Pour tout  $f$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d$ , le problème de Stokes admet une solution unique.

**Démonstration :** Soit

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d; \forall q \in L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\} \\ = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\}.$$

1) D'après l'ellipticité de la première forme et le lemme de Lax–Milgram, il existe une unique fonction  $u$  de  $V$  telle que

$$\forall \mathbf{v} \in V, \quad \nu \int_{\Omega} \operatorname{grad} u : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle,$$

## 2) La forme linéaire

$$\mathbf{v} \mapsto \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} \, dx,$$

appartient donc à  $V^{\circ}$ . Or, on sait démontrer la condition inf-sup

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{- \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)^d}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

D'après (iii), il existe un unique  $p$  dans  $L_0^2(\Omega)$  tel que

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} \, dx.$$

Le couple  $(\mathbf{u}, p)$  est solution du problème de Stokes.

$$X_h \subset H_0^1(\Omega)^d \quad \text{et} \quad M_h \subset L_0^2(\Omega).$$

## Le problème discret

**Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  dans  $X_h \times M_h$  tel que**

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u}_h : \text{grad } \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle,$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

**Une condition inf-sup liant  $X_h$  et  $M_h$  est nécessaire pour que le problème discret soit bien posé et aussi pour obtenir des majorations d'erreur a priori.**

## Les indicateurs d'erreur par résidu

Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ , l'indicateur d'erreur  $\eta_K$  est défini par

$$\eta_K = h_K \|\mathbf{f}_h + \nu \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h\|_{L^2(K)^d} + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \|\nu \partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}\|_{L^2(e)^d} + \|\text{div } \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)},$$

où  $\mathbf{f}_h$  est une approximation de  $\mathbf{f}$  dans  $Z_h^d$ .

**Indicateur par résidu :** Si l'on supprime les indices  $h$  dans cette définition, tout s'annule.

L'indicateur d'erreur est très facile à calculer une fois que la solution discrète  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  est connue.

## Pourquoi ?

Équations du résidu :

Pour tous  $\mathbf{v}$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et  $\mathbf{v}_h$  dans  $X_h^0$ ,

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \text{grad}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) : \text{grad} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &- \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{v})(\mathbf{x})(p - p_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad} p_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}](\tau) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\tau) \, d\tau \right). \end{aligned}$$

Pour tout  $q$  dans  $L_0^2(\Omega)$ ,

$$\int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

**Et après ?**

**R. Verfürth**

**On pose, avec  $U = (\mathbf{u}, p)$  et  $V = (\mathbf{v}, q)$ ,**

$$A(U, V) = \nu \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, dx - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx.$$

**Le problème continu :**

**Trouver  $U$  dans  $Y = H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  tel que**

$$\forall V \in Y, \quad A(U, V) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle .$$

**Le problème discret :**

**Trouver  $U_h$  dans  $Y_h = X_h \times M_h$  tel que**

$$\forall V_h \in Y_h, \quad A(U_h, V_h) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle .$$

**Équation du résidu : Pour tout  $V$  dans  $Y$  et  $v_h$  dans  $X_h^0$ ,**

$$\begin{aligned}
 A(U - U_h, V) = & \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \int_K (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\
 & + \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{f}_h)(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}](\tau) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)(\tau) \, d\tau \\
 & \left. + \int_K (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right).
 \end{aligned}$$

**Le problème de Stokes admet une solution unique pour tout  $(\mathbf{f}, g)$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d \times L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ . Comme (ii) implique (i),**

**La forme  $A(\cdot, \cdot)$  vérifie la condition inf-sup**

$$\forall U \in Y, \quad \sup_{V \in Y} \frac{A(U, V)}{\|V\|_Y} \geq \beta \|U\|_Y.$$

On applique cette inégalité inf-sup avec  $U$  remplacé par  $U - U_h$ , puis on utilise l'opérateur de Clément.

**Théorème.** Il existe une constante  $c$  indépendante de  $h$  telle qu'on ait la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \eta_K^2 + h_K^2 \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Ne nécessite aucune condition inf-sup entre  $X_h$  et  $M_h$ .**

Pour tout  $K$  dans  $\mathcal{T}_h$ , on choisit successivement dans l'équation du résidu,

1)  $V$  égal à  $(v_K, 0)$  et  $v_h$  égal à 0, avec

$$v_K = (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h) \psi_K \quad \text{sur } K, \quad v_K = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus K,$$

2) pour tout  $e$  dans  $\mathcal{E}_K$ ,  $V$  égal à  $(v_e, 0)$  et  $v_h$  égal à 0, avec

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa}([\partial_n \mathbf{u}_h - p_h \mathbf{n}] \psi_e) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\}, \quad v_e = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus (K \cup K'),$$

3)  $V$  égal à  $(0, q_K)$  et  $v_h$  égal à 0, avec

$$q_K = \text{div } \mathbf{u}_h \quad \text{sur } K, \quad q_K = 0 \quad \text{sur } \Omega \setminus K.$$

Puis on utilise les mêmes inégalités inverses que précédemment.

**Théorème.** L'estimation suivante est vérifiée pour chaque indicateur  $\eta_K$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , et pour une constante  $c$  indépendante de  $K$  et de  $h$  :

$$\eta_K \leq c \left( |\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_{H^1(\omega_K)^d} + \|p - p_h\|_{L^2(\omega_K)} + \sum_{\kappa \subset \omega_K} h_\kappa \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\kappa)^d} \right).$$

- On obtient les mêmes propriétés d'optimalité que pour l'équation de Laplace.
- Les indicateurs d'erreur sont faciles à calculer.
- L'évaluation des indicateurs par problèmes locaux nécessite des problèmes locaux réduits (et une condition inf-sup entre chaque paire d'espaces locaux).

# Un exemple de discrétisation non conforme

Un schéma d'éléments ou volumes finis adaptatif

pour les équations de Darcy

Travail commun avec Y. Achdou et F. Coquel  
dans le cadre d'un contrat avec Électricité de France

Les équations de **Darcy** modélisent l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans un milieu poreux, homogène ou non homogène.

**H. Darcy (1856)**

- Les équations de Darcy et leurs formulations variationnelles
- Des éléments finis qui marchent mal, moyennement ou presque bien
- Un schéma d'éléments ou volumes finis optimal
- Et son analyse a posteriori

## Les équations de Darcy et leurs formulations variationnelles

Les équations de **Darcy** dans un ouvert  $\Omega$  borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mu \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

**Inconnues** : vitesse  $\mathbf{u}$ , pression  $p$ .

**Données** : Densité de forces volumiques  $\mathbf{f}$  (ou donnée sur le bord).

$\mu$  : fonction strictement positive égale au quotient de la viscosité du fluide par la perméabilité du milieu ( $\mu^{-1}$  est appelé porosité).

La fonction  $\mu$  est constante dans le cas d'un milieu homogène. Dans la suite de cet exposé, on prend  $\mu$  égal à 1.

## Première formulation variationnelle

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \operatorname{div} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \right\},$$

$$H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in H(\operatorname{div}, \Omega); \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

$$L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega); \int_{\Omega} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

**Trouver  $(\mathbf{u}, p)$  dans  $H_0(\operatorname{div}, \Omega) \times L_0^2(\Omega)$  tel que**

$$\forall \mathbf{v} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \forall q \in L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \text{div } \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}.$$

- **Ellipticité de la première forme bilinéaire sur  $V$  seulement**

- **Condition inf-sup pour la seconde forme**

S'obtient en prenant  $\mathbf{v}$  égal à  $\text{grad } \varphi$ , où  $\varphi$  est solution d'une équation de Laplace de donnée  $q$  et conditions de Neumann homogènes.

**Le problème admet une solution unique.**

## Deuxième formulation variationnelle

Trouver  $(\mathbf{u}, p)$  dans  $L^2(\Omega)^d \times (H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega))$  tel que

$$\forall \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d; \forall q \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} \in H_0(\text{div}, \Omega); \text{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}. \end{aligned}$$

- Ellipticité de la première forme bilinéaire sur  $L^2(\Omega)^d$
- Condition inf-sup pour la seconde forme  
S'obtient en prenant  $v$  égal à  $\text{grad } q$ .

