THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)

préparée à l'Institut Fourier
Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS - UJF

Positivité locale des fibrés en droites amples adjoints

Amaël BROUSTET

Soutenance à Grenoble le 24 septembre 2007 devant le jury :

Mauro BELTRAMETTI (Professeur, Universita' di Genova)
Laurent BONAVERO (Maître de Conférence HDR, Institut Fourier), Directeur
Olivier DEBARRE (Professeur, Université de Strasbourg)
Jean-Pierre DEMAILLY (Professeur, Institut Fourier)
Philippe EYSSIDIEUX (Professeur, Institut Fourier)

Au vu des rapports de Mauro BELTRAMETTI et Olivier DEBARRE

Positivité locale des fibrés en droites amples adjoints.

Amaël BROUSTET

18 septembre 2007

Remerciements

Il y a 4 ans, Laurent Bonavero acceptait de diriger cette thèse ; cela n'avait alors rien d'une évidence. Depuis, il m'a toujours prodigué aide et encouragement, et m'a formé au métier de chercheur avec le dynamisme qui lui est propre. Je lui en suis profondément reconnaissant.

Je tiens à remercier vivement Olivier Debarre d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Sa relecture attentive et les commentaires en découlant ont grandement amélioré une première version de ce manuscrit.

Je suis également très reconnaissant à Mauro Beltrametti d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Ses remarques m'ont ouvert de nouvelles pistes de recherche.

Jean-Pierre Demailly et Philippe Eyssidieux ont bien voulu me faire l'honneur de faire partie du jury, je les en remercie.

Merci aussi aux membres du projet «aspects algébriques et analytiques de la géométrie complexe en dimension supérieure» pour toutes les discussions mathématiques. En particulier, je tiens à remercier Sébastien Boucksom qui a accepté avec énormément de patience de répondre à mes nombreuses questions. La deuxième partie de ce texte lui doit beaucoup. Merci aussi à Stéphane Druel qui a toujours été disponible pour répondre à mes questions au cours de ces années.

Comme tout mathématicien de l'Institut Fourier, je dois énormément à l'ensemble du personnel administratif et technique travaillant à nos côtés. Durant ma thèse, j'ai plus particulièrement bénéficié de l'aide d'Arlette puis de Martine, de celle de Brigitte, Corinne, Françoise, Gabrielle, Mickaël, Zineb et de l'ensemble du personnel de la bibliothèque. J'ai aussi eu l'occasion d'apprécier la bonne humeur de Robert, de l'équipe de la cellule mathdoc et de Géraldine.

Pour tous les bons moments pendant ces années passées à l'Institut merci à Andreas, Fabrice, Maxime, Michel, Adrien, Catriona, Tanguy et à tous les autres que je n'oublie pas.

Je pense aussi à tous ceux qui en dehors des mathématiques étaient là, que ce soit pour évoquer le bon vieux temps, refaire le monde ou jouer.

Ma famille a toujours été présente et m'a toujours soutenu et encouragé : merci pour tout !

آناهیتا ازت ممنونم ...

Table des matières

Prologue

Ce mémoire traite de la positivité locale des fibrés en droites amples adjoints, sur des variétés projectives *complexes* qui seront le plus souvent lisses et de dimension 3.

Soit X une variété projective lisse, L un fibré en droites ample, x un point de X. La *constante de Seshadri* de L en x est le réel

$$\varepsilon(X, L; x) = \inf_{x \in C \subset X} \frac{L \cdot C}{\operatorname{mult}_x C},$$

où la borne inférieure porte sur les courbes passant par le point x.

On peut définir de la même manière les constantes de Seshadri d'un diviseur nef D. On a alors $\varepsilon(X, \mathcal{O}_X(D); x) = \varepsilon(X, D; x)$ pour tout x.

Introduites par Demailly dans [Dem92] avec pour but de montrer des résultats en direction de la conjecture de Fujita, ces constantes gouvernent l'ordre asymptotique des jets qu'un fibré en droites ample sépare asymptotiquement. Ces constantes sont une version locale d'un invariant apparaissant dans un critère d'amplitude de Seshadri. En effet, Seshadri a montré (voir [Har70]) qu'un diviseur nef D est ample si et seulement si la borne inférieure des constantes de Seshadri du diviseur est strictement positive, c'est-à-dire

$$\inf_{x \in X} \varepsilon(X, D; x) > 0.$$

Leur minoration entraîne l'existence de bornes effectives concernant l'existence de morphismes birationnels associés à des fibrés en droites adjoints. Par exemple, s'il existe un point $x \in X$ tel que $\varepsilon(X, D; x) \geqslant 1$, alors la série linéaire $|K_X + (2n+1)D|$ définit une application rationnelle birationnelle sur son image.

Le calcul de ces constantes est en général assez difficile. Il n'a été fait que pour un nombre restreint de cas particuliers. On peut citer [Gar06] où García calcule notamment les valeurs explicites des constantes de Seshadri des diviseurs amples sur certaines surfaces réglées et [Bau98] où Bauer et Szemberg calculent les constantes de Seshadri des diviseurs amples sur les surfaces abéliennes simples.

Le premier résultat de ce mémoire est le calcul explicite des constantes de Seshadri du diviseur anticanonique en tout point des surfaces de del Pezzo lisses. On note $X_r \longrightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement du plan en r points distincts $x_1, \ldots, x_r$. On suppose que ces points sont en position générale, de sorte que X_r soit une surface de del Pezzo. Pour une définition plus précise, on pourra voir la définition 36.

Théorème 1 (Théorème 38) *Si $r \leqslant 5$, la constante de Seshadri de $-K_{X_r}$ au point x vaut :*

- $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 2$ *si x est en position générale,*

- $\varepsilon(-K_{X_r};x) = 1$ *sinon.*

Si $r = 6$*, la constante de Seshadri de* $-K_{X_6}$ *au point* x *vaut :*
- $\varepsilon(-K_{X_6};x) = 3/2$ *si* x *est en position générale,*
- $\varepsilon(-K_{X_6};x) = 1$ *sinon.*

Si $r = 7$*, la constante de Seshadri de* $-K_{X_7}$ *au point* x *vaut :*
- $\varepsilon(-K_{X_7};x) = 4/3$ *si* x *est en position générale,*
- $\varepsilon(-K_{X_7};x) = 1$ *sinon.*

Si $r = 8$*, les constantes de Seshadri de* $-K_{X_8}$ *valent* $\frac{1}{2}$ *en au plus* 12 *points n'appartenant pas au diviseur exceptionnel et* 1 *partout ailleurs.*

En général, les constantes de Seshadri d'un diviseur ample sont comprises entre 0 et le volume de ce diviseur mais peuvent être *a priori* quelconques dans cet intervalle. Elles peuvent notamment être arbitrairement petites comme le montrent des exemples de Miranda. Ein, Lazarsfeld et Küchle ont cependant montré que les constantes de Seshadri jouissaient d'une surprenante propriété de minoration universelle si l'on se restreint à des points en *position* dite *très générale*, c'est-à-dire des points en dehors d'une union dénombrable de sous-variétés strictes.

Théorème 2 (Ein, Lazarsfeld, Küchle, [EKL95] - Nakamaye [Nak05]) *Soit* X *une variété projective de dimension* n *et* A *un diviseur ample sur* X*. Pour tout point en position très générale* $x \in X$*, on a*

$$\varepsilon(X, A; x) \geqslant \frac{3n+1}{3n^2}.$$

Il faut noter que, par une propriété de semi-continuité inférieure des constantes de Seshadri, ces dernières ne dépendent pas du point si celui-ci est en position très générale.

En dimension 2, Ein et Lazarsfeld avaient précédemment montré dans [EL93] que les constantes de Seshadri d'un diviseur ample A sur une surface S lisse vérifiaient $\varepsilon(S, A; x) \geqslant 1$ pour tout point x en position très générale. La conjecture suivante est donc naturelle :

Conjecture 3 ([Laz04a]) *Soit* X *une variété projective,* D *un diviseur gros et nef sur* X*. Alors*

$$\varepsilon(X, D; x) \geqslant 1$$

pour tout point $x \in X$ *en position très générale.*

Depuis [EKL95], quelques réponses partielles ont été obtenues. Lazarsfeld a complètement traité le cas des variétés abéliennes dans [Laz96] ; Di Rocco a montré dans [DR99] que la conjecture était vérifiée pour les variétés toriques ; Lee, dans [Lee03], a vérifié la conjecture pour les variétés de Fano de dimension 3 dont le système linéaire anticanonique est sans point de base.

Dans la première partie de ce mémoire, on utilise des résultats de non-annulation des sections globales des fibrés adjoints afin d'obtenir une minoration optimale des constantes de Seshadri des diviseurs amples pour certaines classes de variétés. On montre que la conjecture précédente est vraie pour :

1. **(Théorème 45)** n'importe quel diviseur ample sur une variété lisse X de dimension 3 avec $-K_X$ nef,
2. **(Proposition 46)** tout diviseur de Cartier gros et nef D tel que $D - K_X$ soit gros et nef sur une variété de dimension 3 à singularités canoniques X avec K_X nef,
3. **(Proposition 70)** tout diviseur de Cartier gros et nef D avec $-(K_X + \Delta_X) \equiv (n - c + 1)D$ pour une paire (X, Δ_X) de dimension n presque de Fano et klt (voir ci-dessous et les définitions 28 et 30) et un rationnel $c < 4$,
4. **(Théorème 71)** tout diviseur ample D sur une variété X de dimension $n \geqslant 3$, presque de Fano, factorielle, à singularités terminales et vérifiant

$$-K_X \equiv (n - c + 1)H$$

pour un diviseur gros et nef H et un entier $c \leqslant 3$.
5. **(Théorème 74)** tout diviseur ample D sur une variété de Fano lisse de dimension 4 vérifiant $-K_X \equiv rD$ pour un entier r.

La méthode est la suivante : ne pouvant pas minorer les constantes de Seshadri d'un diviseur ample en un point quelconque, on peut essayer de procéder par récurrence sur la dimension, en faisant varier le point considéré le long du lieu de base d'une série linéaire bien choisie. En effet, considérons une variété projective lisse X et un diviseur ample L sur X. Supposons qu'on se donne une série linéaire $V \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(L))$ non réduite à zéro, de lieu de base B. Alors pour tout point x en position générale dans X, les constantes de Seshadri de L vérifient

$$\varepsilon(X, L; x) \geqslant \min\{1; \varepsilon(B, L_{|B}; y)\}.$$

Le cas le plus simple s'obtient en choisissant pour V, lorsque c'est possible, la série linéaire engendrée par une section non nulle de $\mathcal{O}_X(L)$. Dans le cas où L est de la forme $L = K_X + A$ avec A ample, une conjecture de Kawamata [Kaw00] prédit alors que

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) \neq 0.$$

En dimension 3, cette conjecture découle (dans certains cas) de la pseudo-effectivité de la seconde classe de Chern du fibré tangent de la variété. On peut ainsi espérer se ramener à la situation bien maîtrisée des surfaces.

En utilisant les idées présentées ci-dessus et quelques éléments de classification dus à Bauer et Peternell [BP04] des variétés de dimension 3 dont le fibré anticanonique est nef, on est à même de montrer le théorème 45.

À l'opposé de ces variétés, on retrouve les variétés minimales, c'est-à-dire les variétés à singularités canoniques dont le diviseur canonique est nef. On obtient par les mêmes méthodes la proposition 46.

Il est encore possible, sous certaines conditions, de se ramener au cas des surfaces pour des variétés de dimension strictement supérieure à 3.

Commençons par la proposition 70. Concentrons-nous en premier lieu sur les hypothèses. On passe du monde lisse au monde singulier et le langage des paires fait son apparition. Il s'agit du cadre maintenant classique dans lequel le programme minimal de Mori prend place, où X est une variété normale, le diviseur canonique K_X est défini en tant que diviseur de Weil et perturbé par une *frontière* Δ_X de sorte que la somme $(K_X + \Delta_X)$ soit $\mathbb{Q}$-Cartier (Cartier à multiplication près par un entier). La notion de paire klt est une hypothèse sur les singularités de la paire. Lorsque $-(K_X+\Delta_X)$ est gros et nef, ce qui est une généralisation naturelle, en un sens, de ample, on dit que la paire est presque de Fano. On peut maintenant expliquer en quelques mots la preuve de ce résultat.

La série linéaire complète associée au diviseur D ci-dessus possède une propriété importante : il existe un membre $W \in |D|$ peu singulier. Ceci permet de doter W d'une structure de paire. Si $n > r$, on voit par adjonction que le diviseur log-canonique $(K_W + \Delta_W)$ de cette paire va encore vérifier les hypothèses de la proposition ci-dessus. Par récurrence sur la dimension, ceci permet de minorer les constantes de Seshadri de H en se ramenant au cas d'une surface.

Minorer les constantes de Seshadri du diviseur anticanonique d'une variété n'est pas si anodin que cela. En acceptant de s'intéresser à une classe plus restreinte de variétés en terme de singularités, la théorie de l'adjonction, telle que présentée par exemple dans le livre de Beltrametti et Sommese [BS95], permet dans notre situation de réduire la minoration des constantes de Seshadri de n'importe quel diviseur ample à celles du diviseur anticanonique. On obtient ainsi le théorème 71.

Dans les deux résultats précédemment cités, l'ajout de singularités, loin d'être artificiel change notablement la portée du résultat. En effet, Wiśniewski a montré dans [Wiś90] que si X est lisse de Fano et l'indice[1] de X vérifie $i(X) > \frac{1}{2}\dim X + 1$ alors $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$. Cela signifie dans notre cas que, si X est lisse de Fano et de dimension $n \geqslant 7$, le théorème 71 ne donne pas plus d'information que la proposition 70. Le fait d'autoriser des singularités pour X, même modérées, change complètement ceci puisqu'à l'heure actuelle, il n'est pas conjecturé d'analogue au résultat de Wiśniewski dans le cas singulier.

Enfin, on peut mentionner que l'on obtient, pour les variétés de Fano de dimension 4, une minoration des constantes de Seshadri du diviseur anticanonique (voir le théorème 74).

Une seconde partie, plus technique, a vu le jour en essayant de comprendre quelles sont les conséquences de l'existence sur une variété d'un diviseur ample dont la constante de Seshadri est petite en un point.

En suivant les idées données au début de la présentation de la première partie, on montre que le lieu de base d'une sous-série linéaire d'un diviseur ample donne des informations sur les constantes de Seshadri de ce diviseur en tout point en position très générale. Ceci permet d'espérer minorer les constantes de Seshadri par récurrence sur la dimension.

C'est pour pouvoir utiliser ce résultat que l'on montre ensuite, en utilisant des techniques d'extensions de sections adjointes à l'aide d'idéaux multiplicateurs, que la conjecture de Kawamata est vraie en dimension 3 pour les diviseurs de “grand” volume.

[1] l'entier $n - c + 1$ apparaissant au point 4 ci-dessus.