Le problème admet une solution unique.

Troisième formulation variationnelle

J.-M. Thomas

On mélange les objets utilisés dans les deux premières.

## Une propriété de régularité

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{f} \text{ dans } \Omega, \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

C. Amrouche, C.B., M. Dauge, V. Girault  
M. Costabel, M. Dauge

On suppose la donnée  $\mathbf{f}$  dans  $L^2(\Omega)^d$  à rotationnel dans  $L^2(\Omega)^{2d-3}$ .

Lorsque  $\Omega$  est un polygone ou un polyèdre à frontière lipschitzienne, la solution  $(\mathbf{u}, p)$  appartient à  $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$

- pour  $s = 1$  lorsque  $\Omega$  est convexe,
- pour un  $s > \frac{1}{2}$  sinon (la valeur maximale de  $s$  dans ce cas est explicitement connue dans le cas de la dimension 2).

**Des éléments finis qui marchent mal, moyennement ou presque bien**

$(\mathcal{T}_h)_h$  : famille régulière de triangulations de  $\Omega$ .

**Éléments finis pour la première formulation variationnelle**

$$X_h \subset H_0(\text{div}, \Omega), \quad M_h \subset L_0^2(\Omega).$$

**Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  dans  $X_h \times M_h$  tel que**

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_h)(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

**Exemple 1 :**

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega)^d \cap H_0(\text{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_2(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_0(K) \right\},$$

**Pas de convergence, ni en vitesse, ni en pression.**

**Exemple 2 : mini-élément d'Arnold–Brezzi–Fortin**

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega)^d \cap H_0(\text{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_1(K) \right\},$$

où  $\mathcal{P}(K)$  est la somme de  $\mathcal{P}_1(K)$  et de la fonction bulle.

**Convergence d'ordre 1 (non optimale) en vitesse et en pression.**

### Exemple 3 : élément fini de Raviart–Thomas

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H_0(\text{div}, \Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}'(K) \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_h|_K \in \mathcal{P}_0(K) \right\},$$

où  $\mathcal{P}'(K)$  désigne l'espace engendré par  $\mathcal{P}_0(K)^d$  et  $\mathbf{x}$ .

Estimations a priori optimales, estimations a posteriori non optimales.

**D. Braess, R. Verfürth**

La formulation variationnelle considérée ici n'est pas homogène et ne peut donc mener à des estimations a posteriori optimales.

## Éléments finis pour la seconde formulation variationnelle

$$X_h \subset L^2(\Omega)^d, \quad M_h \subset H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega).$$

**Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  dans  $X_h \times M_h$  tel que**

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} p_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{grad} q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0,$$

#### Exemple 4 : élément fini de Taylor–Hood

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in H^1(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{P}_2(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|K} \in \mathcal{P}_1(K) \right\},$$

Estimations d'erreur a priori et a posteriori optimales  
pour la seconde formulation

#### Exemple 5 : élément fini rhéologique

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_{h|K} \in \mathcal{P}_0(K)^d \right\},$$

$$M_h = \left\{ q_h \in H^1(\Omega) \cap L_0^2(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_h, q_{h|K} \in \mathcal{P}_1(K) \right\},$$

Estimations d'erreur a priori et a posteriori optimales  
mais la vitesse discrète n'est pas à divergence exactement nulle.

## Un schéma d'éléments ou volumes finis optimal

### Le problème discret par éléments finis

$$X_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in L^2(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, \mathbf{v}_h|_K \in \mathcal{P}_0(K)^d \right\}.$$

**M. Crouzeix, P.-A. Raviart**

$M_h$  : espace des fonctions de  $L^2_0(\Omega)$

- dont la restriction à chaque élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  est affine,
- qui sont continues aux milieux des côtés ( $d = 2$ ) ou aux barycentres des faces ( $d = 3$ ) des éléments de  $\mathcal{T}_h$ .

L'espace  $M_h$  n'est pas inclus dans  $H^1(\Omega)$

**$\Rightarrow$  Discrétisation non conforme !**

**Trouver  $(\mathbf{u}_h, p_h)$  dans  $X_h \times M_h$  tel que**

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{u}_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + b_h(\mathbf{v}_h, p_h) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad b_h(\mathbf{u}_h, q_h) = 0,$$

**où la forme bilinéaire  $b_h(\cdot, \cdot)$  est donnée par**

$$b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{grad} \, q_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

$$\|q_h\|_{H_h^1(\Omega)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|q_h\|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

- **Ellipticité de la première forme bilinéaire sur  $L^2(\Omega)^d$**
- **Condition inf-sup pour la seconde forme**

S'obtient en prenant  $v_h$  égal à  $\text{grad } q_h$  plus équivalence des norme et semi-norme brisées.

**Le problème admet une solution unique.**

## Le schéma de volumes finis

$\bar{\mathcal{E}}_K$  : ensemble des côtés ( $d = 2$ ) ou faces ( $d = 3$ ) de  $K$ ,

$$\mathcal{E}_h = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{\mathcal{E}}_K.$$

$[\cdot]_e$  : trace sur  $e$  si  $e$  est contenu dans  $\partial\Omega$ , saut à travers  $e$  sinon.

Trouver  $(u_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$  et  $(p_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$  tels que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{u}_K + \frac{1}{\text{mes}(K)} \sum_{e \in \bar{\mathcal{E}}_K} p_e \text{mes}(e) \mathbf{n}_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall e \in \mathcal{E}_h, \quad [\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}]_e = 0.$$

- Le problème d'éléments finis et le schéma de volumes finis sont équivalents.

$\chi_K$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$  : fonctions caractéristiques de  $K$ .

$\varphi_e$ ,  $e \in \mathcal{E}_h$  : fonctions de Lagrange associées aux milieux ( $d = 2$ ) ou barycentres ( $d = 3$ ) des côtés ou faces  $e$ .

**Proposition** : Les  $(u_K)_{K \in \mathcal{T}_h}$  et  $(p_e)_{e \in \mathcal{E}_h}$  sont solution du schéma de volumes finis si et seulement si le couple  $(u_h, p_h)$  défini par

$$u_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} u_K \chi_K, \quad p_h = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} p_e \varphi_e,$$

est, à une constante additive sur la pression près, solution du problème d'éléments finis.

## Démonstration :

1) Les fonctions  $\chi_K e$ ,  $K \in \mathcal{T}_h$ , où  $e$  décrit la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ , forment une base de  $X_h$ . Donc, EF1 équivaut à

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{u}_K \text{mes}(K) + \int_K \text{grad } p_h \, dx = \int_K \mathbf{f}(x) \, dx,$$

ou encore

$$\mathbf{u}_K + \frac{1}{\text{mes}(K)} \sum_{e \in \bar{\mathcal{E}}_K} p_e \int_K \text{grad } \varphi_e \, dx = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(x) \, dx.$$

On calcule

$$\int_K \text{grad } \varphi_e \, dx = \int_e \varphi_e \mathbf{n}_K \, d\tau = \text{mes}(e) \mathbf{n}_K.$$

$$\text{EF1} \iff \text{VF1}$$

2) Les  $\varphi_e$ ,  $e \in \mathcal{E}_h$ , forment une base de  $M_h$ . Donc, EF2 équivaut à

$$\forall e \in \mathcal{E}_h, \quad \sum_{e \subset K} \mathbf{u}_K \cdot \int_K \text{grad } \varphi_e \, dx = 0.$$

$$\text{EF2} \iff \text{VF2}$$

- Le schéma est parfaitement conservatif.