Théorème 4 (Théorème 89) *Soit X une variété projective lisse de dimension 3, L un diviseur ample sur X. Supposons que $\sqrt[3]{L^3} > 3$ et que $K_X + L$ soit nef. Alors*

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) \neq 0.$$

Une "petite" constante de Seshadri implique l'existence d'un diviseur gros et non nef sur l'éclatement de la variété au point en question. En perturbant le diviseur canonique de la variété par un tel diviseur et en utilisant le théorème du cône, on peut espérer montrer l'existence de courbes rationnelles passant par tout point de la variété. Lorsque la variété n'est pas uniréglée, on obtient ainsi une contradiction qui implique une minoration des constantes de Seshadri. Conjugué au résultat de non-annulation ci-dessus, cet argument permet d'obtenir :

Corollaire 5 (Corollaire 90) *Soit X une variété projective lisse de dimension 3, L un diviseur ample sur X. Supposons que $\sqrt[3]{L^3} > 3$ et que $K_X + L$ soit ample. On a alors $\varepsilon(K_X + L; x) \geqslant 1$ pour tout point x en position très générale dans X.*

De plus, si K_X est pseudo-effectif ou, de manière équivalente, si X n'est pas uniréglée, alors le résultat précédent reste vrai si $\sqrt[3]{L^3} \geqslant 3$.

L'étude de tels diviseurs gros et non nef m'a amené à essayer de comprendre la géométrie de certaines sous-variétés de X apparaissant comme centres de singularités log-canoniques ou comme lieu des zéros de certains idéaux multiplicateurs.

On donne ainsi une condition suffisante pour que ces centres soient uniréglés.

Théorème 6 (Théorème 124) *Soit $(X, 0)$ une paire klt, Δ une frontière sur X et W un centre de singularités log-canoniques de dimension strictement positive pour la paire (X, Δ). Supposons $(K_X + \Delta)_{|W}$ non pseudo-effectif. Alors W est uniréglé.*

On peut noter que par hypothèse, K_X est $\mathbb{Q}$-Cartier puisque $(X, 0)$ est une paire. Cela entraine que Δ est aussi $\mathbb{Q}$-Cartier.

Ce résultat est obtenu en utilisant une caractérisation du cône des diviseurs pseudo-effectifs de Boucksom, Demailly, Păun et Peternell [BDPP04] en tant que cône dual de celui des courbes mobiles. Les quatre auteurs obtiennent ainsi une caractérisation des variétés uniréglées en terme de pseudo-effectivité du diviseur canonique. Ces deux notions étant invariantes via des morphismes birationnels, elles s'appliquent facilement dans le cadre singulier en passant à des log-résolutions. Le point crucial est donc de calculer "un" diviseur canonique pour les sous-variétés concernées. Pour cela, on utilise la sous-adjonction, due à Kawamata, qui généralise à certains centres de singularités log-canoniques la formule classique d'adjonction pour des diviseurs. L'utilisation du lemme de perturbation permet de se ramener au cas où la théorie de la sous-adjonction s'applique.

On donne maintenant quelques indications sur le contenu des chapitres suivants.

Le chapitre 1 contient quelques rappels sur les constantes de Seshadri : définition, propriétés et quelques résultats fondamentaux. On finit le chapitre par trois exemples de minoration de constantes de Seshadri.

Le chapitre 2 est lui aussi un chapitre de rappels, sur les variétés dont le diviseur anticanonique n'est pas nef. On traite dans une première section le cas lisse en donnant notamment la classification des contractions élémentaires de Mori en dimension 3. Une seconde section introduit le cas singulier avec notamment les fondements du langage des paires. Ce formalisme ne sera guère utilisé avant le chapitre 5.

Dans le chapitre 3, on calcule en tout point les constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo lisses. Ces surfaces étant de Fano, on insiste particulièrement sur le rôle des courbes rationnelles. On montre à la fin de ce chapitre que la positivité du diviseur anticanonique ne peut être testée uniquement sur les courbes rationnelles. On donne notamment un exemple de surface lisse rationnellement connexe dont le diviseur anticanonique n'est pas pseudo-effectif (en particulier, il n'est pas nef) et dont l'intersection avec toute courbe rationnelle est positive.

Au chapitre 4, on s'intéresse aux variétés lisses de dimension 3. On montre que les constantes de Seshadri de beaucoup de diviseurs adjoints amples sur de telles variétés sont minorées par 1. Il s'agit du théorème 45 et de la proposition 46 présentés aux points 1 et 2 de la liste ci-dessus. Dans une première section, on généralise la minoration des constantes de Seshadri des diviseurs amples au cas des surfaces singulières éventuellement non normales. On présente ensuite la conjecture de non-annulation effective de Kawamata et ce qui est connu de cette conjecture en dimension 3. Puis on s'intéresse à quelques éléments dus à Bauer et Peternell de classification des variétés de dimension 3 dont le diviseur anticanonique est nef. On finit par les preuves des deux principaux résultats.

Le chapitre 5 traite des variétés de Fano d'indice grand. Après une brève présentation des résultats (proposition 70 et théorème 71, points 3 et 4 de la liste ci-dessus), on présente des résultats d'Ambro sur l'existence d'une échelle dans le système linéaire fondamental. On donne ensuite quelques rappels sur la théorie de l'adjonction. Après la démonstration des principaux résultats, on finit par la démonstration de la minoration optimale des constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des variétés de Fano de dimension 4.

Avec le chapitre 6 commence la partie II. Le principal résultat de ce chapitre est la preuve de la conjecture de non-annulation effective de Kawamata en dimension 3 pour les diviseurs adjoints à un diviseur de "grand" volume (théorème 4 ci-dessus). La preuve de ce résultat utilise les idéaux multiplicateurs, la notion de centre de singularités log-canoniques et la sous-adjonction de Kawamata, dans le cas d'un centre de singularités log-canoniques minimal. Une grande part de ce chapitre est consacrée à l'introduction de ces différentes notions. On conclut par la preuve de la minoration en dimension 3 des constantes de Seshadri des diviseurs amples adjoints à un diviseur de grand volume en utilisant la non-annulation effective. Pour les variétés non-uniréglées, on assouplit légèrement la condition sur le volume en exploitant la non-existence de courbes rationnelles.

Au chapitre 7, dernier chapitre de ce mémoire, on montre qu'une condition numérique simple sur la restriction d'un log-diviseur canonique permet de détecter le caractère uniréglé de certaines sous-variétés. On commence par présenter un résultat de Boucksom, Demailly, Păun et Peternell sur la caractérisation des variétés uniréglées en terme de pseudo-effectivité de leur diviseur canonique. On introduit ensuite les outils de la version générale de la sous-adjonction. On applique enfin tout ceci en prouvant que si la restriction du diviseur log-canonique d'une paire à un centre de singularités log-canoniques n'est pas pseudo-effectif, ce dernier est uniréglé. On en déduit sous une hypothèse assez forte que le lieu des zéros de certains idéaux multiplicateurs asymptotiques est uniréglé.

De façon générale, chaque chapitre est organisé de la façon suivante : présentation et énoncé des résultats principaux originaux, rappels des notions utilisées et préliminaires techniques et enfin preuve des résultats.

1. Positivité locale

1.1. Constantes de Seshadri

1.1.1. Cadre

Dans la suite de ce mémoire, toutes les variétés considérées seront supposées complexes. Si le contraire n'est pas spécifié, elles seront de plus supposées irréductibles et projectives.

Un diviseur de Weil sur une variété normale est une somme formelle finie à coefficients entiers d'hypersurfaces. Un diviseur de Cartier est une section globale du faisceau $\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. On notera "$\equiv$" l'équivalence numérique entre diviseurs de Cartier, "$\sim$" l'équivalence linéaire. Une somme formelle finie d'hypersurfaces $D = \sum a_i D_i$ dont les coefficients sont des rationnels est appelée un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil. Si un multiple de ce diviseur est un diviseur de Cartier, on dira que c'est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier. Lorsque l'on voudra insister sur le fait qu'un diviseur de Weil est à coefficients entier, on dira qu'il est entier.

On note "$\sim_{\mathbb{Q}}$" la $\mathbb{Q}$-équivalence linéaire : deux $\mathbb{Q}$-diviseurs de Cartier D_1 et D_2 sont linéairement équivalents s'il existe un entier $m > 0$ tel que mD_1 et mD_2 soient des diviseurs de Cartier entiers vérifiant $mD_1 \sim mD_2$. On peut définir l'intersection d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D avec une courbe en posant $D \cdot C = \frac{1}{m}(mD) \cdot C$ pour un entier m tel que mD soit un diviseur de Cartier entier.

Un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D ou un fibré en droites sur une variété X est dit *nef* si son intersection avec toute courbe est positive, *gros* si $h^0(X, \mathcal{O}_X(kD)) \sim \alpha k^{\dim X}$ pour un réel $\alpha > 0$ et *pseudo-effectif* si sa classe numérique appartient à l'adhérence du cône des diviseurs gros dans $N^1(X)_{\mathbb{R}}$. On définit le volume d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D par

$$\operatorname{vol}(D) = \limsup_{m \gg 0} \frac{h^0(X, \mathcal{O}_X(kmD))}{(km)^{\dim X}/(\dim X)!},$$

pour un entier k tel que kD soit Cartier.

Le lieu de base ensembliste d'une série linéaire V sera noté $\mathrm{Bs}(V)$, l'idéal de base de cette même série linéaire sera noté $\mathfrak{b}(V)$.

Un diviseur de Cartier D sera dit adjoint s'il est de la forme $D = K_X + A$ pour un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier ample A. On définit de même un fibré en droites adjoint.

Une propriété "locale" et l'expression "localement" feront toujours référence à la topologie de Zariski.

1.1.2. Définitions et premières propriétés

Considérons une variété projective lisse X. Un diviseur A strictement nef sur X, c'est-à-dire un diviseur dont l'intersection avec toute courbe de X est strictement positive, n'est pas nécessairement ample. Un théorème de Seshadri permet toutefois de caractériser les diviseurs amples sur X en considérant uniquement leur intersection avec les courbes de X à condition de prendre en compte les singularités de ces dernières :

Théorème 7 (Critère d'amplitude de Seshadri) *Soit X une variété projective lisse et D un diviseur sur X. Alors D est ample si et seulement s'il existe un réel strictement positif $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\frac{D \cdot C}{\mathrm{mult}_x C} \geqslant \varepsilon$$

pour tout point $x \in X$ et toute courbe irréductible $C \subset X$ passant par x.

La notion de constante de Seshadri, introduite par Demailly, consiste à mesurer en un point donné la borne inférieure naturelle apparaissant dans le théorème 7.

Définition 8 (Constantes de Seshadri) *Soit X une variété projective, x un point lisse et D un diviseur de Cartier nef sur X. La constante de Seshadri du diviseur D au point x est définie par*

$$\varepsilon(X, D; x) = \inf_{x \in C \subset X} \frac{D \cdot C}{\mathrm{mult}_x C},$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les courbes incluses dans X et passant par le point x.

Lorsque le contexte est clair, on notera souvent $\varepsilon(D; x)$ la constante de Seshadri de D en x.

On peut aussi définir les constantes de Seshadri en termes de positivité d'un certain diviseur sur l'éclatement de X au point x.

Proposition 9 *Soit X une variété projective, $\mu : X' \to X$ l'éclatement de X en un point lisse x et D un diviseur de Cartier nef sur X. On note E le diviseur exceptionnel de μ. La constante de Seshadri du diviseur D au point x est égale à*

$$\varepsilon(X, D; x) = \sup\{\varepsilon \mid \mu^* D - \varepsilon E \textit{ est nef}\}.$$

De plus, si D est ample alors pour tout rationnel $0 < \alpha < \varepsilon(X, D; x)$, le $\mathbb{Q}$-diviseur $D - \alpha E$ est ample.

Au vu des deux définitions équivalentes précédentes des constantes de Seshadri, il apparaît qu'une majoration des constantes de Seshadri est assez simple. La plus grossière dont nous disposons est l'inégalité suivante, où l'on note n la dimension de X :

$$\varepsilon(X, D; x) \leqslant \sqrt[n]{\mathrm{vol}(D)} = \sqrt[n]{D^n}.$$

Il est par contre beaucoup plus difficile de minorer les constantes de Seshadri. Un premier aspect remarquable de cette minoration est qu'une minoration en un point des constantes de Seshadri d'un diviseur nef est en fait valable en n'importe quel point en position très générale. On a plus précisément le resultat de semi-continuité inférieure suivant ([Laz04a], Exemple 5.1.11) :

Proposition 10 *Soit X une variété projective irréductible, T une variété quasi-projective irréductible, $p : X \to T$ un morphisme propre surjectif, D un diviseur de Cartier sur X et $x : T \to X$ une section de p. Supposons que p soit lisse le long de l'image de x. On note X_t, D_t les restrictions de D et de X à la fibre au-dessus de t et x_t l'image de x en t. Alors $\varepsilon(X_t, D_t; x_t)$ est constant en dehors d'une union dénombrable de sous-variétés propres de T. Si $t^* \in T$ est un point en position très générale (c'est-à-dire en dehors de cette union dénombrable de sous-variétés), alors $\varepsilon(X_t, D_t; x_t) \leqslant \varepsilon(X_{t^*}, D_{t^*}; x_{t^*})$ pour tout $t \in T$.*

1.1.3. Applications

La notion de constante de Seshadri fut motivée à l'origine par la conjecture suivante :

Conjecture 11 (Conjecture de Fujita) *Soit X une variété projective lisse de dimension n et A un diviseur ample sur X.*

1. *Si $m \geqslant n + 1$ alors $K_X + mA$ est libre.*
2. *Si $m \geqslant n + 2$ alors $K_X + mA$ est très ample.*

En effet une minoration des constantes de Seshadri permet d'obtenir des résultats dans ce sens :

Proposition 12 ([EKL95] - [Laz04a], proposition 5.1.19) *Soit X une variété projective lisse de dimension n, D un diviseur gros et nef sur X.*

1. *Si $\varepsilon(D; x) > n + s$ pour un entier s en un point x, alors $K_X + D$ sépare les s-jets en x, c'est-à-dire*
$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D)) \twoheadrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D) \otimes \mathcal{O}_X/\mathfrak{m}_x^{s+1}).$$
2. *Si $\varepsilon(D; x) > 2n$ en un point x alors l'application rationnelle $\Phi_{|K_X+D|} : X \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ est birationnelle sur son image.*
3. *Si $\varepsilon(D; x) > 2n$ pour tout point x alors $K_X + D$ est très ample.*

1.1.4. Minoration

On vient de voir qu'une minoration des constantes de Seshadri d'un diviseur ample en tout point d'une variété entrainait un résultat très proche de la partie la plus dure de la conjecture de Fujita (le point 2). Malheureusement, un exemple dû à Miranda montre que les constantes de Seshadri d'un diviseur ample peuvent être arbitrairement petites.

Une des questions les plus intéressantes concernant les constantes de Seshadri est l'existence conjecturale d'une minoration universelle de ces constantes.

Conjecture 13 ([Laz04a], conjecture 5.2.4) *Soit X une variété projective, D un diviseur gros et nef sur X. Alors*
$$\varepsilon(X, D; x) \geqslant 1$$
pour tout point $x \in X$ en dehors d'une union dénombrable de sous-variétés strictes de X.

Dans le cas d'une surface lisse, Ein et Lazarsfeld ont montré dans [EL93] que les constantes de Seshadri de tout diviseur ample étaient minorées par 1 en dehors d'un ensemble dénombrable de points.

À l'heure actuelle, pour une variété et un diviseur ample quelconque, la meilleure minoration obtenue est de Nakamaye. Elle repose sur les idées utilisées par Ein, Lazarsfeld et Küchle (voir [EKL95] et [Laz04a] chapitre 5) pour montrer que les constantes de Seshadri de tout diviseur gros et nef sur une variété X éventuellement non normale étaient minorées par $\frac{1}{\dim X}$.

Théorème 14 (Nakamaye, [Nak05] theorem 0.3) *Soit X une variété projective de dimension n et A un diviseur ample sur X. Pour tout point en position très générale $x \in X$, on a*

$$\varepsilon(X, A; x) \geqslant \frac{3n+1}{3n^2}.$$

En dimension 3, Nakamaye obtient le résultat suivant :

Théorème 15 (Nakamaye, [Nak05] theorem 0.2) *Soit X une variété projective de dimension 3 et A un diviseur ample sur X. Pour tout point en position très générale $x \in X$, on a*

$$\varepsilon(X, A; x) \geqslant \frac{1}{2}.$$

En ce qui concerne les améliorations conjecturalement non optimales de la minoration par rapport au cas général, là encore les résultats sont assez peu nombreux en dimension 3 ou plus. Hormis le résultat précédent de Nakamaye, on peut citer Lee qui obtient dans [Lee03] une minoration de type $\frac{1}{\dim X - 2}$ pour les variétés de Fano de dimension plus grande que 3 dont le diviseur anticanonique est sans point de base.

Le cas des surfaces a lui fait l'objet de nombreux articles, avec parfois l'obtention de résultats étonnants sur la géométrie de la surface. On peut citer par exemple le lien mis en exergue par Nakamaye [Nak03] entre d'une part, volume d'un diviseur sur une surface et constantes de Seshadri de ce diviseur et d'autre part l'existence d'une fibration non triviale de cette surface. Bien que ne prenant pas en compte les récents développements, la référence pour les surfaces reste l'excellent article de Bauer [Bau99].

1.2. Exemples

On donne quelques exemples pour lesquels les constantes de Seshadri sont simples à minorer ou à calculer.

Exemple 16 (Diviseurs très amples) Soit X une variété projective, H un diviseur de Cartier très ample sur X, x un point lisse. Les constantes de Seshadri de H vérifient

$$\varepsilon(X, H; x) \geqslant 1$$

pour tout point lisse $x \in X$. De plus, si en considérant le plongement de X dans $\mathbb{P}^N$ induit par $|H|$, la variété X contient une droite passant par le point x, la constante de Seshadri de H en x est alors égale à 1.

En effet, en utilisant le fait que

$$\varepsilon(X, H; x) = \inf_{x \in C \subset X} \frac{H \cdot C}{\operatorname{mult}_x C}$$

et via le plongement induit par $\mathcal{O}_X(H)$, on peut voir que minorer les constantes de Seshadri de H en x est une conséquence d'une minoration des constantes de Seshadri du fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ pour un certain espace projectif. Mais pour toute courbe C passant par x et incluse dans X, donc *a fortiori* dans $\mathbb{P}^N$, il existe un hyperplan passant par x et ne contenant pas C. On en déduit que $H \cdot C = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)) \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$. Si X contient une droite C passant par x, on a $H \cdot C = 1$ d'où

$$1 \leqslant \varepsilon(X, H; x) \leqslant 1.$$

Exemple 17 (Fibrés projectifs sur une courbe) Soit $\pi : E \to C$ un fibré vectoriel de rang r sur une courbe lisse C. On note $\mathbb{P}(E)$ le projectivisé en hyperplans de E.

On note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ le fibré de Serre obtenu comme le quotient tautologique de π^*E et ξ sa classe numérique. On a alors les propriétés suivantes.

1. S'il existe un réel α tel que pour tout fibré vectoriel ample E (de rang quelconque) et tout point x sur $\mathbb{P}(E)$ on ait

$$\varepsilon(\mathbb{P}(E), \xi; x) \geqslant \alpha,$$

alors pour tout diviseur ample L on a

$$\varepsilon(\mathbb{P}(E), L; x) \geqslant \alpha.$$

2. Si $C = \mathbb{P}^1$, pour tout diviseur ample L et tout point x sur $\mathbb{P}(E)$, on a

$$\varepsilon(\mathbb{P}(E), L; x) \geqslant 1.$$

3. Si $g(C) \geqslant 2$ et E est stable et ample, alors pour tout point x sur $\mathbb{P}(E)$, on a

$$\varepsilon(\mathbb{P}(E), \xi; x) \geqslant \frac{1}{r}.$$

Démonstration

1. Montrons que pour minorer les constantes de Seshadri des diviseurs amples sur les fibrés projectifs, il suffit de minorer les constantes de Seshadri de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ pour tout fibré vectoriel E ample.

Soit L un diviseur ample. Tout(e) (classe de) diviseur sur $\mathbb{P}(E)$ s'écrivant $\pi^*D + a \cdot \xi$, on peut donc écrire $L = \pi^*D + a \cdot \xi$ et on a $a > 0$ car L restreint à une fibre est ample. On pose

$$F = S^a(E) \otimes \mathcal{O}_C(D).$$

Le fibré vectoriel F est ample : en effet, dans la terminologie de [Laz04b] section 6.2.B, on a $F = S^a(E < \frac{1}{a}D >)$ (voir [Laz04b] definition 6.2.4) et l'amplitude s'obtient par une application directe de [Laz04b] lemma 6.2.8 (iii).
On a un plongement de Veronese de $\mathbb{P}(E)$ dans $\mathbb{P}(S^a(E))$ et via ce plongement

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S^a(E))}(1)_{|\mathbb{P}(E)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(a).$$

On en conclut que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1)_{|\mathbb{P}(E)} = L$. Il découle directement de la définition des constantes de Seshadri que par restriction on obtient le résultat voulu :

$$\varepsilon(\mathbb{P}(F); \mathcal{O}_{\mathbb{P}(F)}(1); x) \leqslant \varepsilon(\mathbb{P}(E); L; x).$$

2. Supposons que $C = \mathbb{P}^1$. Par un théorème de Grothendieck, on a

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} L_i,$$

pour des fibrés en droites L_i. Le fibré vectoriel E est ample si et seulement si tous les fibrés en droites L_i sont amples. On note $d = \min_i\{\deg(L_i)\}$. Le fibré en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1) \otimes \pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-d)$ est nef et puisque $d \geqslant 1$, on en déduit que pour toute courbe $C' \subset \mathbb{P}(E)$ non contenue dans une fibre, on a

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cdot C \geqslant c_1(\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d)) \geqslant \operatorname{mult}_x C'.$$

Les courbes contenues dans les fibres sont contenues dans un espace projectif et là encore on a (d'après l'exemple précédent)

$$c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)) \cdot C' \geqslant \operatorname{mult}_x C'.$$

Les constantes de Seshadri de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ sont donc minorées par 1 en tout point.

3. Supposons maintenant que C soit de genre au moins 2 et que E soit stable. Au cours de la preuve du critère d'amplitude pour les fibrés vectoriels sur les courbes lisses, Hartshorne a montré dans [Har66] que les constantes de Seshadri de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$ étaient minorées par $\frac{1}{r}$, où r désigne le rang de E.

$\square$

Exemple 18 (Diviseurs sans point de base) Dans [Laz04a], example 5.1.18, Lazarsfeld donne succinctement l'argument permettant de minorer par 1 les constantes de Seshadri des diviseurs amples dont la série linéaire complète associée est sans points de base. On développe légèrement l'argument ci-dessous.

En ce qui concerne les diviseurs amples et sans point de base, on peut considérer le morphisme $\varphi_{|L|}$ associé à la série linéaire complète $|L|$ de ce diviseur L. Le diviseur étant ample, c'est un morphisme fini vers un espace projectif $\mathbb{P}^N$ et le diviseur L vérifie $\mathcal{O}_X(L) = \varphi_{|L|}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$. Pour tout point $x \in X$, pour toute courbe $C \subset X$ passant par le point x, il existe un hyperplan de $\mathbb{P}^N$ passant $\varphi_{|L|}(x)$ et ne contenant pas $\varphi_{|L|}(C)$. Il existe donc un diviseur $D \in |L|$ passant par x et ne contenant pas C et donc

$$D \cdot C = L \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C.$$

On peut mentionner que tout diviseur ample sur une variété sphérique projective est sans point de base (voir par exemple [Bri97] section 5, page 51). On en déduit que les constantes de Seshadri des diviseurs amples sur de telles variétés sont minorées par 1 en tout point lisse.

Première partie .

Constantes de Seshadri de certaines variétés à diviseur anticanonique nef

2. Quelques rappels sur les variétés dont le diviseur canonique n'est pas nef

Au cours de ce travail on s'intéresse particulièrement aux propriétés numériques des diviseurs de Cartier et des courbes des variétés projectives. On est tout naturellement amené à considérer les espaces suivants.

Définition 19 *On définit la relation d'équivalence numérique pour les courbes, qu'on notera aussi "$\equiv$" par $C_1 \equiv C_2$ si et seulement si $D \cdot C_1 = D \cdot C_2$ pour tout diviseur de Cartier D sur X.*

On note $N^1(X)_{\mathbb{Z}}$ le quotient par la relation d'équivalence numérique du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les diviseurs de Cartier. On note $N^1(X)_{\mathbb{Q}} = N^1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et $N^1(X)_{\mathbb{R}} = N^1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On construit de manière similaire $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ et $N_1(X)_{\mathbb{Q}}$, les produits tensoriels par $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ du quotient par la relation d'équivalence numérique du $\mathbb{Z}$-module libre engendré par les courbes irréductibles de X. Le cône convexe engendré dans $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ par les classes de courbes effectives sera noté $\mathrm{NE}(X)$. Son adhérence sera notée $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Si D est un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier sur X, on note $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{D\geqslant 0}$ (resp. $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{D\leqslant 0}$) la partie du cône s'intersectant positivement (resp. négativement) avec le $\mathbb{Q}$-diviseur D.

2.1. Le cas lisse

On a un théorème de structure pour le cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ dû à Mori dans le cas lisse.

Théorème 20 (Théorème du cône, [Deb01] theorem 6.1) *Soit X une variété projective lisse. Il existe une famille dénombrable $(\Gamma_i)_{i\in I}$ de courbes rationnelles sur X telles que*

$$0 < -K_X \cdot \Gamma_i \leqslant \dim(X) + 1$$

et

$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X \geqslant 0} + \sum_{i\in I} \mathbb{R}^+[\Gamma_i]$$

où les $\mathbb{R}^+[\Gamma_i]$ sont toutes les arêtes de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ rencontrant $N_1(X)_{K_X<0}$.

Les arêtes de $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$ peuvent être contractées, on obtient ainsi un morphisme de X vers une nouvelle variété ([Deb01], theorem 7.39).

Théorème 21 *Soit X une variété projective lisse et R une arête K_X-négative.*

a) Il existe un unique morphisme $c_R : X \to Y$ tel que $(c_R)_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ et une courbe irréductible $C \subset X$ est contractée sur un point si et seulement si $[C] \in R$. Le morphisme c_R est appelé la contraction de R ou encore contraction élémentaire de Mori de R.

b) Il existe une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(X) &\to \mathbb{Z} \\ [L] &\mapsto L \cdot C \end{aligned}$$

[a)]

Pour les variétés lisses de dimension 3, Mori a montré dans [Mor82] quelles étaient les contractions possibles d'une arête K_X-négative. On peut distinguer deux types d'arêtes K_X-négatives : celles numériquement effectives, qui correspondent à une fibration, les autres qui correspondent à la contraction d'un diviseur exceptionnel.

Définition 22 *Une arête K_X-négative $\mathbb{R}_+ \cdot [C]$ est numériquement effective si $D \cdot C \geqslant 0$ pour tout diviseur de Cartier D effectif.*

On a alors la classification suivante des contractions d'une arête K_X-négative.

Théorème 23 ([Mor82]) *Soit X une variété lisse de dimension 3 dont le diviseur canonique n'est pas nef. On note R une arête K_X-négative du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Si l'arête R n'est pas numériquement effective, il existe alors un diviseur irréductible D de X tel que la contraction $c_R : X \to Y$ restreinte à $X \setminus \operatorname{supp} D$ soit un isomorphisme et que $\dim c_R(D) \leqslant 1$. On peut distinguer 5 cas :*

1. *$c_R(D)$ est une courbe lisse et Y est lisse, $c_{R|D} : D \to c_R(D)$ est un fibré en $\mathbb{P}^1$,*
2. *$c_R(D)$ est un point et Y est lisse, $D \simeq \mathbb{P}^2$ et $\mathcal{O}_D(D) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$,*
3. *$c_R(D)$ est un point, $D \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}_D(D)$ est de bi-degré $(-1,-1)$ et $s \times \mathbb{P}^1 \equiv \mathbb{P}^1 \times t$, $(s, t \in \mathbb{P}^1)$,*
4. *$c_R(D)$ est un point, D est isomorphe à une surface quadrique de $\mathbb{P}^3$ singulière, irréductible et réduite,*
5. *$c_R(D)$ est un point, $D \simeq \mathbb{P}^2$ et $\mathcal{O}_D(D) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$.*

Théorème 24 ([Mor82]) *Soit X une variété lisse de dimension 3 dont le diviseur canonique n'est pas nef. On note R une arête K_X-négative du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$. Si l'arête R est numériquement effective alors Y est lisse et soit*

1. *$\dim Y = 2$ et $c_R : X \twoheadrightarrow Y$ est un fibré en coniques,*
2. *$\dim Y = 1$ et $c_R : X \twoheadrightarrow Y$ est une fibration en surfaces de del Pezzo,*
3. *$\dim Y = 0$ et $-K_X$ est ample (X est de Fano et de nombre de Picard égal à 1).*

Un invariant important d'une arête est sa longueur.

Définition 25 *Soit R une arête K_X-négative d'une variété projective lisse X. La longueur de R est l'entier*

$$l(R) = \min\{-K_X \cdot C \mid [C] \in R \text{ et } C \text{ est rationnelle}\}.$$

La longueur d'une arête K_X-négative du cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$ est majorée.

Théorème 26 ([Deb01], theorem 6.1) *Soit X une variété lisse de dimension n, R une arête K_X-négative. La longueur de R vérifie $l(R) \leqslant n+1$.*

Les variétés lisses X ayant une arête de longueur $n+1$ sont isomorphes à l'espace projectif.

Théorème 27 ([CMSB02]) *Soit X une variété lisse de dimension n, R une arête K_X-négative. Supposons que $l(R) = n+1$. Alors $X \simeq \mathbb{P}^n$.*

2.2. Variétés singulières

En appliquant les idées du modèle minimal, on est dans l'obligation de tenir compte de variétés singulières. Dans cette section, on reformule le théorème du cône dans le langage des paires. On commence par donner quelques définitions. Donnons tout d'abord la définition d'une paire.