Vitesse à divergence exactement nulle.

$$V_h = \left\{ \mathbf{v}_h \in X_h; \forall q_h \in M_h, b_h(\mathbf{v}_h, q_h) = 0 \right\}.$$

**Proposition :** L'espace  $V_h$  est formé des fonctions de  $X_h$  qui sont à divergence nulle dans  $\Omega$  et à trace normale nulle sur  $\partial\Omega$ .

## Estimations a priori

On fixe la constante sur la pression discrète en imposant que  $p_h$  appartienne à  $L_0^2(\Omega)$ , c'est-à-dire que

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_h} p_e \text{mes}(\omega_e) = 0.$$

$\omega_e$  : union des un ou deux éléments de  $\mathcal{T}_h$  contenant  $e$ .

**Théorème** : Si la solution  $(\mathbf{u}, p)$  appartient à  $H^s(\Omega)^d \times H^{s+1}(\Omega)$ ,  $0 < s \leq 1$ , on a la majoration d'erreur a priori suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c(\mathbf{u}, p) h^s.$$

## Et son analyse a posteriori

### Indicateurs d'erreur

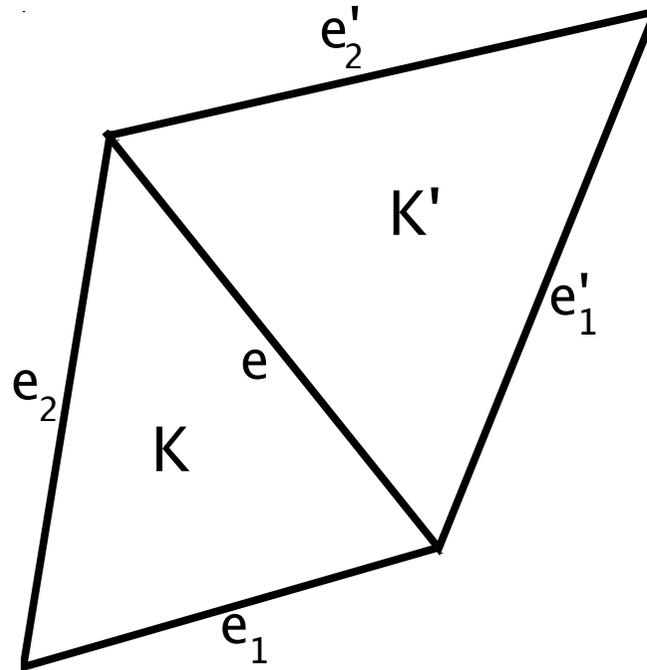
$\mathcal{E}_h^0$  : ensemble des éléments de  $\mathcal{E}_h$  qui ne sont pas contenus dans  $\partial\Omega$ .

$h_e$  : longueur ( $d = 2$ ) ou diamètre ( $d = 3$ ) de  $e$ .

Pour tout  $e$  dans  $\mathcal{E}_h^0$ ,

$$\eta_e = h_e^{-\frac{1}{2}} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}.$$

Peu coûteux à calculer !



$a_i, 1 \leq i \leq d$  : extrémités ou sommets de  $e$ ,

$e_i$  et  $e'_i$  : côté ou face opposée à  $a_i$  dans les éléments  $K$  et  $K'$  contenant  $e$ .

En dimension  $d = 2$ ,

$$\eta_e = \frac{1}{\sqrt{3}} |p_{e_1} - p_{e'_1} + p_{e'_2} - p_{e_2}|.$$

## Estimations a posteriori

$\mathbf{f}_h$  : approximation de  $\mathbf{f}$  dans  $X_h$  telle que

$$\forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \mathbf{f}_h|_K = \frac{1}{\text{mes}(K)} \int_K \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

**Théorème :** On a la majoration d'erreur a posteriori suivante

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \eta_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

**Démonstration :** En deux étapes.

**1)** Comme  $b(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p)$  est nul, on a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{f} - \mathbf{u}_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \, dx.$$

On ajoute et on soustrait  $b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h)$  :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (\mathbf{f} - \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \, dx + b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h).$$

Le terme  $\mathbf{f}_h - \mathbf{u}_h - \text{grad } p_h$  étant nul sur chaque  $K$ , le premier terme se majore par

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(K)^d} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(K)^d}.$$

Pour évaluer le second terme, on introduit une approximation **conforme**  $p_h^*$  de  $p_h$ , c'est-à-dire dans  $M_h \cap H^1(\Omega)$ .

$$b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h) = b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h - p_h^*) \leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |p_h - p_h^*|_{H^1(K)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

On choisit  $p_h^*$  tel que

$$\forall \mathbf{a} \in \mathcal{V}_h, \quad p_h^*(\mathbf{a}) = \frac{1}{\text{card}(\mathcal{T}_{\mathbf{a}})} \sum_{K \in \mathcal{T}_{\mathbf{a}}} p_h|_K(\mathbf{a}).$$

Alors

$$(p_h - p_h^*)(\mathbf{a}) = \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} c_e [p_h]_e(\mathbf{a}) \leq c \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} h_e^{-\frac{d-1}{2}} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}.$$

D'autre part,

$$|p_h - p_h^*|_{H^1(K)} \leq c \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{V}_K} |(p_h - p_h^*)(\mathbf{a})| h_K^{\frac{d}{2}-1}.$$

On en déduit finalement

$$b_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p_h) \leq c \left( \sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{V}_h} \sum_{e \in \mathcal{E}_{\mathbf{a}}} h_e^{-1} \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(\Omega)^d}.$$

**2) On introduit la fonction  $\mathbf{v}$  telle que  $\mathbf{v}|_K$  soit égal à  $(\text{grad}(p - p_h))|_K$ .  
On obtient**

$$\|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)}^2 \leq c b_h(\mathbf{v}, p - p_h).$$

**Par divers arguments techniques,**

$$\|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)}^2 \leq c \left( \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

**Dû à la définition de  $\mathbf{v}$ , ceci entraîne**

$$\|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c \left( \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} \right).$$

**Théorème :** Les indicateurs d'erreur  $\eta_e$ ,  $e \in \mathcal{E}_h^0$ , vérifient la majoration

$$\eta_e \leq c \sum_{e \subset K} |p - p_h|_{H^1(K)}.$$

**Démonstration :** Soit  $K_1$  et  $K_2$  les éléments de  $\mathcal{T}_h$  qui contiennent  $e$ .  
On résout les problèmes

$$-\Delta \varphi_i = 0 \quad \text{dans } K_i,$$

avec les conditions aux limites de Neumann

$$\partial_n \varphi_i = [p_h]_e \quad \text{sur } e \quad \text{et} \quad \partial_n \varphi_i = 0 \quad \text{sur } \partial K_i \setminus e.$$

Puis on prend  $v$  égal à  $\text{grad } \varphi_i$  sur  $K_i$ ,  $i = 1$  et  $2$ , et à zéro ailleurs.

**On voit que**

$$b(\mathbf{v}, p - p_h) = \frac{1}{2} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{e \subset K} \int_e \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_K [p_h]_e d\tau = \| [p_h]_e \|_{L^2(e)}^2,$$

**d'où**

$$\| [p_h]_e \|_{L^2(e)}^2 \leq \sum_{i=1}^2 \| \mathbf{v} \|_{L^2(K_i)^d} |p - p_h|_{H^1(K_i)}.$$

**On combine ceci avec l'estimation**

$$\| \mathbf{v} \|_{L^2(K_i)^d} \leq c h_{K_i}^{\frac{1}{2}} \| [p_h] \|_{L^2(e)},$$

**et on obtient la majoration désirée.**

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)^d} + \|p - p_h\|_{H_h^1(\Omega)} \leq c \left( \sum_{e \in \mathcal{E}_h^0} \eta_e^2 \right)^{\frac{1}{2}} + c' \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

$$\eta_e \leq c \sum_{K \in \mathcal{T}_h} |p - p_h|_{H^1(K)}.$$

**Estimations optimales, schéma parfaitement conservatif!**

## Quelques extensions

### Cas de milieux inhomogènes

Y. Achdou, C.B.

$$\begin{cases} u + \mu \operatorname{grad} p = f & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

lorsque la fonction  $\mu$  est positive

- constante par morceaux
- ou régulière par morceaux.