Définition 28 (Paire) *Une paire est un couple (X, Δ) où X est une variété projective normale de dimension n et Δ un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil dont les coefficients sont tous compris, au sens large, entre 0 et 1. On dit que le diviseur Δ est une frontière. On requiert de plus que $K_X + \Delta$ soit $\mathbb{Q}$-Cartier, le diviseur canonique K_X étant n'importe quel diviseur de Weil dont la restriction à la partie lisse de X est le diviseur d'une n-forme régulière.*

Soit $g : Z \dashrightarrow Z'$ une application birationnelle et $W \subset Z$ une sous-variété. Supposons g définie au point général de W. On définit la transformée stricte g_*W de W dans Z' comme l'adhérence de $g_{|U}(W \cap U)$ où U est un ouvert intersectant W sur lequel g est définie. Pour un morphisme birationnel $f : Y \to X$ entre variétés normales et un diviseur de Weil $D = \sum a_i D_i$ sur X, on définit la transformée stricte $(f^{-1})_*D$ de D dans Y par l'application rationnelle f^{-1} par :

$$(f^{-1})_*D = \sum a_i (f^{-1})_* D_i.$$

Lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on notera f_*^{-1} la transformée stricte de f^{-1} au lieu de $(f^{-1})_*$. On peut maintenant définir ce qu'est une résolution des singularités d'une paire.

Définition 29 (Log-résolution) *Une log-résolution d'une paire (X, Δ) est un morphisme propre, birationnel $f : Y \to X$ tel que Y soit lisse,* $\mathrm{Exc}(f)$ *soit un diviseur et* $\mathrm{Exc}(f) \cup \mathrm{Supp}(f_*^{-1}\Delta)$ *soit un diviseur à croisement normaux simples.*

Pour une log-résolution $f : Y \to X$ d'une paire (X, Δ), on définit le $\mathbb{Q}$-diviseur de discrépance $\sum a(X, \Delta, E)E$ comme le diviseur vérifiant $K_Y = f^*(K_X + \Delta) + \sum a(X, \Delta, E)E$ où la somme porte sur tous les diviseurs irréductibles $E \subset Y$. Pour rendre ce diviseur unique, on suppose qu'un diviseur E non-exceptionnel vérifie $a(X, \Delta, E) \neq 0$ si et seulement il existe un diviseur premier D sur X, de coefficient $d \neq 0$ dans Δ vérifiant $E = f_*^{-1}D$. Dans ce cas on demande de plus que $a(X, \Delta, E) = -d$.

Les singularités de la paire (X, Δ) peuvent être classées selon les coefficients $a(X, \Delta, E)$, appelés discrépances du diviseur E. Ces dernières ne dépendent pas de la log-résolution choisie.

Définition 30 (Discrépance et singularités des paires) *On définit la discrépance de (X, Δ) par :*

$$\operatorname{discrep}(X, \Delta) = \inf_E \{a(X, \Delta, E) \mid E \textit{ est un diviseur exceptionnel au-dessus de } X\}.$$

On dit que la paire (X, Δ) est :
- *terminale si* $\operatorname{discrep}(X, \Delta) > 0$ *; si $\Delta = 0$ la variété X est dite à singularités terminales,*
- *canonique si* $\operatorname{discrep}(X, \Delta) \geqslant 0$ *; si $\Delta = 0$ la variété X est dite à singularités canoniques,*
- *log-terminale ou klt (pour Kawamata log-terminale) si* $\operatorname{discrep}(X, \Delta) > -1$ *et la partie entière de Δ, $[\Delta]$, vaut 0 (Δ est une frontière stricte),*
- *purement log-terminale, abrégé en plt, si* $\operatorname{discrep}(X, \Delta) > -1$,
- *log-canonique, abrégé en lc, si* $\operatorname{discrep}(X, \Delta) \geqslant -1$.

Définition 31 *Une paire (X, Δ) log-canonique est dite* de Fano *si le $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier $-(K_X + \Delta)$ est ample. Si le diviseur $-(K_X + \Delta)$ est seulement gros et nef, on dira que (X, Δ) est* presque de Fano. *Une paire sera dite* de Calabi-Yau *si $K_X + \Delta \equiv 0$ et* de type général *si $K_X + \Delta$ est gros.*

On appelle indice de la paire (X, Δ) le plus grand rationnel r tel que $-(K_X + \Delta) \equiv rH$ pour un diviseur de Cartier entier gros et nef H. Un tel diviseur est appelé un diviseur fondamental de la paire (X, Δ). Il est unique à équivalence numérique près. Le coïndice de (X, Δ) est le rationnel $n + 1 - r$.

Le théorème du cône a été généralisé aux paires klt par Kawamata et Kollár.

Théorème 32 (Théorème du cône, [KM98] theorem 3.7) *Soit (X, Δ) une paire klt.*

1. *Il existe une famille dénombrable de courbes rationnelles $\Gamma_i \subset X$ telle que*
$$0 < -(K_X + \Delta) \cdot \Gamma_i \leqslant 2 \dim X$$
et
$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{(K_X+\Delta) \geqslant 0} + \sum_{i \in I} \mathbb{R}^+[\Gamma_i]$$
2. *Pour tout diviseur ample H et tout rationnel $\alpha > 0$, il existe un sous-ensemble fini $I_\alpha \subset I$ tel que*
$$\overline{\mathrm{NE}}(X) = \overline{\mathrm{NE}}(X)_{(K_X+\Delta+\alpha H) \geqslant 0} + \sum_{i \in I_\alpha} \mathbb{R}^+[\Gamma_i].$$

3. *Soit* $F \subset \overline{\mathrm{NE}}(X)$ *une face* $(K_X+\Delta)$*-négative. Il existe un unique morphisme* $c_F : X \to Y$ *tel que* $(c_F)_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ *et une courbe irréductible* $C \subset X$ *est contractée sur un point si et seulement si* $[C] \in F$*. Le morphisme* c_F *est appelé la contraction de* F*.*
4. *Soit* F *et* c_F *comme dans le point précédent. Soit* L *un fibré en droites tel que* $(L \cdot C) = 0$ *pour toute courbe vérifiant* $[C] \in F$*. Alors il existe un fibré en droites* L_Y *sur* Y *tel que* $L = (c_F)^* L_Y$*.*

Kawamata a montré que le lieu exceptionnel de la contraction obtenue au point 3 du précédent théorème est uniréglé.

Théorème 33 ([Deb01], theorem 7.46) *Soit* X *et* Y *des variétés normales et* c : $X \to Y$ *un morphisme projectif. Soit* Δ *effectif tel que la paire* (X, Δ) *soit klt et tel que* $-(K_X+\Delta)$ *soit* c*-ample. Toute composante irréductible de* $\mathrm{Exc}(c)$ *est couverte par des courbes rationnelles* Γ *contractées par* c*, vérifiant*

$$0 < -(K_X+\Delta)\cdot\Gamma \leqslant 2(\dim E - \dim(c(E)).$$

D'après un récent théorème de Hacon et McKernan ([HM05] corollary 1.4), une paire presque de Fano est rationnellement connexe par chaîne.

Définition 34 (variétés rationnellement connexes par chaîne. [Deb01] definition 4.21) *Une variété* X *est rationnellement connexe par chaîne si par deux points distincts passe une chaîne de courbes rationnelles.*

Théorème 35 (Connexité rationnelle des paires presques de Fano. [HM05]) *Soit une paire klt* (X, Δ) *et* $f : X \to S$ *un morphisme projectif tel que* $-(K_X+\Delta)$ *soit relativement nef et* $-K_X$ *relativement gros. Toute fibre de* f *est rationnellement connexe par chaîne.*

3. Autour des surfaces de del Pezzo

Dans ce chapitre, qui a fait l'objet de la publication [Bro06], on calcule *en tout point* les constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo lisses. On peut dans ce cas donner une définition précise de la notion de point en position générale.

Définition 36 *Un ensemble de* $r \leqslant 8$ *points* $\{x_1, \ldots, x_r\}$ *du plan est dit en position générale si aucun sous-ensemble de* 3 *de ces points n'est sur une droite, si aucun sous-ensemble de* 6 *d'entre eux n'est sur une conique et si* 8 *d'entre eux ne sont pas sur une cubique singulière en l'un deux. Dans la suite, on notera* $\mu_r : X_r \longrightarrow \mathbb{P}^2$ *l'éclatement du plan en* r *points* $x_1, \ldots, x_r$ *en position générale. Lorsque* $r \leqslant 7$*, un point* x *de* X_r *sera dit en position générale si son image* y *par* μ_r *est distincte des points d'éclatement* x_i *et si les points* $\{x_1, \ldots, x_r, y\}$ *sont en position générale. Si le point* x *n'est pas en position générale, il est alors sur une courbe exceptionnelle ou sur la transformée stricte d'une des courbes précédemment citées. On dira que cette courbe est une courbe distinguée contenant* x.

Rappelons qu'une surface de del Pezzo est une surface lisse dont le diviseur anticanonique est ample. On a la caractérisation suivante des surfaces de del Pezzo (voir [Dem80] ou [DR96]) :

Proposition 37 *Les surface de del Pezzo sont isomorphes à l'une des surfaces suivantes :*
- $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$,
- *un éclatement de* $\mathbb{P}^2$ *en au plus* 8 *points en position générale.*

On montre le résultat suivant :

Théorème 38 *Si* $r \leqslant 5$*, la constante de Seshadri de* $-K_{X_r}$ *au point* x *vaut :*
- $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 2$ *si* x *est en position générale,*
- $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 1$ *sinon.*

Si $r = 6$*, la constante de Seshadri de* $-K_{X_6}$ *au point* x *vaut :*
- $\varepsilon(-K_{X_6}; x) = 3/2$ *si* x *est en position générale,*
- $\varepsilon(-K_{X_6}; x) = 1$ *sinon.*

Si $r = 7$*, la constante de Seshadri de* $-K_{X_7}$ *au point* x *vaut :*
- $\varepsilon(-K_{X_7}; x) = 4/3$ *si* x *est en position générale,*
- $\varepsilon(-K_{X_7}; x) = 1$ *sinon.*

Si $r = 8$*, les constantes de Seshadri de* $-K_{X_8}$ *valent* $\frac{1}{2}$ *en au plus* 12 *points n'appartenant pas au diviseur exceptionnel et* 1 *partout ailleurs.*

Remarque 39 Lorsque l'éclatement de X_r en x est encore une surface de del Pezzo (ce qui correspond au cas $r \leqslant 7$ et x en position générale), on peut retrouver ces résultats à l'aide de la caractérisation des diviseurs nef sur les surfaces de del Pezzo apparaissant dans [DR96].

Au cours de la preuve du théorème 38 (située sous-section 3.1.1), nous mettrons en relief le rôle des courbes rationnelles dans le calcul des constantes de Seshadri. Plus exactement nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 40 *Si S est une surface de del Pezzo lisse*

$$\varepsilon(-K_S; x) = \inf_{x \in C \ \textit{rationnelle}} \frac{-K_S \cdot C}{\operatorname{mult}_x C}.$$

De plus la borne inférieure est un minimum sauf pour la surface X_8.

Malheureusement, les courbes rationnelles ne permettent en général pas de détecter la positivité sur une variété rationnellement connexe. On donne à la fin de cette note deux exemples de surfaces rationnellement connexes dont le diviseur anticanonique possède une intersection positive avec toute courbe rationnelle mais n'est pas nef, ni même pseudo-effectif dans le cas du deuxième exemple. Ceci est d'autant plus suprenant que pour le diviseur canonique de n'importe quelle variété lisse ou n'importe quel diviseur d'une variété de Fano lisse, le théorème du cône implique les résultats suivants :

Théorème 41 (Mori) *Soit X une variété projective lisse, K_X son diviseur canonique. Le diviseur K_X est nef si et seulement si $K_X \cdot C \geqslant 0$ pour toute courbe rationnelle C.*

Théorème 42 (Mori) *Soit X une variété de Fano lisse, L un diviseur sur X. Alors L est ample si et seulement si $L \cdot C > 0$ pour toute courbe.*

3.1. Diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo

3.1.1. Preuve du théorème 38

Le cas $r \leqslant 6$. Le diviseur anticanonique $-K_{X_r}$ est très ample donc $\varepsilon(-K_{X_r}; x) \geqslant 1$ pour tout point x (le degré d'une courbe irréductible et réduite est minoré par sa multiplicité en x). Si x n'est pas en position générale, une courbe distinguée C (*cf.* définition 36) contenant x vérifie $-K_X \cdot C = 1$. On en déduit que $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 1$.

Si x est en position générale, il existe alors un membre irréductible et réduit $D_x \in |-K_{X_r}|$ vérifiant $\operatorname{mult}_x D_x = 2$. Supposons ceci vrai pour le moment, on a alors pour toute courbe irréductible C contenant x différente du support de D_x

$$D_x \cdot C \geqslant 2 \operatorname{mult}_x C.$$

De plus $D_x^2 = 9 - r \geqslant 4$ si $r \leqslant 5$ et $D_x^2 = 3$ si $r = 6$. D'où $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 2$ si $r \leqslant 5$ et $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = \frac{3}{2}$ si $r = 6$.

Il reste à montrer l'existence de D_x. D'après [Ful69] (theorem 1 page 110) il existe une cubique D passant par tous les x_i et dont la multiplicité au point $\mu_r(x)$ est supérieure ou égale à 2. Il suffit de vérifier que $\operatorname{mult}_{\mu_r(x)} D \leqslant 2$ et que D est bien irréductible et réduite, D_x sera alors la transformée stricte de D. Quitte à compléter l'ensemble des points x_i, on peut supposer $r = 6$. Si D n'est pas irréductible et réduite, D est l'union de trois droites ou d'une droite et d'une conique. Par la position générale de l'ensemble de points $\{x_1, \ldots, x_6, \mu_r(x)\}$, la courbe D ne peut alors passer par tous les points avec la multiplicité prescrite.

La courbe D étant irréductible, son intersection avec une droite L passant par $\mu_r(x)$ et un autre point $z \in D$ vérifie

$$3 \geqslant D \cdot L \geqslant \operatorname{mult}_z D + \operatorname{mult}_{\mu_r(x)} D.$$

On en déduit que $\operatorname{mult}_{\mu_r(x)} D \leqslant 2$ et que z est un point lisse de D.

Le cas $r = 7$. D'après [Har77], proposition III.4.3, le système linéaire $|-K_{X_7}|$ est sans point de base. Il existe donc pour tout point $x \in X_7$ un diviseur $D \in |-K_{X_7}|$ passant par x et lisse au point x. On en déduit que $\varepsilon(-K_{X_7}; x) \geqslant 1$. Si le point x n'est pas en position générale, on déduit comme précédemment que $\varepsilon(-K_{X_7}; x) = 1$.

Si le point x est en position générale, on évalue les constantes de Seshadri de $-2K_{X_7}$ et l'on conclut par homogénéité. Il existe un membre irréductible et réduit $D_x \in |-2K_{X_7}|$ dont la multiplicité en x vaut 3. Cela revient à prouver l'existence d'une courbe plane de degré 6 irréductible, réduite de multiplicité 3 en $\mu_7(x)$ et de multiplicité 2 aux points x_i. Il existe ([Ful69] theorem 1 page 110) une courbe plane D de degré 6 et de multiplicités au moins égales à celles attendues aux points x_i et $\mu_7(x)$. Si cette courbe est irréductible et réduite, son intersection avec une cubique passant par les 8 points $x_1, \ldots, x_7, \mu_7(x)$ et un neuvième sur la courbe D vaut 18 d'après le théorème de Bézout. On en déduit que $\operatorname{mult}_{x_i} D = 2$ pour tout i et que $\operatorname{mult}_{\mu_7(x)} D = 3$. Il reste à montrer que cette courbe est irréductible et réduite. Si la courbe D était l'union de deux cubiques C_1 et C_2 (éventuellement non irréductibles ou non réduites), les points $x_1, \ldots, x_7, \mu_7(x)$ étant en position générale, on aurait alors

$$17 = \sum_{i \leqslant 7} \operatorname{mult}_{x_i} D + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} D = \sum_{j=1,2} \sum_{i \leqslant 7} \operatorname{mult}_{x_i} C_j + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} C_j \leqslant 2 \times 8.$$

Si D n'est pas irréductible, D est donc soit l'union de 3 coniques soit l'union d'une quintique réduite irréductible et d'une droite ou d'une quartique réduite irréductible et d'une conique. En intersectant cette quintique Q avec une cubique C passant par tous les points $x_1, \ldots, x_7, \mu_7(x)$ et un autre point de la quintique, on obtient d'après le théorème de Bézout

$$\sum_{i \leqslant 7} \operatorname{mult}_{x_i} Q + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} Q \leqslant 15 - 1 = 14.$$

Encore une fois, on aurait dans ce cas

$$\sum_{i \leqslant 7} \operatorname{mult}_{x_i} D + \operatorname{mult}_{\mu_7(x)} D \leqslant 16$$

ce qui n'est pas possible. On procède de même pour les cas où D est l'union d'une quartique et d'une conique et où D est l'union de 3 coniques. Le diviseur D_x est donc irréductible et réduit. Comme au paragraphe précédent, on en conclut que

$$\varepsilon(-K_{X_7};x) = \min\{\frac{3}{2}, \frac{-K_{X_7} \cdot D_x}{3}\} = \frac{4}{3}.$$

De même qu'au paragraphe précédent, la courbe D donnée ci-dessus et qui permet "d'atteindre" la constante de Seshadri est rationnelle.

Le cas $r = 8$. Toujours d'après [Har77], proposition III.4.3, il existe pour tout $x \in X_8$ un élément $D_x \in |-K_{X_8}|$ passant par x. Le diviseur D_x est irréductible et réduit grâce à la position générale des points $x_1, \ldots, x_8$. On en déduit que $\varepsilon(-K_{X_8};x) = 1$ sauf aux éventuels points singuliers des membres de $|-K_{X_8}|$. Mais d'après la position générale des points $x_1, \ldots, x_8$ ces points singuliers sont en dehors du diviseur exceptionnel de μ_8 et correspondent aux singularités des cubiques du pinceau de cubiques passant par les x_i. Le nombre de cubiques singulières dans un pinceau général de cubiques est un problème classique de géométrie énumérative et vaut 12 : ce résultat est obtenu en considérant dans l'espace projectif paramétrant les cubiques planes l'intersection d'une droite générale (le pinceau) avec l'hypersurface des cubiques singulières. Dans notre cas, ce nombre reste fini car il existe une cubique lisse dans le pinceau d'après le théorème de Bertini. Il peut cependant être inférieur à 12 tout en restant strictement positif. En ces points la constante de Seshadri de $-K_{X_8}$ vaut $\frac{1}{2}$.

Contrairement aux cas précédents, pour x très général, il n'existe pas de courbe rationnelle Γ telle que

$$\varepsilon(-K_{X_8};x) = \frac{-K_{X_8} \cdot \Gamma}{\operatorname{mult}_x \Gamma}.$$

Pour voir cela, on peut notamment utiliser le lemme 44 ci-dessous. On note X_9 l'éclatement de X_8 au point x et E_9 le diviseur exceptionnel correspondant. A une telle courbe rationnelle correspondrait un morphisme stable non pointé de genre 0 et de classe $dH - \sum_{i=1}^{9} a_i E_i$ avec $3d - \sum a_i = 0$. Or l'espace de modules de ces morphismes est vide.

On peut cependant noter qu'il existe une suite (Γ_k) de courbes rationnelles telles que

$$\varepsilon(-K_{X_8};x) = \lim_{k\to\infty} \frac{-K_{X_8} \cdot \Gamma_k}{\operatorname{mult}_x \Gamma_k}.$$

On obtient la courbe Γ_k, vérifiant $\frac{-K_{X_8}\cdot\Gamma_k}{\operatorname{mult}_x \Gamma_k} = \frac{k}{k-1}$, en projetant dans X_8 (par contraction du diviseur E_9 sur $x = x_9$) la courbe rationnelle obtenue dans le lemme suivant ([GP98] Lemma 3.2.10) :

Lemme 43 *Soit X_9 l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en 9 points en position très générale. On note H le tiré en arrière de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$, et E_i la préimage du point d'éclatement x_i. Pour tout entier $k \geq 1$, il existe une courbe rationnelle nodale irréductible dans le système*

$$|3kH - kE_1 - \ldots - kE_8 - (k-1)E_9|.$$

3.2. Positivité et courbes rationnelles

3.2.1. Diviseur anticanonique non nef et courbes rationnelles

Il existe une surface rationnelle dont le diviseur anticanonique est non nef mais positif sur toute courbe rationnelle.

Soit 9 points dans $\mathbb{P}^2$ de sorte que par ces 9 points passe une unique cubique lisse C. On complète ces neuf points par un dixième toujours sur C et on note $\mu : X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement du plan en ces 10 points. La transformée stricte C' de C par μ est un membre irréductible de $|-K_X|$ dont l'intersection avec toute courbe rationnelle est positive ou nulle. Cependant, comme $C'^2 = -1$, le diviseur $-K_X$ n'est pas nef.

3.2.2. Diviseur anticanonique non pseudo-effectif et courbes rationnelles

Il existe une surface rationnelle dont le diviseur anticanonique est non pseudo-effectif mais positif sur toute courbe rationnelle.

Soit 13 points $x_1, \ldots, x_{13}$ en position très générale dans $\mathbb{P}^2$ de sorte qu'entre autre, passe par ces 13 points un pinceau de quartiques mais aucune cubique. On note μ : $X \longrightarrow \mathbb{P}^2$ l'éclatement du plan en ces 13 points. Puisque la transformée stricte C par μ de toute quartique passant par ces 13 points vérifie $-K_X \cdot C = -1$ et que ces courbes couvrent un ouvert dense de X, le diviseur anticanonique n'est pas pseudo-effectif. Les diviseurs pseudo-effectifs sont ceux dont la classe numérique appartient à l'adhérence du cône engendré par les diviseurs effectifs. Boucksom, Demailly, Păun et Peternell ont montré [BDPP04] que c'est la forme de positivité la plus faible que l'on pouvait espérer pour un diviseur : le cône des diviseurs pseudo-effectifs est le dual du cône des courbes qui bougent (celles dont les déformations couvrent un ouvert dense de X). Cependant, le diviseur anticanonique de X s'intersecte positivement avec toute courbe rationnelle, comme le montre le lemme suivant ([GP98] lemme 4.2 page 74, les notations ajoutées sont au paragraphe 3.1 pages 66-67) :

Lemme 44 *Soit un couple (d, α), où d est un entier strictement positif et α un r-uplet $\alpha = (a_1, \ldots, a_r)$. On note X_r l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en r points distincts en position très générale, H le tiré en arrière d'un diviseur hyperplan de $\mathbb{P}^2$, E_i la préimage du point d'éclatement x_i. On désigne par $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$ l'espace de modules des morphismes stables non pointés de genre 0 et de classe $dH - \sum_{i=1}^r a_i E_i$.*

Si $3d - 1 - \sum a_i < 0$ alors $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$ est vide.

L'espace de module $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$ paramètre les morphismes vers X_r de toutes les courbes C réduites, connexes, de genre 0, au plus nodales et dont l'image dans X_r est numériquement équivalente à $dH - \sum_{i=1}^r a_i E_i$. Il faut noter que les restrictions ne portent que sur les singularités de C et non sur son image dans X_r. En particulier, toute courbe rationnelle irréductible et réduite dans X_r, de classe $dH - \sum_{i=1}^r a_i E_i$, est obtenue comme l'image par un morphisme stable de $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$. Une courbe rationnelle Γ s'intersectant négativement avec le diviseur anticanonique de X, vérifie

$$3d - \sum_{i=1}^{13} a_i \leqslant 0$$

et n'existe donc pas puisque l'espace de module correspondant $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d,\alpha)$ est vide d'après le lemme.

4. Variétés de dimension 3

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant :

Théorème 45 *Soit X une variété projective lisse de dimension 3 dont le fibré anticanonique est nef. Pour tout fibré en droites ample L sur X et tout point x en position très générale, la constante de Seshadri de L en x est minorée par 1.*

En utilisant le même argument (*cf.* démonstration, section 4.3), il est possible de prouver la minoration des constantes de Seshadri des diviseurs nef et gros adjoints sur les variétés de dimension 3 minimales (pour les détails de la preuve, voir section 4.3).

Proposition 46 *Soit X une variété minimale de dimension 3 et L un diviseur de Cartier nef et gros tel que $L - K_X$ soit nef et gros. Alors pour tout point x en position très générale*

$$\varepsilon(X, L; x) \geqslant 1.$$

4.1. Variétés de dimension 3

4.1.1. Présentation des résultats

Pour les variétés de dimension 3, il est naturel d'essayer de se ramener au cas des surfaces. Les résultats de ce chapitre sont basés sur le lemme suivant :

Lemme 47 *Soit X une variété projective normale de dimension 3 et L un diviseur de Cartier gros et nef sur X. S'il existe un diviseur effectif de Cartier D sur X tel que $L - D$ soit pseudo-effectif, alors $\varepsilon(L; x) \geqslant 1$ pour tout point x en position très générale.*

Démonstration Si $L - D$ est pseudo-effectif, $L - D$ a une intersection positive avec toute courbe mobile sur X. En particulier, il existe une composante irréductible D_0 du support de D et un ensemble V, intersection dénombrable d'ouverts denses de D_0 tels que si $x \in V$, toute courbe C passant par x et non incluse dans D_0 vérifie $(L - D) \cdot C \geqslant 0$, c'est-à-dire

$$L \cdot C \geqslant D \cdot C \geqslant \mathrm{mult}_x C.$$

Cet ensemble V est construit de la façon suivante : il existe une union dénombrable de sous-variétés strictes[1] Z_i de X qui contient toute courbe ayant une intersection strictement négative avec $L - D$. On fixe une composante irréductible D_0 du support de D et on considère l'union notée Z des sous-variétés Z_i ne contenant pas D_0. On pose

[1] On peut par exemple choisir le lieu de base restreint de $L - D$, *cf.* définition 109.

$V = D_0 \setminus Z$. L'ensemble V est bien la restriction à D_0 d'une intersection dénombrable d'ouverts ayant une intersection non vide avec D_0. De plus toute courbe s'intersectant strictement négativement avec $L - D$ et non contenue dans D_0 est contenue dans Z et ne peut donc passer par un point de V.

Il ne reste donc plus qu'à considérer les courbes incluses dans $\operatorname{supp} D$. Si x est un point lisse de $\operatorname{supp} D$ et en position très générale dans $\operatorname{supp} D$, alors d'après la proposition 48 ci-dessous, on a $\varepsilon(L_{|\operatorname{supp} D}; x) \geqslant 1$ et donc pour toute courbe C incluse dans $\operatorname{supp} D$ et passant par x on a

$$L \cdot C = L_{|\operatorname{supp} D} \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C.$$

On en déduit que $\varepsilon(L; x) \geqslant 1$ et par semi-continuité inférieure des constantes de Seshadri ([Laz04a], Exemple 5.1.11), la minoration vaut pour tout point x en position très générale dans X. □

Le diviseur D apparaissant dans le lemme précédent n'ayant aucune raison d'être lisse, il est nécessaire d'étendre la minoration de Ein et Lazarsfeld pour les surfaces ([EL93]) à des surfaces singulières éventuellement non normales et à des diviseurs gros et nef :

Proposition 48 *Soit S une surface projective éventuellement non normale, et L un fibré en droites gros et nef sur S. Pour tout point x en position très générale, on a*

$$\varepsilon(L; x) \geqslant 1.$$

Démonstration

Quitte à résoudre les singularités de S on peut supposer S lisse, D reste gros et nef sur une résolution des singularités de S. Le diviseur L étant gros, si les constantes de Seshadri sont strictement inférieures à 1 en tout point de S, il existe alors sur S une famille non triviale de courbes $(C_t)_{t \in \Delta}$ paramétrées par un disque telles qu'en un point $x_t \in C_t$, chaque courbe vérifie $\operatorname{mult}_{x_t} C_t > L \cdot C_t \geqslant 1$. On pose $m = \operatorname{mult}_{\mu^{-1}(x_t)} \bar{C}_t$ pour t général. D'après [EL93], corollary 1.2, on a alors

$$C_t^2 \geqslant m(m-1).$$

Par le théorème d'indice de Hodge, on a alors

$$m(m-1) \leqslant (\mu^* L)^2 \bar{C}_t^2 \leqslant (\mu^* L \cdot \bar{C}_t)^2 \leqslant (m-1)^2$$

ce qui est une contradiction si $m > 1$. □

On aura besoin par la suite de la dénombrabilité de l'ensemble des points où la constante de Seshadri est petite. La preuve est identique à celle de la proposition ci-dessus.

Proposition 49 *Soit S une surface projective, éventuellement non normale, et L un fibré en droites ample sur S. L'ensemble des points lisses x de S tels que*

$$\varepsilon(L; x) < 1$$

est au plus dénombrable.

Démonstration Supposons qu'il existe sur S une famille non triviale de courbes $(C_t)_{t\in\Delta}$ paramétrées par un disque telles qu'en un point $x_t \in C_t$, chaque courbe vérifie $\mathrm{mult}_{x_t} C_t > L \cdot C_t \geqslant 1$. Supposons de plus que l'ensemble $\{x_t | t \in \Delta\}$ soit non contenu dans le lieu singulier de S. On choisit une résolution des singularités $\mu : \bar{S} \to S$ de sorte que μ soit un isomorphisme sur le lieu lisse de S. On considère la transformée stricte $\bar{C}_t$ de la courbe C_t par μ. L'ensemble $\{x_t | t \in \Delta\}$ étant non inclus dans $\mathrm{Sing}(S)$, pour t général, le point x_t est en dehors du lieu exceptionnel de μ et en ces points on a donc toujours

$$\mu^* L \cdot \bar{C}_t < \mathrm{mult}_{\mu^{-1}(x_t)} \bar{C}_t.$$

On pose $m = \mathrm{mult}_{\mu^{-1}(x_t)} \bar{C}_t$ pour t général. D'après [EL93], corollary 1.2, on a alors

$$C_t^2 \geqslant m(m-1).$$

Par le théorème d'indice de Hodge, on a alors

$$m(m-1) \leqslant (\mu^* L)^2 \bar{C}_t^2 \leqslant (\mu^* L \cdot \bar{C}_t)^2 \leqslant (m-1)^2$$

ce qui est une contradiction si $m > 1$. □

4.1.2. Conjecture de non-annulation effective

Bien sûr, il existe des diviseurs amples non linéairement équivalents à un diviseur effectif et dont la différence avec tout diviseur effectif n'est pas pseudo-effective[2], il n'y a donc aucun espoir d'obtenir une minoration universelle des constantes de Seshadri en dimension 3 à l'aide du lemme 47.