Dans le problème discret et les indicateurs d'erreur, on remplace  $\mu$  par sa valeur moyenne sur chaque élément  $K$ .

## Cas de conditions aux limites non homogènes

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{u} + \mu \operatorname{grad} p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Il n'existe pas d'opérateur de traces possédant des propriétés optimales sur l'espace  $M_h$ . Mais on sait maintenant démontrer des propriétés presque optimales.

# Optimisation du paramètre de pénalisation pour le problème de Stokes

Travail commun avec V. Girault et F. Hecht

La méthode de pénalisation fournit un algorithme de résolution efficace pour la résolution numérique du problème de Stokes. Toutefois le paramètre qui intervient dans cette méthode est le plus souvent choisi de façon tout-à-fait arbitraire.

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 2$  ou  $3$ , à frontière lipschitzienne.

$$\begin{cases} -\nu \Delta \mathbf{u} + \text{grad } p = \mathbf{f} & \text{dans } \Omega, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Les inconnues sont la vitesse  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$ .

### Formulation variationnelle

Trouver  $(\mathbf{u}, p)$  dans  $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  vérifiant

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u} : \text{grad } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{v})(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

L'ellipticité de la première forme bilinéaire et la condition inf-sup vérifiée par la seconde impliquent que

Pour toute donnée  $\mathbf{f}$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d$ , ce problème admet une solution unique. En outre, cette solution vérifie

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)^d}.$$

## Le problème pénalisé

On fixe un paramètre  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

Trouver  $(\mathbf{u}_\varepsilon, p_\varepsilon)$  dans  $H_0^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$  vérifiant

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad } \mathbf{u}_\varepsilon : \text{grad } v \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\text{div } v)(\mathbf{x}) p_\varepsilon(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

La deuxième équation s'écrit

$$p_\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \text{div } \mathbf{u}_\varepsilon.$$

$$p_\varepsilon = -\varepsilon^{-1} \operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon.$$

**Par suite, le problème pénalisé s'écrit de façon équivalente**

*Trouver  $\mathbf{u}_\varepsilon$  dans  $H_0^1(\Omega)^d$  vérifiant*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{u}_\varepsilon : \operatorname{grad} \mathbf{v} \, dx + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) (\operatorname{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) \, dx \\ = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, dx,$$

*Trouver  $p_\varepsilon$  dans  $L_0^2(\Omega)$  vérifiant*

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx.$$

Pour toute donnée  $f$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d$ , ce problème admet une solution unique.

Ne requiert aucune condition inf-sup !

Toutefois, si l'on n'utilise pas la condition inf-sup, on n'a pas d'estimation indépendante de  $\varepsilon$  de la quantité  $\|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}$ .

On peut établir des estimations d'erreur a priori entre les solutions  $(u, p)$  et  $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ , de l'ordre de  $\varepsilon$ .

V. Girault, P.-A. Raviart

## Le problème discret

$(\mathcal{T}_h)_h$  : famille régulière de triangulations de  $\Omega$  par des triangles ou des tétraèdres.

$$X_h \subset H_0^1(\Omega)^d, \quad M_h \subset L_0^2(\Omega).$$

On suppose  $X_h$  et  $M_h$  construits à partir de la triangulation  $\mathcal{T}_h$ .

*Trouver  $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$  dans  $X_h \times M_h$  vérifiant*

$$\forall \mathbf{v}_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \mathbf{grad} \mathbf{u}_{\varepsilon h} : \mathbf{grad} \mathbf{v}_h \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)(\mathbf{x}) p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x},$$

$$\forall q_h \in M_h, \quad - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Soit  $\Pi_h$  l'opérateur de projection orthogonale de  $L_0^2(\Omega)$  sur  $M_h$ . La deuxième équation s'écrit

$$p_{\varepsilon h} = -\varepsilon^{-1} \Pi_h(\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h}).$$

Le problème discret s'écrit de façon équivalente

*Trouver  $\mathbf{u}_{\varepsilon h}$  dans  $X_h$  vérifiant*

$$\forall v_h \in X_h, \quad \int_{\Omega} \operatorname{grad} \mathbf{u}_{\varepsilon h} : \operatorname{grad} v_h \, dx + \varepsilon^{-1} \int_{\Omega} \Pi_h(\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) \Pi_h(\operatorname{div} v_h)(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot v_h(\mathbf{x}) \, dx,$$

*Trouver  $p_{\varepsilon h}$  dans  $M_h$  vérifiant*

$$\forall q_h \in M_h, \quad \varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, dx = - \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) q_h(\mathbf{x}) \, dx.$$

Pour toute donnée  $f$  dans  $H^{-1}(\Omega)^d$ , ce problème admet une solution unique.

Ne requiert aucune condition inf-sup !

Fournit un algorithme efficace de résolution du problème discret, où les inconnues sont découplées !

Toutefois le nombre de condition de la matrice à inverser dépend grandement du choix de  $\varepsilon$ .

S'il existe une condition inf-sup entre les espaces  $X_h$  et  $M_h$ , on peut établir des estimations d'erreur a priori entre les solutions  $(u_h, p_h)$  et  $(u_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$ .

## Deux familles d'indicateurs d'erreur

- Indicateur d'erreur lié au terme de pénalisation

$$\eta_\varepsilon = \varepsilon \|p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

- Indicateurs d'erreur liés aux éléments finis

$\mathcal{E}_K$  : ensemble des côtés ou faces de  $K$  qui ne sont pas contenus dans  $\partial\Omega$ .

Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,

$$\begin{aligned} \eta_K = h_K & \| \mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_{\varepsilon h} - \mathbf{grad} p_{\varepsilon h} \|_{L^2(K)^d} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \| [\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}_{\varepsilon h} - p_{\varepsilon h} \mathbf{n}] \|_{L^2(e)^d} + \| \operatorname{div} \mathbf{u}_{\varepsilon h} \|_{L^2(K)}, \end{aligned}$$

où  $\mathbf{f}_h$  est une approximation polynomiale par morceaux de  $\mathbf{f}$ .

## Une estimation a posteriori de l'erreur

**But :** On veut majorer l'erreur entre  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}_{\varepsilon h}, p_{\varepsilon h})$  en fonction de  $\eta_{\varepsilon}$ , des  $\eta_K$  et des données.

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon h}|_{H^1(\Omega)^d} \leq |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon}|_{H^1(\Omega)^d} + |\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{u}_{\varepsilon h}|_{H^1(\Omega)^d},$$

$$\|p - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|p - p_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} + \|p_{\varepsilon} - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Idée :** Une équations du résidu pour majorer chaque terme.

**Équation du résidu pour le premier terme :**

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \int_{\Omega} \text{grad}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon) : \text{grad} \mathbf{v} \, dx - \int_{\Omega} (\text{div} \mathbf{v})(\mathbf{x}) (p - p_\varepsilon)(\mathbf{x}) \, dx = 0,$$

$$\forall q \in L_0^2(\Omega), \quad - \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx = \varepsilon \int_{\Omega} p_\varepsilon(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) \, dx.$$

**Les propriétés de stabilité usuelles du problème de Stokes donnent**

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \varepsilon \|p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}.$$

**On conclut par une inégalité triangulaire.**

**Proposition :** On a l'estimation a posteriori suivante

$$|\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon|_{H^1(\Omega)^d} + \|p - p_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \eta_\varepsilon + \varepsilon \|p_\varepsilon - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)} \right).$$

**Équation du résidu pour le second terme :**

$$\forall v \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \text{grad} (u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon h}) : \text{grad} v \, dx + \dots$$

On utilise les arguments usuels pour l'estimation a posteriori de l'erreur dans le problème de Stokes (en particulier, on introduit une approximation  $v_h$  de la fonction  $v$  dans  $X_h$ ).