Cependant, comme l'a remarqué Kawamata dans [Kaw00] (voir conjecture ci-dessous), on peut espérer que $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$ si D est un diviseur adjoint, c'est-à-dire $D \sim K_X + H$ pour un diviseur gros et nef H.

La conjecture de Kawamata est exprimée dans le cadre des paires. Bien que dans l'énoncé du théorème 45, on ne considère que les variétés lisses, on est amené au cours de la preuve du théorème à prendre en compte des variétés singulières. De plus, en vue d'une application à la minoration des constantes de Seshadri en dimension 4 (voir par exemple le théorème 74) il est nécessaire de pouvoir travailler sur des variétés singulières.

Conjecture 50 ([Kaw00], conjecture 2.1) *Soit X une variété complète normale, B un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X tel que (X, B) soit une paire klt et D un diviseur de Cartier sur X. Supposons que D soit nef et que $H = D - (K_X + B)$ soit nef et gros. Alors le fibré en droites $\mathcal{O}_X(D)$ a une section globale non nulle : $H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$.*

On peut noter que cette conjecture est une version (beaucoup) plus forte d'une conjecture de Beltrametti et Sommese (voir [BS95], conjecture 7.2.7). Cette dernière a été démontrée en dimension 3 par Fukuma dans [Fuk06].

Dans [Kaw00], Kawamata montre que la conjecture est vraie en dimension inférieure à 2.

[2]Par exemple un fibré en droites général de degré 1 sur une courbe de genre 2 ou plus.

Théorème 51 ([Kaw00], theorem 3.1) *Soit X une variété complète normale, B un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X tel que (X, B) soit une paire klt et D un diviseur de Cartier sur X. Supposons que D soit nef et que $H = D - (K_X + B)$ soit nef et gros. Si de plus $D^3 \equiv 0$, alors*

1. *$H^0(X, D) \neq 0$.*
2. *Le système linéaire $|mD|$ est sans point de base pour tout entier $m \geqslant 2$.*

Si le diviseur anticanonique de X est nef, tout diviseur ample est adjoint et on peut en déduire une minoration des constantes de Seshadri de tout diviseur ample sur de telles variétés. En dimension 3, il est bien connu que l'existence de sections globales pour un fibré en droites ample découle dans certains cas de la pseudo-effectivité de la seconde classe de Chern de X. Commençons par définir ce que l'on entend par seconde classe de Chern de X lorsque X est une variété singulière.

Définition 52 *La première classe de Chern d'une variété projective lisse X, $c_1(X)$, est la première classe de Chern du fibré tangent de X. C'est aussi celle du fibré anticanonique de X. De même la seconde classe de Chern de X, $c_2(X)$, est la seconde classe de Chern du fibré tangent de X.*

Si X est une variété projective à singularités terminales de dimension 3, il existe un ouvert $U \subset X$, complémentaire d'un nombre fini de points tel que $X_{|U}$ soit lisse. La classe de Chern $c_2(T_X|_U)$ induit un élément noté $c_2(X)$ bien défini dans $H^4_{DR}(X, \mathbb{C})$.

La seconde classe de Chern de X est dite pseudo-effective si l'image du cycle $c_2(X)$ dans $N_1(X)$ appartient au cône $\overline{\mathrm{NE}}(X)$.

Lemme 53 *Soit X une variété projective à singularités terminales de dimension 3 dont le diviseur anticanonique est nef et dont la deuxième classe de Chern est pseudo-effective. Tout fibré en droites L gros et nef sur X a une section globale non nulle.*

Démonstration D'après le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg, le diviseur $-K_X$ étant nef, la cohomologie supérieure de $\mathcal{O}_X(L)$ est nulle. On en déduit grâce au théorème de Riemann-Roch que $h^0(X, \mathcal{O}_X(L)) = \chi(\mathcal{O}_X(L)) = \deg(\mathrm{ch}(L) \cdot \mathrm{td}(T_X))_3$, où le 3 en indice indique qu'on ne prend que la composante en degré 3 du produit. On a alors (voir [Har77] p. 432])

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(L)) = \frac{1}{6}c_1^3(L) + \frac{1}{4}c_1(X) \cdot c_1^2(L) + \frac{1}{12}c_1(L) \cdot (c_1^2(X) + c_2(X)) + \chi(\mathcal{O}_X).$$

Or d'après [Kaw86], lemma 2.2 et lemma 2.3 (voir plus généralement l'ensemble de la section 2, on pourra aussi consulter [Rei87] section 8) on a $\chi(\mathcal{O}_X) \geqslant \frac{1}{24}c_1(X) \cdot c_2(X)$, d'où

$$h^0(X, \mathcal{O}_X(L)) \geqslant \frac{1}{6}c_1^3(L) + \frac{1}{4}c_1(X) \cdot c_1^2(L) + \frac{1}{12}c_1(L) \cdot (c_1^2(X) + c_2(X)) + \frac{1}{24}c_1(X) \cdot c_2(X).$$

Puisque $c_1^3(L) > 0$, on en déduit que $h^0(X, \mathcal{O}_X(L)) > 0$ si les produits qui font intervenir $c_2(X)$ sont positifs. Par hypothèse, la deuxième classe de Chern $c_2(X)$ est pseudo-effective et a donc une intersection positive ou nulle avec toute classe nef. $\square$

Comme le note Xie dans [Xie04], depuis Miyaoka, différents auteurs ont traité de la pseudo-effectivité de la seconde classe de Chern des variétés dont le diviseur anticanonique est nef. Avant d'énoncer ces résultats (regroupés dans le théorème 55), rappelons la notion de dimension numérique d'un diviseur.

Définition 54 *La dimension numérique $\nu(X, D)$ d'un diviseur D nef est le plus grand entier k tel que $D^k \not\equiv 0$. La dimension numérique $\nu(X)$ d'une variété X telle que $-K_X$ soit nef est la dimension numérique de $-K_X$.*

Théorème 55 *Soit X une variété projective à singularités terminales de dimension 3 telle que $-K_X$ soit nef. Dans les cas suivants, la seconde classe de Chern de X est pseudo-effective :*
- $\nu(X) = 0$ *(Miyaoka, [Miy87] theorem 1.1),*
- $\nu(X) = 1$ *(Keel, Matsuki et McKernan, [KMM04] corollary 6.2),*
- $\nu(X) = 2$*, X lisse et $q(X) \neq 0$ (Xie [Xie04] theorem 3.12 et proposition 2.4),*
- $\nu(X) = 3$ *(Kollár, Miyaoka, Mori et Takagi [KMMT00] page 5).*

Le seul cas restant ouvert est celui où la dimension numérique de X vaut 2 et son irrégularité est nulle. Dans [Xie04], Xie conjecture que la seconde classe de Chern de X est aussi pseudo-effective et obtient des résultats partiels dans ce sens.

Proposition 56 (Xie, [Xie04] corollary 4.14) *Soit X une variété projective à singularités terminales de dimension 3. Supposons que $\nu(X) = 2$, $q(X) = 0$ et que le nombre de Picard de X vérifie $\rho(X) \leqslant 3$. Alors la seconde classe de Chern de X est pseudo-effective.*

Lemme 57 ([Xie04], lemma 4.7) *Soit X une variété projective lisse de dimension 3, $X \to Y$ une contraction divisorielle d'une arête K_X-négative. Supposons que l'image du diviseur exceptionnel dans Y soit un point (contraction de type D_I) et que le diviseur anticanonique $-K_Y$ de Y soit gros et nef. Alors la seconde classe de Chern de X, $c_2(X)$, est pseudo-effective.*

On procède cependant différemment pour minorer les constantes de Seshadri dans ce cas, et on n'utilise plus la conjecture de non-annulation effective : on fait appel à la description de Bauer et Peternell [BP04] des variétés de dimension 3 à diviseur anticanonique nef.

4.2. Rappels lorsque le diviseur anticanonique est nef

On s'intéressera dans cette section aux variétés lisses de dimension 3 dont le diviseur anticanonique est nef et non trivial. On s'attardera plus particulièrement sur les variétés de dimension numérique égale à 2 et d'irrégularité nulle.

4.2.1. Notations et rappels préliminaires

La réduction nef définie ci-dessous est une application presque holomorphe. Commençons par définir cette dernière notion.

Définition 58 ([BCE⁺02], definition 2.3) *Soit X et Y des variétés projectives normales $f : X \dashrightarrow Y$ une application rationnelle et X^0 l'ouvert maximal sur lequel f est holomorphe. L'application f est dite presque holomorphe si certaines des fibres de la restriction $f_{|X^0}$ sont compactes.*

Cette définition équivaut à demander que l'image du lieu d'indétermination de l'application rationnelle f ne couvre pas Y.

Définition 59 (Réduction nef) *Soit L un fibré en droites nef sur une variété X projective normale et de dimension n. La réduction nef de L est une application rationnelle, presque holomorphe et dominante $f : X \dashrightarrow B$ à fibres connexes telle que :*

1. *L soit numériquement trivial sur toutes les fibres compactes de dimension $\dim X - \dim B$,*
2. *pour un point $x \in X$ en position générale et pour toute courbe irréductible C passant par x vérifiant $\dim f(C) > 0$, on ait $L \cdot C > 0$.*

Dans [BCE⁺02], les (nombreux) auteurs ont montré l'existence et l'unicité d'une telle réduction nef.

Théorème 60 ([BCE⁺02]) *Soit L un fibré en droites nef sur une variété normale projective X de dimension n. La réduction nef $f : X \dashrightarrow B$ de L existe et est unique à équivalence birationnelle de B près.*

La dimension de la variété B dans le théorème précédent est donc un invariant du fibré en droites nef L.

Définition 61 *La dimension nef $n(L)$ d'un fibré en droites nef L est la dimension de l'image de la réduction nef de L. On définit la dimension nef d'un diviseur de Cartier nef D en posant $n(D) = n(\mathcal{O}_X(D))$. La dimension nef d'une variété dont le diviseur anticanonique est nef est $n(X) = n(-K_X)$.*

On peut comparer la dimension nef d'un diviseur à sa dimension de Kodaira et à sa dimension numérique.

Proposition 62 (Voir [BP04] definition-proposition 1.4) *Soit X une variété projective lisse et D un diviseur nef. Si on note $\kappa(D)$ la dimension de Kodaira-Iitaka de D, $\nu(D)$ sa dimension numérique et $n(D)$ sa dimension nef alors*

$$\kappa(D) \leqslant \nu(D) \leqslant n(D).$$

Dans [BP04], les auteurs étudient la réduction nef du diviseur anticanonique pour les variétés de dimension 3 à fibré anticanonique nef et non trivial. En comparant cette réduction nef avec les contractions des arêtes du cône de Mori ils en tirent plusieurs résultats de classification. Pour les variétés de dimension 3, la réduction nef de $-K_X$ est holomorphe.

Théorème 63 ([BP04], theorem 2.1) *Soit X une variété projective lisse de dimension 3 dont le diviseur anticanonique $-K_X$ est nef. La réduction nef de $-K_X$ est holomorphe et $-K_X$ est trivial sur chacune de ses fibres. De plus lorsque X est rationnellement connexe et que $n(-K_X) = 1$ ou $n(-K_X) = 2$ alors $-K_X$ est semi-ample et la réduction nef de $-K_X$ est la factorisation de Stein du morphisme induit par un grand multiple de $-K_X$.*

Les résultats de classification obtenus par les auteurs de [BP04] sont donnés à revêtement étale près et dépendent de l'irrégularité maximale de X.

Définition 64 *L'irrégularité $q(X)$ d'une variété projective normale X est la dimension de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. L'irrégularité maximale de X est*

$$\tilde{q}(X) = \max\{q(\tilde{X}) \mid f : \tilde{X} \to X, f \text{ est fini et étale}\}.$$

Dans certains cas, si l'irrégularité de X est nulle, il en est de même pour l'irrégularité maximale. Le résultat suivant nous sera utile.

Proposition 65 (Voir [BP04], corollary 4.4) *Soit X une variété projective lisse de dimension 3, de diviseur anticanonique $-K_X$ nef et non numériquement trivial (i.e $-K_X \not\equiv 0$). Si $\tilde{q}(X) > 0$, alors $q(X) > 0$.*

4.2.2. Quelques éléments de classification

On commence par rappeler un résultat sur les variétés d'irrégularité nulle. On vient de voir que dans ce cas l'irrégularité maximale de la variété est nulle. Le résultat suivant sera cependant énoncé comme dans l'article original en utilisant l'irrégularité maximale, le présent rappel des résultats de [BP04] ne respectant pas la chronologie de l'article.

Proposition 66 ([BP04], corollary 3.2) *Soit X une variété projective lisse de dimension 3 d'irrégularité maximale $\tilde{q}(X) = 0$ et de diviseur anticanonique $-K_X$ nef mais non numériquement trivial (i.e $-K_X \not\equiv 0$). Si X n'est pas rationnellement connexe alors soit $X \simeq \mathbb{P}^1 \times S$ pour une surface S d'Enriques ou K3, soit X est un fibré en $\mathbb{P}^1$ non trivial sur une surface d'Enriques qui est trivialisé par le revêtement universel de degré 2, $\tilde{S} \to S$. Dans tous les cas on a $n(-K_X) = 1$.*

On s'intéresse maintenant plus spécifiquement aux variétés rationnellement connexes, d'irrégularité nulle et de dimension numérique $\nu(X) = 2$. On a vu à la proposition 62 que dans ce cas $n(X) = 2$ ou $n(X) = 3$.

Supposons dans un premier temps que $n(X) = 2$. La réduction nef de $-K_X$ est un morphisme $f : X \to B$ vers une surface B normale. On note $\varphi : X \to Y$ une contraction élémentaire de Mori. Il en existe au moins une puisque $-K_X \not\equiv 0$. On peut remarquer que le système linéaire $|-K_X|$ est non vide : $h^0(-K_X) \geqslant 3$ (voir [BP04], page 335). Commençons par le cas $\dim Y = 2$. Nous n'aurons besoin que du cas d'un fibré en coniques dont le discriminant est vide.

Théorème 67 ([BP04], theorem 6.6) *Avec les notations ci-dessus, supposons que* $\dim Y = 2$. *Soit* Δ *le discriminant du fibré en coniques* $\varphi : X \to Y$ *et supposons* $\Delta = \varnothing$. *Alors* φ *est un fibré en* $\mathbb{P}^1$ *et* $X = \mathbb{P}(E)$ *pour un fibré vectoriel* E *de rang* 2 *sur* Y. *En particulier* $-K_Y$ *est nef. De plus on a soit* $B = \mathbb{P}^2$, *soit* $B = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *ou soit* B *est l'éclatement de* $\mathbb{P}^2$ *en un point et*

1. *si* $B = \mathbb{P}^2$ *alors* $X \subset \mathbb{P}^2 \times Y$ *est donné par* $X \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \boxtimes \mathcal{O}_Y(-K_Y)|$ *et* $K_Y^2 > 0$,
2. *si* $B = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *ou si* B *est l'éclatement de* $\mathbb{P}^2$ *en un point, alors* Y *est* $\mathbb{P}^2$ *éclaté en* 9 *points de sorte que* Y *soit munie d'une fibration elliptique* $g : Y \to \mathbb{P}^1$ *et que* $E = g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ *avec* $a = 0$ *ou* $a = 1$.

On s'intéresse ensuite au cas $\dim Y = 3$.

Proposition 68 (Voir [BP04], proposition 6.7) *Toujours avec les même notations, supposons que* $\dim Y = 3$. *Notons* E *le diviseur exceptionnel de l'éclatement* $\varphi : X \to Y$ *et supposons que* $\dim \varphi(E) = 0$. *Alors la variété* Y *est terminale et le diviseur anticanonique* $-K_Y$ *est gros et nef.*

Il reste maintenant à considérer le cas des variétés de dimension nef égale à 3. Les résultats sur ces variétés sont moins précis mais sont suffisants pour notre propos. On a notamment un résultat sur la structure du système linéaire associé au diviseur anticanonique.

Proposition 69 ([BP04], proposition 7.2) *Soit* X *une variété projective de dimension* 3 *rationnellement connexe de diviseur anticanonique* $-K_X$ *nef et vérifiant* $n(-K_X) = 3$ *et* $\nu(-K_X) = 2$. *Alors le système linéaire* $|-K_X|$ *a une partie fixe non vide, c'est-à-dire une composante divisorielle de son lieu de base, que l'on note* A. *La partie mobile induit une fibration* $f : X \to \mathbb{P}^1$. *Si* F *est une fibre de* f *alors* $|-K_X| = A + |kF|$ *avec* $k \geqslant 2$. *De plus* $A^3 = A^2 \cdot F = 0$.

4.3. Démonstrations

Démonstration (Théorème 45) On commence par traiter le cas général, c'est-à-dire $(\nu(X), q(X)) \neq (2, 0)$.

On sait d'après le théorème 55 que dans ce cas, la deuxième classe de Chern de X est pseudo-effective. On en déduit que $H^0(X, L) \neq 0$ en utilisant le lemme 53. En appliquant le lemme 47 au diviseur ample L et au diviseur effectif $D \in |L|$, on obtient $\varepsilon(L; x) \geqslant 1$.

En particulier cela montre le résultat pour les diviseurs amples des variétés de Fano de dimension 3.

Il reste donc à minorer les constantes de Seshadri des fibrés en droites amples sur les variétés vérifiant $(\nu(X), q(X)) = (2, 0)$.

On a vu à la proposition 65 que si l'irrégularité de X est nulle, il en est de même pour tout revêtement étale de X. La dimension numérique de X valant $\nu(X) = 2$, on a $n(X) \geqslant 2$ d'après l'inégalité de la proposition 62. On peut alors déduire de la proposition 66 que la variété X est rationnellement connexe.

On distingue deux sous-cas, selon la dimension nef de X. Commençons par le cas $n(X) = 2$.

Supposons que $L + K_X$ soit nef. Le système linéaire associé au diviseur anticanonique étant non vide, pour un élément $S \in |-K_X|$ et un point x en position générale sur $\operatorname{supp} S$, la constante de Seshadri de L en x est minorée par 1 : en effet le diviseur $L - S$ est nef par hypothèse et il suffit alors d'appliquer le lemme 47 à L et S.

Si $L + K_X$ n'est pas nef, il existe une courbe rationnelle Γ engendrant une arête $R = \mathbb{R}_+ \cdot [\Gamma]$ de $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X<0}$ et vérifiant $(L + K_X) \cdot \Gamma < 0$. Puisque L est ample, on a $L \cdot C \geqslant 1$ pour toute courbe C, donc l'arête R est de longueur au moins 2. On considère la contraction extrémale $\varphi : X \to Y$ associée.

Commençons par étudier le cas d'une contraction divisorielle. En dimension 3, les contractions extrémales divisorielles de longueur au moins 2 sont les éclatements d'un point lisse (théorèmes 23 et 24). La variété Y est alors terminale et de diviseur anticanonique gros et nef (proposition 68). Sa deuxième classe de Chern est donc pseudo-effective (théorème 55 - point 4) et on en déduit que la seconde classe de Chern de X est pseudo-effective (lemme 57). On conclut comme dans le point 1.

Supposons maintenant que la contraction associée à l'arête $\mathbb{R}_+ \cdot [\Gamma]$ soit une fibration. Par hypothèse, X n'est pas Fano donc Y ne peut être un point. Si Y est une courbe alors $\rho(X) = 2$ et donc, d'après la proposition 56, $c_2(X)$ est pseudo-effective. On conclut encore une fois comme au point 1.

Il reste finalement à traiter le cas où Y est une surface. L'arête $\mathbb{R}_+ \cdot [\Gamma]$ étant de longueur 2, le discriminant de la fibration est vide. La variété X est donc un fibré projectif sur Y de la forme $\mathbb{P}(E)$, pour un fibré vectoriel de rang 2 sur Y (théorème 67). Plus précisément soit X est une hypersurface de $\mathbb{P}^2 \times Y$ donnée par les zéros d'une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \boxtimes K_Y^{-1}$, soit Y admet une fibration elliptique $g : Y \to \mathbb{P}^1$ et X est de la forme $\mathbb{P}(g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}))$ avec $b = 0$ ou $b = 1$.

Dans le premier cas, en écrivant $L \equiv_{\mathbb{Q}} af^*\mathcal{O}(1) + \varphi^*D$ pour un diviseur de Cartier D sur Y et en considérant l'intersection de L avec une fibre de φ, on montre que $a = 1$: en effet, l'image d'une fibre l_y de φ par f est une droite or $\varphi^*D \cdot l_y = 0$ c'est-à-dire $af^*\mathcal{O}(1) \cdot l_y = L \cdot l_y$, et $L \cdot l_y \in \mathbb{N}^*$ donc a est un entier. De plus X n'est pas l'une des variétés apparaissant au théorème 81 : on en déduit que $2L + K_X$ est nef. Ceci combiné au fait que le diviseur $L + K_X$ n'est pas nef et que $K_X \cdot l_y = -2$ (en calculant par exemple K_X par adjonction), on en déduit que $a = 1$. On a alors φ^*D nef, puisque $2L + K_X = 2\varphi^*D$ est nef. Le diviseur $f^*\mathcal{O}(1)$ étant effectif, on peut appliquer le lemme 47 à L et $f^*\mathcal{O}(1)$ et les constantes de Seshadri de L sont donc minorées par 1 en tout point en position très générale.

Dans le second cas, on se donne un diviseur H dans la classe numérique de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$. On peut alors écrire $L \equiv aH + \varphi^* D$ pour un diviseur D sur Y et un entier $a > 0$. Montrons que D est ample. Puisque $E = g^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$, on a un plongement de $Y \simeq \mathbb{P}(g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ dans X et $H_{|Y} \equiv 0$. Mais $L_{|\mathbb{P}(g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})}$ est ample donc $\varphi^* D_{|\mathbb{P}(g^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})}$ est ample, c'est-à-dire D est ample. Soit $y \in Y$ un point tel que $\varepsilon(D; y) \geqslant 1$ (qui existe d'après la minoration des constantes de Seshari sur les surfaces, voir [EL93]) et $x \in X$ un point tel que $\varphi(x) = y$. Montrons que toute courbe C passant par x vérifie $L \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$: si C est une fibre il n'y a rien à prouver puisque C est lisse ; sinon, on a alors $\operatorname{mult}_x C \leqslant \deg \varphi_{|C} \cdot \operatorname{mult}_y \varphi(C)$ et donc $\operatorname{mult}_x C \leqslant (\deg \varphi_{|C})(D \cdot \varphi(C)) \leqslant L \cdot C$ par la formule de projection.

Il reste enfin le cas $n(X) = 3$.

La seule variété projective lisse de dimension 3 ayant une arête de longueur 4 étant $\mathbb{P}^3$ ([CMSB02], Corollary 0.3), le diviseur $K_X + 3L$ est nef.

D'après la proposition 69 ci-dessus, la partie mobile du système linéaire anticanonique induit un morphisme $f : X \to \mathbb{P}^1$. Si on note F une fibre de ce morphisme alors $|-K_X| = A + |kF|$, où A est la composante fixe du système et $k \geqslant 2$. Soit x un point sur le support de A et F_x une fibre de f passant par le point x. Toute courbe C passant par x et non incluse dans $\operatorname{supp} A \cup \operatorname{supp} F_x$ vérifie

$$-K_X \cdot C \geqslant A \cdot C + kF_x \cdot C \geqslant 3 \operatorname{mult}_x C$$

et donc $L \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$ puisque $3L + K_X$ est nef.

De plus, pour une fibre F lisse intersectant le lieu lisse de $\operatorname{supp} A$, l'intersection $\operatorname{supp} A \cap F$ étant une courbe, il existe un point $x \in \operatorname{supp} A \cap \operatorname{supp} F$ tel que $\varepsilon(L_{|\operatorname{supp} F}; x) \geqslant 1$ et $\varepsilon(L_{|\operatorname{supp} A}; x) \geqslant 1$: ceci découle de la proposition 49, les points lisses de F et de $\operatorname{supp} A$ ne vérifiant pas cette minoration pour les constantes de Seshadri de L étant dénombrables.

On a donc $L \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$ pour toute courbe C passant par x. On en déduit donc que $\varepsilon(L; x) \geqslant 1$.

□

On finit par la minoration des constantes de Seshadri pour les fibrés adjoints.

Démonstration (Proposition 46) D'après [Kaw00], proposition 4.1,

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \neq 0$$

et comme dans la preuve du théorème précédent, on en déduit que $\varepsilon(X, D; x) \geqslant 1$ pour tout point x en position très générale. □

5. Variétés de Fano d'indice grand

En dimension supérieure à trois, il est beaucoup plus difficile d'obtenir une minoration des constantes de Seshadri. L'existence d'un membre effectif pour un diviseur ample quelconque ne suffit plus à se ramener à la situation bien maîtrisée des surfaces, il faut itérer le procédé. Des problèmes apparaissent immédiatement : l'existence de tels membres effectifs pour un diviseur gros et nef quelconque découle de la positivité du diviseur anticanonique. Pour pouvoir itérer le procédé on doit aussi contrôler les singularités des diviseurs. De plus, par adjonction, le diviseur anticanonique de l'hypersurface produite ne va généralement pas être nef.

Des singularités apparaissent naturellement lors de l'utilisation de tels arguments de "découpage". Le cadre naturel pour traiter ces questions est celui des paires. Nous nous intéresserons dans ce chapitre à des paires presque de Fano. On rappelle que ce sont les paires telles que $-(K_X + \Delta_X)$ est gros et nef et que X est dans ce cas rationnellement connexe.

On appelle indice de la paire (X, Δ_X) le plus grand rationnel r tel que $-(K_X + \Delta_X) \equiv rH$ pour un diviseur entier gros et nef H. Un tel diviseur est appelé un diviseur fondamental de la paire (X, Δ_X). Il est unique à équivalence numérique près. Le coïndice de (X, Δ_X) est le rationnel $c = n + 1 - r$.

Un problème fondamental pour les paires de Fano ou presque de Fano klt est de trouver une échelle (en anglais "ladder"), c'est-à-dire une suite de sous-variétés normales et irréductibles $(X_i)_{0 \leqslant i \leqslant k}$ de X telles que :

1. X_i soit de codimension i dans X et $X_i \nsubseteq \Delta_X$ pour tout i,
2. $(X_i, \Delta_{X|X_i})$ soit une paire klt, presque de Fano si $i < k$ et pas presque de Fano si $i = k$,
3. X_i soit un diviseur fondamental dans $(X_{i-1}, \Delta_{X|X_{i-1}})$ pour $i > 0$.

L'existence d'une échelle se ramène à l'existence d'un membre effectif pas trop singulier dans le système fondamental (conjecture des "éléphants" de Reid). En effet il suffit de trouver un diviseur $S \in |H|$ dans le système fondamental de (X, Δ_X) tel que la paire $(X, \Delta_X + S)$ soit purement log-terminale. Dans ce cas, S est irréductible, réduit et normal, de plus la paire $(S, \Delta_{X|S})$ est klt. On conclut par récurrence sur la dimension.

5.1. Présentation des résultats

Pour les variétés presque de Fano de petit coïndice, l'existence d'une échelle pour le diviseur fondamental permet de ramener la minoration des constantes de Seshadri au cas des petites dimensions (*cf.* démonstration, section 5.2).

Proposition 70 *Soit* (X, Δ_X) *une paire presque de Fano klt de dimension* n*,* H *un diviseur de Cartier gros et nef sur* X *vérifiant* $-(K_X + \Delta_X) \equiv (n - c + 1)H$ *pour un rationnel* $c < 4$*. Alors pour un point* x *en position très générale, on a*

$$\varepsilon(X, H; x) \geqslant 1.$$

Si de plus la variété X est de Fano, factorielle et à singularités terminales, on peut obtenir une minoration des constantes de Seshadri de n'importe quel diviseur ample A sur X.

Théorème 71 *Soit* X *une variété de dimension au moins* 3*, presque de Fano, factorielle, à singularités terminales et de coïndice inférieur ou égal à 3,* L *un diviseur ample sur* X*. Pour tout point* x *en position très générale, on a*

$$\varepsilon(X, L; x) \geqslant 1.$$

Le théorème ci-dessus se déduit de la proposition 70 en utilisant des résultats de la théorie d'adjonction (*cf.* démonstration, section 5.4). Dans la section suivante sont rassemblés des rappels sur les principaux résultats de cette théorie utilisés au cours de la preuve du théorème 71.

On peut toutefois noter que dans le cas où X est lisse, de Fano de dimension au moins 7 et de coïndice au moins 4, le nombre de Picard de X est 1 ([Wiś90], theorem A, voir ci-dessous) : dans ce cas le théorème 71 ci-dessous n'apporte rien par rapport à la proposition 70.

Définition 72 (Pseudo-indice) *Soit* X *une variété de Fano lisse. On définit le pseudo-indice de* X *par*

$$i(X) = \min\{-K_X \cdot C | C \textit{ est une courbe rationnelle de } X\}.$$

Théorème 73 (Wiśniewski) *Soit* X *lisse, de Fano. Si le pseudo-indice de* X *vérifie* $i(X) > \frac{1}{2} \dim X + 1$ *alors* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$*. En particulier, si l'indice de* X *est strictement supérieur à* $\frac{1}{2} \dim X + 1$ *alors* $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$*.*

Lorsque $\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}$, une minoration des constantes de Seshadri du diviseur fondamental de $-K_X$ induit par homogénéité une minoration pour tout diviseur ample. Bien sûr, si X est presque de Fano mais n'est pas de Fano, le nombre de Picard de X est strictement supérieur à 1, quelle que soit la dimension de X. Dans le cas singulier, le nombre de Picard de X n'est plus aussi contraint par l'indice de la variété et il n'est pas clair à l'heure actuelle[1] si un analogue de la conjecture de Mukai [Muk88] existe dans ce cas. Sur ce sujet, on pourra consulter l'article [CJR06] de Casagrande, Jahnke et Radloff qui traite le cas de la dimension 3. Jahnke et Peternell donnent une classification[2] des variétés presque de del Pezzo dans [JP06].