**Proposition :** On suppose que l'espace  $X_h$  contient

$$Y_h = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega)^d; \forall K \in \mathcal{T}_h, v_h|_K \in \mathcal{P}_1(K)^d \right\}.$$

On a l'estimation a posteriori suivante

$$\|u_{\varepsilon} - u_{\varepsilon h}\|_{H^1(\Omega)^d} + \|p_{\varepsilon} - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \eta_{\varepsilon} + \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\eta_K^2 + h_K^2 \|f - f_h\|_{L^2(K)^d}^2) \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

## Une majoration des indicateurs

**Idée :** Dans la première équation du résidu

$$\forall q \in L_0^2(\Omega),$$

$$\varepsilon \int_{\Omega} p_{\varepsilon h}(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = -\varepsilon \int_{\Omega} (p_{\varepsilon} - p_{\varepsilon h})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon})(\mathbf{x}) q(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

on prend  $q$  égal à  $p_{\varepsilon h}$ .

**Proposition :** On a l'estimation suivante

$$\eta_{\varepsilon} \leq c |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\varepsilon}|_{H^1(\Omega)^d} + \varepsilon \|p_{\varepsilon} - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Idée :** Dans la seconde équation du résidu, on prend  $v$  successivement égal à

$$v_K = (\mathbf{f}_h + \Delta \mathbf{u}_{\varepsilon h} - \text{grad } p_{\varepsilon h}) \psi_K \quad \text{sur } K, \quad 0 \quad \text{ailleurs,}$$

$$v_e = \mathcal{R}([\partial_\nu \mathbf{u}_{\varepsilon h} - p_{\varepsilon h} \mathbf{n}] \psi_e) \quad \text{sur } K \cup K', \quad 0 \quad \text{ailleurs,}$$

puis  $q$  égal à

$$q_K = \text{div } \mathbf{u}_{\varepsilon h} \quad \text{sur } K, \quad 0 \quad \text{ailleurs.}$$

**Proposition :** On a l'estimation suivante, pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,

$$\eta_K \leq c \left( |\mathbf{u} - \mathbf{u}_\varepsilon|_{H^1(K)^d} + |\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{\varepsilon h}|_{H^1(\omega_K)^d} \right. \\ \left. + \|p_\varepsilon - p_{\varepsilon h}\|_{L^2(\Omega_K)} + h_K \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_h\|_{L^2(\omega_K)^d} \right),$$

où  $\omega_K$  désigne l'union des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  partageant au moins un côté ou une face avec  $K$ .

**Estimations optimales, une estimation locale en espace !**

Quelques expériences numériques

réalisées avec le code FreeFem++

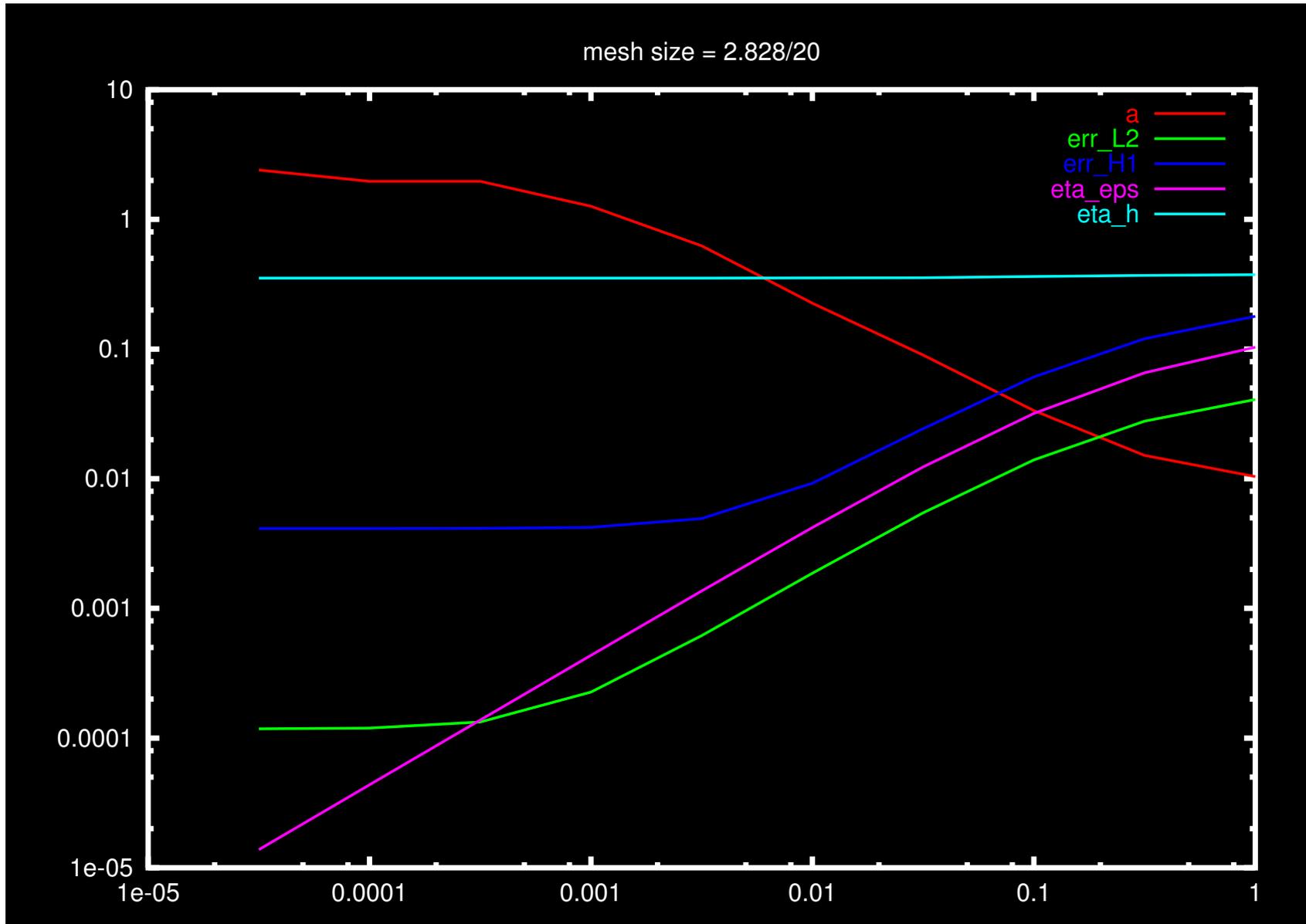
F. Hecht, O. Pironneau

Élément fini de Taylor–Hood, maillage uniforme

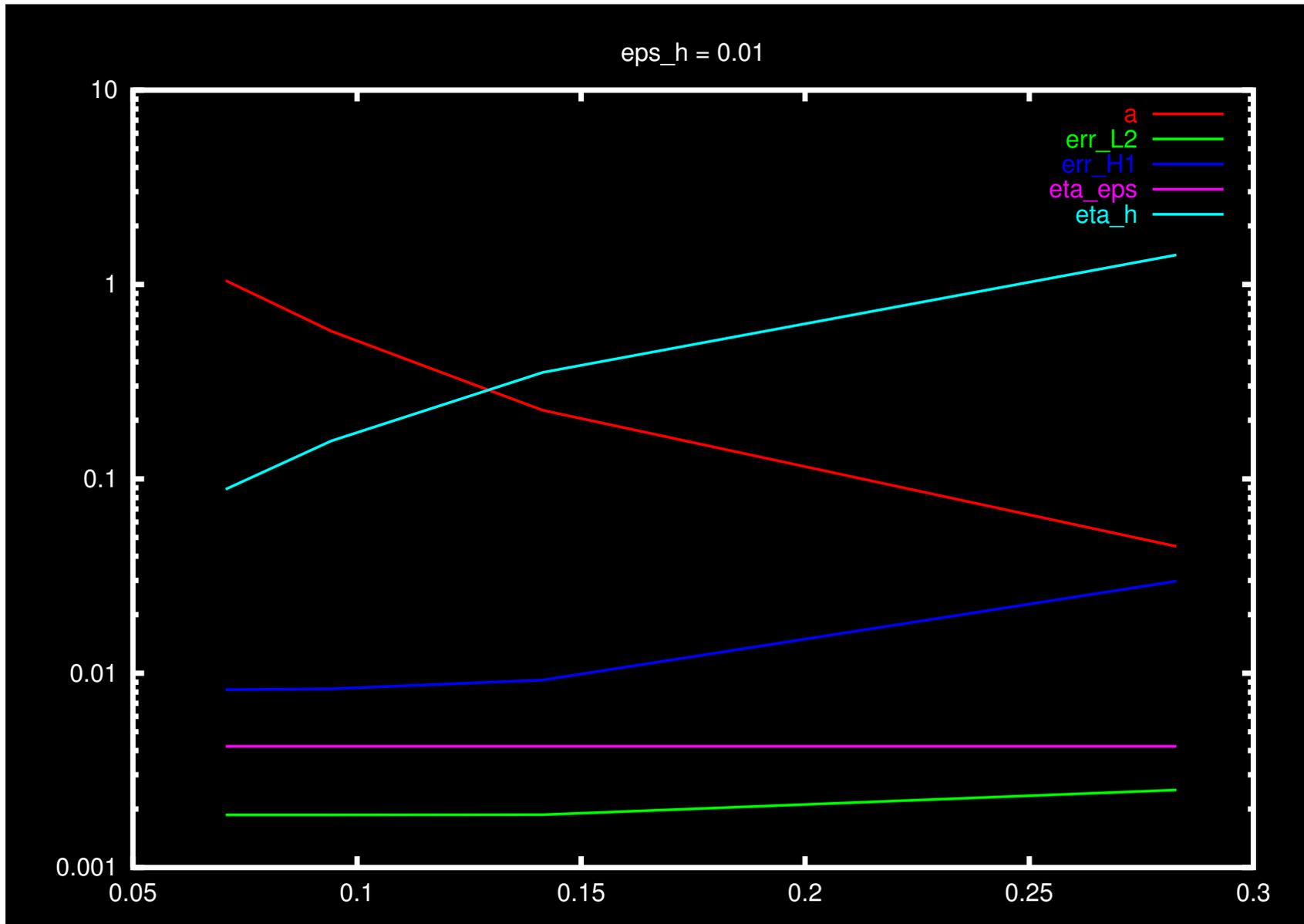
Solution régulière dans un carré

- Influence du paramètre de pénalisation
- Influence du maillage

$$h = \sqrt{2} 10^{-1}$$



$$\varepsilon = 10^{-2}$$

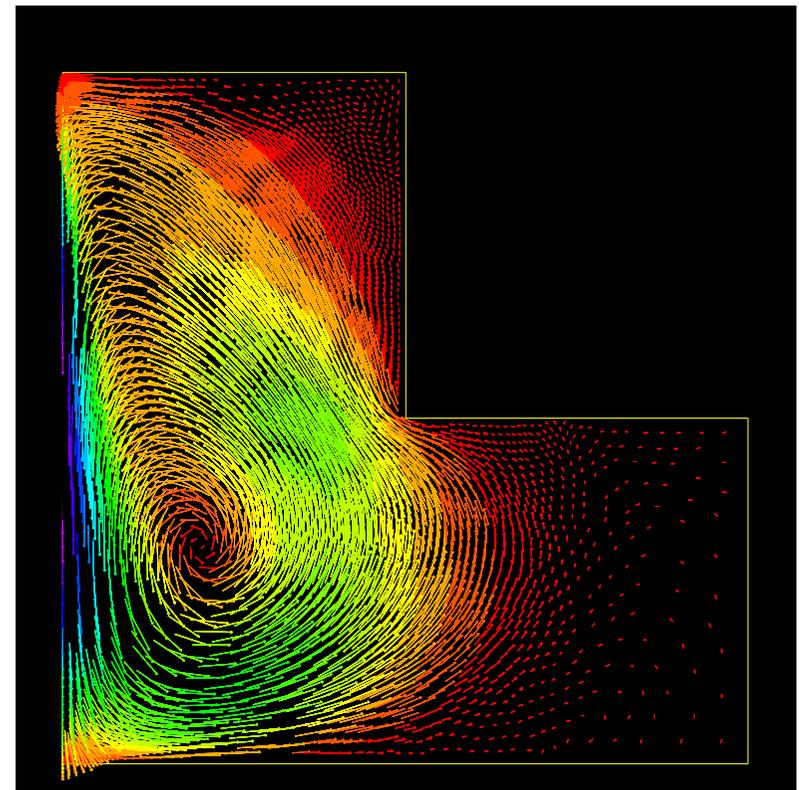
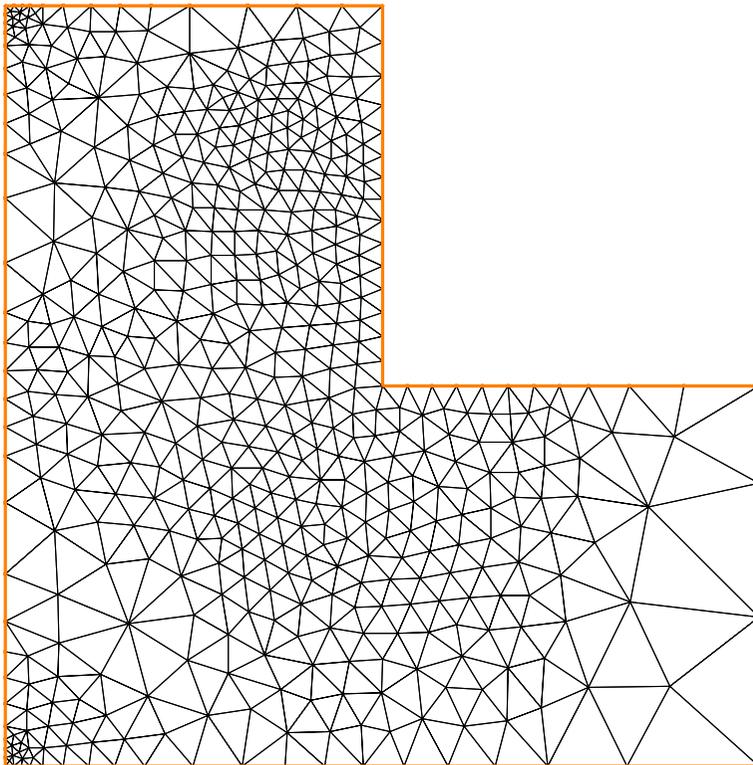


- Équations de Navier–Stokes

FreeFem++ F. Hecht, O. Pironneau

Données : viscosité  $\nu = 10^{-2}$  et vitesse tangentielle sur bord gauche non nulle.

$$\varepsilon = 0,14 \times 10^{-2}$$



# Adaptation en temps et en espace pour une équation parabolique

Optimisation de la discrétisation de l'équation de la chaleur

Travail commun avec A. Bergam et Z. Mghazli

Soit  $\Omega$  un ouvert borné connexe à frontière lipschitzienne de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  ou  $3$ , et soit  $T$  un réel positif.

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \times ]0, T[, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ u|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

- Formulation variationnelle (en espace)
- Le problème semi-discret en temps
- Le problème discret
- Analyse a posteriori

## Formulation variationnelle (en espace)

Trouver  $u$  dans  $C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$  vérifiant

$$u|_{t=0} = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et tel que, pour presque tout  $t$  dans  $]0, T[$ ,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v).$$

**Pour toutes données  $f$  dans  $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et  $u_0$  dans  $L^2(\Omega)$ , l'équation admet une solution unique  $u$  dans**

$$u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega)).$$

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\partial_t u(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) = (f(t), v).$$

**En outre, si l'on définit la norme  $[[\cdot]]$  par**

$$[[v]]^2(t) = \|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds,$$

**cette solution vérifie pour tout  $t$ ,  $0 \leq t \leq T$ ,**

$$[[u]]^2(t) \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds.$$

**Et, par suite,**

$$\int_0^t \|\partial_t u(s)\|_{H^{-1}(\Omega)^d}^2 ds \leq 2 \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \right).$$

## Le problème semi-discret en temps

par schéma d'Euler implicite

On divise l'intervalle  $[0, T]$  en  $N$  intervalles  $[t_{n-1}, t_n]$ , avec  $t_0 = 0$  et  $t_N = T$ .

$$\tau_n = t_n - t_{n-1}, \quad \tau = (\tau_1, \dots, \tau_N), \quad |\tau| = \max_{1 \leq n \leq N} \tau_n, \quad \sigma_\tau = \max_{2 \leq n \leq N} \frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}.$$

Trouver  $(u^n)_{0 \leq n \leq N}$  dans  $L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)^N$  vérifiant

$$u^0 = u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

et tel que, pour  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (u^n, v) + \tau_n (\nabla u^n, \nabla v) = (u^{n-1}, v) + \tau_n (f(t_n), v).$$

Pour toutes données  $f$  dans  $\mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et  $u_0$  dans  $L^2(\Omega)$ , l'équation admet une solution unique  $(u^n)_{0 \leq n \leq N}$ .

À toute famille  $(v^n)_{0 \leq n \leq N}$ , on associe la fonction  $v_\tau$  affine sur chaque intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$  et égale à  $v^n$  en  $t_n$ ,  $0 \leq n \leq N$ .

$$\forall t \in [t_{n-1}, t_n], \quad v_\tau(t) = v^n - \frac{t_n - t}{\tau_n} (v^n - v^{n-1})$$

En outre, si l'on définit la norme  $[[\cdot]]_\tau$  par

$$[[v_\tau]]_\tau^2(t_n) = \|v^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \|\nabla v^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2,$$

cette solution vérifie pour  $1 \leq n \leq N$ ,

$$[[u_\tau]]_\tau^2(t_n) \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \|f(t_m)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2.$$

Et, par suite,

$$\sum_{m=1}^n \tau_m \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau_n} \right\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 \leq 2 \left( \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_0^t \|f(s)\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 ds \right).$$

**Lemme :** Pour toute famille  $(v^n)_{0 \leq n \leq N}$  de  $H^1(\Omega)^n$ , on a l'équivalence

$$\frac{1}{4} [[v_\tau]]_\tau^2(t_n) \leq [[v_\tau]]^2(t_n) \leq \frac{1}{2} (1 + \sigma_\tau) [[v_\tau]]_\tau^2(t_n) + \frac{1}{2} \tau_1 \|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

**Démonstration :** On doit comparer les deux quantités

$$\|v^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|\nabla v_\tau(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds \quad \text{et} \quad \|v^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{m=1}^n \tau_m \|\nabla v^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2.$$

On note que

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \|\nabla v_\tau(s)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 ds = \frac{\tau_m}{3} \left( \|\nabla v^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \|\nabla v^{m-1}\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + (\nabla v^m, \nabla v^{m-1}) \right).$$

On conclut en minorant et majorant le dernier terme par diverses inégalités  $2ab \geq -\frac{a^2}{\varepsilon} - \varepsilon b^2$  et  $2ab \leq \frac{a^2}{\varepsilon} + \varepsilon b^2$ .

L'estimation d'erreur a priori se traduit une majoration de l'erreur  $[[u - u_\tau]]$  de l'ordre  $|\tau|$ .

## Le problème discret en temps et en espace

On suppose que  $\Omega$  est un polygone ou un polyèdre et on introduit, pour tout  $n$ ,  $0 \leq n \leq N$ , une famille régulière  $(\mathcal{T}_{nh})_h$  de triangulations de  $\Omega$  par des triangles ou des tétraèdres. Il est d'usage que  $h_n$  désigne le maximum des diamètres des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$ .

$$X_{nh} = \left\{ v_h \in H^1(\Omega); \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, v_h|_K \in \mathcal{P}_k(K) \right\}, \quad X_{nh}^0 = X_{nh} \cap H_0^1(\Omega).$$

$\Pi_h$  opérateur d'interpolation ou de projection à valeurs dans  $X_{0h}$ .

*Trouver  $(u_h^n)_{0 \leq n \leq N}$  dans  $X_{0h} \times \prod_{n=1}^N X_{nh}^0$  vérifiant*

$$u_h^0 = \Pi_h u_0 \quad \text{dans } \Omega,$$

*et tel que, pour  $1 \leq n \leq N$ ,*

$$\forall v_h \in X_{nh}, \quad (u_h^n, v_h) + \tau_n (\nabla u_h^n, \nabla v_h) = (u_h^{n-1}, v_h) + \tau_n (f(t_n), v_h).$$

**Pour toutes données  $f$  dans  $\mathcal{C}^0(0, T; H^{-1}(\Omega))$  et  $u_0$  dans  $L^2(\Omega)$ , l'équation admet une solution unique  $(u_h^n)_{0 \leq n \leq N}$ .**

**Remarques :**

**1) On peut prouver les mêmes estimations de stabilité que pour la solution  $u_\tau$ .**

**2) Sous certaines hypothèses de régularité de la solution  $u_\tau$  et si toutes les triangulations  $\mathcal{T}_{nh}$  coïncident, l'estimation d'erreur a priori se traduit une majoration de l'erreur  $[u_\tau - u_{h\tau}]_\tau$  de l'ordre  $h^s(h^2 + |\tau|)$  pour tout  $s \leq k$ , où  $h$  désigne le maximum des  $h_m$ ,  $0 \leq m \leq N$ .**

## Analyse a posteriori

On introduit deux familles d'indicateurs d'erreur

- Indicateurs d'erreur en temps

Pour  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\eta_n = \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u_h^n - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

C. Johnson, Y.-Y. Nie, V. Thomée

Ces indicateurs sont locaux en temps mais globaux en espace. Ils sont faciles à calculer dès que la solution discrète est connue jusqu'au temps  $t_n$ .

- **Indicateurs d'erreur en espace**

$\mathcal{E}_K$  : ensemble des côtés ou faces de  $K$  qui ne sont pas contenus dans  $\partial\Omega$ .

$\chi_d$  : constante égale à 0 en dimension  $d = 1$ , à 1 en dimension  $d \geq 2$ .

Pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_h$ ,

$$\eta_{n,K} = h_K \left\| f_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \Delta u_h^n \right\|_{L^2(K)} + \frac{1}{2} \chi_d \sum_{e \in \mathcal{E}_K} h_e^{\frac{1}{2}} \| [\partial_\nu u_h^n] \|_{L^2(e)},$$

où  $f_h^n$  est une approximation polynomiale par morceaux de  $f(t_n)$ .

**R. Verfürth**  
**C.B., B. Métivet**

## Une estimation a posteriori de l'erreur

**But :** On veut majorer  $[[u - u_{h\tau}]](t_n)$  en fonction des  $\eta_n$ , des  $\eta_{n,K}$  et des données.

$$[[u - u_{h\tau}]](t_n) \leq [[u - u_\tau]](t_n) + [[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n).$$

**Idée :** Une équations du résidu pour majorer chaque terme.

## Équation du résidu pour le premier terme :

$$\begin{aligned}\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad (\partial_t(u - u_\tau)(t), v) + (\nabla(u - u_\tau)(t), \nabla v) \\ = (f(t) - f(t_n), v) - ((\nabla u_\tau(t) - \nabla u^n), \nabla v).\end{aligned}$$

En prenant  $v$  égal à  $u - u_\tau$  et en intégrant sur  $[0, t_n]$ , on obtient la majoration de

$$[[u - u_\tau]](t_n) \leq c \left( \sum_{m=1}^n \int_{t_{m-1}}^{t_m} (\|f(s) - f^n\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 + \|\nabla(u_\tau(s) - u^n)\|_{L^2(\Omega)^d}^2) ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On note que, sur l'intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ ,

$$u_\tau(s) - u^n = -\frac{t_n - s}{\tau_n} (u^n - u^{n-1}),$$

d'où

$$\|\nabla(u_\tau - u^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega)^d)} = \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^n - u^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}.$$

**Grâce à une inégalité triangulaire, on en déduit**

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_\tau - u^n)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega)^d)} &\leq \eta_n + \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \left(\frac{\tau_n}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^{n-1} - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

**On conclut en sommant le carré de cette inégalité et en utilisant la propriété  $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$ .**

$\pi_\tau$  : opérateur d'interpolation à valeurs dans l'espace des fonctions constantes sur chaque intervalle  $[t_{n-1}, t_n]$ .

**Proposition :** On a l'estimation a posteriori suivante, pour  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\begin{aligned} [[u - u_\tau]](t_n) &\leq c \left( (1 + \sigma_\tau)^{\frac{1}{2}} [[u_\tau - u_{h_\tau}]](t_n) + \left( \sum_{m=1}^n \eta_m^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0, t_n; H^{-1}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

## Équation du résidu pour le second terme :

$$\begin{aligned} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \forall v_h \in X_h^0, \\ (u^n - u_h^n, v) + \tau_n (\nabla(u^n - u_h^n), \nabla v) \\ = (u^{n-1} - u_h^{n-1}, v) \\ + \tau_n \sum_{K \in \mathcal{T}_{nh}} \left( \int_K \left( f(t_n) - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \Delta u_h^n \right) (\mathbf{x}) (v - v_h)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \sum_{e \in \mathcal{E}_K} \int_e [\partial_\nu u_h^n](r) (v - v_h)(r) \, dr \right). \end{aligned}$$

En prenant  $v$  égal à  $u^n - u_h^n$  et  $v_h$  égal à une “bonne” approximation de  $v$ , on obtient une borne supérieure pour  $[[u_\tau - u_{h\tau}]]_\tau(t_n)$ .

Choix de  $v_h$  :

- En dimension  $d = 1$ , on prend  $v_h$  égal à l'interpolé de Lagrange de  $v$  aux extrémités de  $K$ , de sorte que

$$\int_e [\partial_\nu u_h^n](r)(v - v_h)(r) dr = 0.$$

- En dimension  $d \geq 2$ , on prend  $v_h$  égal à l'image de  $v$  par l'opérateur de Clément.

D'où l'apparition de  $\chi_d$ .

**Proposition :** On a l'estimation a posteriori suivante, pour  $1 \leq n \leq N$ ,

$$[[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n) \leq c \left( \sum_{m=1}^n \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \left( \eta_{m,K}^2 + h_K^2 \|f(t_m) - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c \|u_0 - \Pi_h u_0\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Théorème :** On a l'estimation a posteriori globale suivante, pour  $1 \leq n \leq N$ ,

$$[[u - u_{h\tau}]](t_n) \leq c \left( \sum_{m=1}^n \eta_m^2 + \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \left( \eta_{m,K}^2 + h_K^2 \|f(t_m) - f_h^m\|_{L^2(K)}^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} + c \left( \|u_0 - \Pi_h u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} \right).$$

**Remarque :** Sont également majorées par le membre de droite de l'inégalité précédente

- les quantités

$$[[u - u_\tau]](t_n) \quad \text{et} \quad [[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n),$$

- les quantités

$$\|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} \quad \text{et} \quad \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}.$$

## Une majoration des indicateurs

**Idée :** Dans la première équation du résidu, on prend  $v$  égal à  $u^n - u^{n-1}$ .

$$\begin{aligned} \|\nabla(u_h^n - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} &\leq \|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\Omega)^d} + \|\nabla(u^{n-1} - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} \\ &\quad + \|\nabla(u^n - u^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

**Proposition :** On a l'estimation suivante, pour  $1 \leq n \leq N$ ,

$$\begin{aligned} \eta_n &\leq c \left( \|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\Omega)^d} + \sigma_\tau^{\frac{1}{2}} \|\nabla(u^{n-1} - u_h^{n-1})\|_{L^2(\Omega)^d} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla(u - u_\tau)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega)^d)} + \|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Omega))} \right. \\ &\quad \left. + \|f - \pi_\tau f\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Omega))} \right). \end{aligned}$$

**Estimation locale en temps !**

**Idée :** Dans la seconde équation du résidu, on prend  $v$  successivement égal à

$$v_K = \left( f_h^n - \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\tau_n} + \Delta u_h^n \right) \psi_K \quad \text{sur } K, \quad 0 \quad \text{ailleurs,}$$

$$v_e = \mathcal{L}_{e,\kappa} \left( [\partial_\nu u_h^n] \psi_e \right) \quad \text{sur } \kappa \in \{K, K'\}, \quad 0 \quad \text{ailleurs.}$$

**Proposition :** On a l'estimation suivante, pour  $1 \leq n \leq N$  et pour tout élément  $K$  de  $\mathcal{T}_{nh}$ ,

$$\eta_{n,K} \leq c \left( \|\nabla(u^n - u_h^n)\|_{L^2(\omega_K)^d} + \left\| \frac{(u^n - u_h^n) - (u^{n-1} - u_h^{n-1})}{\tau_n} \right\|_{H^{-1}(\omega_K)} + h_K \|f(t_n) - f_h^n\|_{L^2(\omega_K)} \right),$$

où  $\omega_K$  désigne l'union des éléments de  $\mathcal{T}_{nh}$  partageant au moins un côté ou une face avec  $K$ .

**Estimation locale en temps et en espace !**

## Conclusions

- Estimations parfaitement optimales au sens indiqué précédemment.

En particulier, la quantité

$$[[u - u_\tau]](t_n) + [[u_\tau - u_{h\tau}]](t_n) \\ + \|\partial_t(u - u_\tau)\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))} + \|\partial_t(u_\tau - u_{h\tau})\|_{L^2(0,t_n;H^{-1}(\Omega))}$$

est équivalente, aux termes portant sur les données près, à la quantité

$$\left( \sum_{m=1}^n \eta_m^2 + \tau_m \sum_{K \in \mathcal{T}_{mh}} \eta_{m,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

avec des constantes d'équivalence indépendantes de  $\tau$  et  $h$ .

- Les indicateurs  $\eta_m$  représentent l'erreur locale en temps, les indicateurs  $\eta_{m,K}$  représentent l'erreur locale en temps et en espace.

$\implies$  adaptation du pas de temps et du maillage.

- Indicateurs d'erreur faciles à calculer.

## Références

- [1] Y. Achdou, C. Bernardi, F. Coquel — A priori and a posteriori analysis of finite volume discretizations of Darcy's equations, *Numer. Math.* **96** (2003), 17–42.
- [2] A. Bergam, C. Bernardi, Z. Mghazli — A posteriori analysis of the finite element discretization of a nonlinear parabolic equation, *Math. Comput.* **74** (2005), 1117–1138.
- [3] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — A posteriori analysis of a penalty method and application to the Stokes problem, *Math. Models and Methods in Applied Sciences* **13** (2003), 1599–1628.
- [4] C. Bernardi, V. Girault, F. Hecht — Choix du paramètre de pénalisation pour la discrétisation par éléments finis des équations de Navier–Stokes, *C.R. Acad. Sci. Paris* **336** série I (2003), 671–676.
- [5] C. Bernardi, B. Métivet, R. Verfürth — Analyse numérique d'indicateurs d'erreur, dans *Maillage et adaptation*, édité par P.-L. George, Hermès (2001), 251–278.
- [6] M. Braack, A. Ern — A posteriori control of modeling errors and discretization errors, *SIAM J. Multiscale Modeling and Simulation* **1** (2003), 221–238.
- [7] R. Verfürth — *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*, Wiley and Teubner Mathematics (1996).