[1] Merci à Cinzia Casagrande d'avoir bien voulu m'apporter des précisions sur ce sujet.
[2] Nous n'utiliserons pas cette dernière.

Pour une variété de Fano de dimension 4 (et d'indice quelconque), il est possible de ramener la minoration des constantes de Seshadri du diviseur anticanonique à une minoration des constantes de Seshadri d'un diviseur ample sur une variété de dimension 3 en utilisant l'existence d'un membre effectif peu singulier dans le système fondamental (voir démonstration, section 5.5).

Théorème 74 *Soit X une variété de Fano lisse de dimension 4, H un diviseur ample vérifiant $-K_X \equiv rH$ pour un entier r. Alors pour un point x en position très générale, on a*

$$\varepsilon(X, H; x) \geqslant 1.$$

5.2. Le cas du diviseur anticanonique

Le point essentiel pour la démonstration de la minoration des constantes de Seshadri pour le diviseur fondamental de $-K_X$ (proposition 70) est l'existence d'une échelle pour la paire (X, Δ_X) ([Amb99a], main theorem) :

Théorème 75 (Ambro) *Soit H un diviseur de Cartier gros et nef sur une variété projective normale X de dimension n. Supposons qu'il existe une frontière Δ_X sur X telle que*

1. *(X, Δ_X) soit klt,*
2. *$-(K_X + \Delta_X) \equiv (n - c + 1)H$, pour un rationnel c vérifiant $n - c + 1 > 0$,*
3. *$c < 4$.*

Alors $\dim |H| \geqslant n - 1$ et $|H|$ n'a pas de composante fixe. De plus, la paire $(X, \Delta_X + S)$ est purement log-terminale pour $S \in |H|$ général.

En particulier, $(S, \Delta_{X|S})$ est une paire presque de Fano de coïndice c si $n > c$, est Calabi-Yau si $c = n$ et est de type général si $n < c < n + 1$.

Démonstration (Proposition 70) On procède par récurrence. Supposons que pour toute paire (Y, Δ_Y) de dimension $n - 1$ vérifiant les hypothèses de la proposition 70 on ait $\varepsilon(Y, H_Y; x) \geqslant 1$, pour un point x en position très générale. Soit (X, Δ_X) une paire de dimension $n \geqslant 4$ vérifiant les hypothèses. D'après le théorème 75, il existe un élément $S \in |H|$ irréductible et réduit tel que $(S, \Delta_{X|S})$ soit une paire presque de Fano. D'après notre hypothèse de récurrence, les constantes de Seshadri de $H_{|S}$ sont minorées par 1 pour tout point $y \in S$ en position très générale. Toute courbe C incluse dans S et passant par y vérifie donc $H \cdot C = H_{|S} \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_y C$. De plus, le diviseur S étant effectif, toute courbe C non incluse dans S et passant par un point $y \in \operatorname{supp} S$ vérifie $H \cdot C = S \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_y C$. On en déduit que $\varepsilon(X, H; y) \geqslant 1$ et donc que $\varepsilon(X, H; x) \geqslant 1$ pour tout point x de X en position très générale.

Si (X, Δ_X) est de dimension 3, il existe d'après le théorème 75 un diviseur $S \in |H|$ irréductible et réduit. D'après le lemme 47, appliqué à H et S, les constantes de Seshadri de H sont minorées par 1 en tout point x en position générale. □

5.3. Rappels sur la théorie d'adjonction

La démonstration du théorème 71 utilise la minoration des constantes de Seshadri du diviseur anticanonique de la variété X en étudiant la valeur nef du diviseur ample A. Cette étude se fait classiquement dans le cadre des variétés polarisées (X, L), c'est-à-dire des couples formés d'une variété X et d'un fibré en droites ample L.

Définition 76 *Soit A un diviseur ample sur une variété X factorielle et à singularités terminales. La valeur nef de A est le rationnel $\tau(A) = \inf\{\tau \mid K_X + \tau A \text{ est nef}\}$.*

La définition ne dépendant que de la classe d'équivalence numérique de A, pour un fibré en droites ample L, on définit la valeur nef de L comme étant la valeur nef de $c_1(L)$. La valeur nef d'une variété polarisée (X, L) est la valeur nef de la polarisation L.

On peut noter que le fait que la valeur nef de A soit un rationnel est une conséquence du théorème de rationalité ([Deb01], theorem 7.34).

La théorie de l'adjonction est l'étude des variétés polarisées de grande valeur nef. On résume dans le théorème 81 la classification des variétés polarisées (X, L) dont la valeur nef est strictement supérieure à $\dim X - 1$. Auparavant, on donne quelques définitions concernant les variétés polarisées que nous allons rencontrer.

Définition 77 (Cône généralisé) *Soit L un fibré en droites très ample sur une variété projective V de dimension n et $E = \mathcal{O}_V^{\oplus N-n}$ où $N \geqslant n$ est un entier. On note $\mathcal{C} = \mathbb{P}(E \oplus L)$ et $\xi = \mathcal{O}_{\mathcal{C}}(1)$ le fibré en droites tautologique sur $\mathcal{C}$. Soit $\varphi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^m$ le morphisme défini par les sections globales de ξ. On note $C_N(V, L)$ l'image de $\mathcal{C}$ par φ et ξ_L la restriction de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ à $C_N(V, L)$. La variété polarisée $(C_N(V, L), \xi_L)$ est appelée le cône généralisé de dimension N de base (V, L). On écrira souvent de manière abusive $C_N(V, L)$ au lieu de $(C_N(V, L), \xi_L)$.*

Définition 78 (Scroll) *Une variété polarisée (X, L) r-Gorenstein (c'est-à-dire telle que rK_X soit de Cartier pour un entier $r \geqslant 1$) de dimension n est appelée un scroll sur une variété V de dimension m s'il existe un morphisme surjectif à fibres connexes $p : X \to V$ et un diviseur de Cartier A ample sur V tel que*

$$r(K_X + (n - m + 1)L) \sim p^*A.$$

On peut noter que la fibre générale d'un scroll est un espace projectif (voir [BS93]).

Définition 79 (Variétés de del Pezzo) *Soit X une variété normale r-Gorenstein de dimension n dont le diviseur anticanonique est ample et L un diviseur de Cartier ample sur X. On dit que (X, L) est une variété de del Pezzo si $rK_X \sim -(n-1)rL$.*

Remarque 80 Toutes les surfaces lisses dont le diviseur anticanonique est ample sont des variétés de del Pezzo en ce sens, avec $L = -K_X$. Cela explique la terminologie utilisée au chapitre 3.

Théorème 81 ([BS95], proposition 7.2.2, theorem 7.2.3, theorem 7.2.4) *Soit L un fibré en droites ample sur une variété X projective, normale, factorielle, à singularités terminales et de dimension n. Supposons que la valeur nef de L soit strictement supérieure à $n-1$. Alors la variété polarisée (X, L) est isomorphe à l'une des variétés polarisées suivantes :*
- $(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(1))$ *et* $\tau(L) = n+1$,
- $(Q, \mathcal{O}_Q(1))$, *où Q est une hyperquadrique dans $\mathbb{P}^{n+1}$ et $\tau(L) = n$,*
- $(\mathbb{P}(E), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$ *pour un fibré vectoriel E de rang n sur une courbe lisse et $\tau(L) = n$,*
- $C_n(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$, *c'est-à-dire un cône généralisé au-dessus de $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ et $\tau(L) = n - 1/2$.*

Le résultat précédent apparaît aussi sous une forme synthétique dans le livre de Beltrametti et Sommese [BS95], table 7.1.

Bien sûr, plus la valeur nef de L est petite, moins la paire (X, L) est contrainte. La première valeur nef posant problème est le cas $\tau(L) = n-1$. En effet, si X est l'éclatement d'une variété Y projective normale et factorielle en un point lisse, il existe un diviseur de Cartier ample L sur X dont la valeur nef est $n-1$. Il suffit de considérer le tiré en arrière sur X d'un diviseur de Cartier sur Y suffisamment ample et de lui soustraire une fois le diviseur exceptionnel. On souhaiterait pouvoir aller plus loin dans l'analyse de la variété polarisée (X, L) et pour cela on considère le morphisme associé à la valeur nef de L. D'après le théorème d'absence de point de base ("base point freeness") de Kawamata-Shokurov, pour tout entier k suffisamment divisible, le système linéaire associé à $k(K_X + \tau(L)L)$ est sans point base. Le morphisme $\psi : X \to \mathbb{P}^N$ associé possède une factorisation de Remmert-Stein $X \to Y \to \mathbb{P}^N$ de sorte que $X \to Y$ soit à fibres connexes, Y soit normale et que le morphisme $Y \to \mathbb{P}^N$ soit fini.

Définition 82 *On note φ_L le morphisme $X \to Y$ défini ci-dessus. On l'appelle morphisme associé à la valeur nef de L, qu'on abrègera parfois en morphisme nef de L.*

Le théorème suivant permet de distinguer les cas où la valeur nef de L est "artificiellement" gonflée à $n-1$ par éclatement.

Théorème 83 ([BS95] theorem 7.3.2) *Soit X une variété projective à singularités terminales de dimension n et r un entier tel que rK_X soit un diviseur entier. Soit L un fibré en droites ample sur X et φ_L le morphisme nef de L. Supposons que $\tau(L) \leqslant n-1$. Alors $K_X + (n-1)L$ est ample à moins que $\tau(L) = n-1$ et qu'on soit dans l'un des cas suivants :*

1. $-rK_X \sim r(n-1)L$ *et dans ce cas (X, L) est une variété de del Pezzo,*
2. (X, L) *est une fibration en quadriques au-dessus d'une courbe lisse sous φ_L,*
3. (X, L) *est un scroll sous φ_L au-dessus d'une surface normale,*
4. *Le morphisme $\varphi_L : X \to Y$ est birationnel. Dans ce cas, si de plus X est factorielle, alors φ_L est la contraction simultanée de diviseurs $E_i \simeq \mathbb{P}^{n-1}$ sur des points lisses distincts tels que $E_i \subset \mathrm{reg}(X)$, $\mathcal{O}_{E_i}(E_i) \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$ et la restriction L_{E_i} de*

L à E_i vérifie $L_{E_i} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(1)$. De plus, si on pose $L' = (\varphi_{L*}L)^{**}$, alors L' et $K_Y + (n-1)L'$ sont amples et $K_X + (n-1)L \sim \varphi_L^*(K_Y + (n-1)L')$.

Remarque 84 Aux points 1, 2 et 3 du théorème précédent, la restriction de $K_X + (n-1)L$ à une fibre générale est numériquement triviale. En particulier le diviseur $K_X + (n-1)L$ n'est pas gros.

On peut alors pousser plus loin la classification des variétés polarisées de grande valeur nef en considérant leur première réduction.

Définition 85 *Soit une variété polarisée (X, L) factorielle et à singularités terminales. Si $K_X + (n-1)L$ est gros et nef, on dit que (X, L) admet une première réduction. Cette dernière est une variété polarisée (Y, L') telle que :*

1. *si $K_X+(n-1)L$ est ample alors la première réduction de (X, L) est $(Y, L') = (X, L)$,*
2. *si $K_X + (n-1)L$ n'est pas ample, la première réduction de (X, L) est la variété polarisée (Y, L') introduite au point 4 du précédent théorème.*

Après première réduction, on peut continuer la classification des variétés polarisées. Le résultat suivant est une version condensée de [BS95], theorem 7.3.4.

Théorème 86 (Voir [BS95], theorem 7.3.4) *Soit (X, L) une variété polarisée normale factorielle et à singularités terminales de dimension $n \geqslant 3$ admettant une première réduction (Y, L'). On note $\varphi_{L'}$ le morphisme associé à la valeur nef de L'. Supposons que la valeur nef de L' vérifie $n-2 < \tau(L') < n-1$. Alors*

1. *soit $n = 4$, $\tau(L') = 5/2$, $(Y, L') \cong (\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$,*
2. *soit $n = 3$.*

5.4. Variétés presque Fano d'indice au moins $n-2$

Les cas difficiles pour la minoration des constantes de Seshadri du diviseur ample A sont ceux où la valeur nef de A est strictement supérieure à $n-2$: en effet, dans ce cas on ne peut utiliser de comparaison avec les constantes de Seshadri du diviseur fondamental du diviseur anticanonique. On a vu cependant dans la section précédente que les variétés polarisées de valeur nef strictement supérieure à $n-2$ sont classifiées, si l'on excepte celles admettant une première réduction. Les deux lemmes suivants établissent la minoration souhaitée des constantes de Seshadri pour les variétés intervenant dans cette classification.

Lemme 87 *Soit (X, L) une des variétés polarisées du théorème 81. Supposons de plus que X soit rationnellement connexe. Alors les constantes de Seshadri de L sont minorées par 1 pour tout point $x \in X$ en position générale.*

Démonstration Dans le cas de $\mathbb{P}^n$ et de Q_n et du cône généralisé sur $\mathbb{P}^2$, le fibré en droites L est très ample donc les constantes de Seshadri de L sont minorées par 1 en tout point de X. Dans le cas d'un fibré projectif au-dessus d'une courbe lisse, on peut noter que la courbe est $\mathbb{P}^1$, l'image d'une variété rationnellement connexe étant rationnellement connexe. Les constantes de Seshadri de L sont alors minorées par 1 en tout point de X (voir l'exemple 17). $\square$

Lemme 88 *Soit (X, L) une des variétés apparaissant au point 2 ou au point 3 du théorème 83. Si l'on suppose de plus que X est rationnellement connexe alors la constante de Seshadri de L en un point x en position générale est minorée par* 1.

Démonstration On suppose dans un premier temps que (X, L) est une fibration en quadriques au-dessus d'une courbe lisse. La variété X étant rationnellement connexe, cette courbe est $\mathbb{P}^1$. La courbe étant lisse, la fibration est plate et le faisceau $\varphi_{L*}L$ est localement libre de rang $n+2$. On a donc un plongement de X dans $\mathbb{P}(\varphi_{L*}L)$ de sorte que L soit la restriction du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\varphi_{L*}L)}(1)$ à X (voir aussi [ABW93]). Les constantes de Seshadri de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\varphi_{L*}L)}(1)$ étant minorées par 1 en tout point de $\mathbb{P}(\varphi_{L*}L)$, il en va de même pour celles de L.

Supposons maintenant que (X, L) est un scroll au-dessus d'une surface normale S. On note $p : X \to S$ la projection sur S. La fibre générale étant un espace projectif, pour un point $x \in X$ en position très générale et une courbe C passant par x et incluse dans la fibre contenant x on a $L \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$.

La variété (X, L) étant un scroll au-dessus d'une surface, il existe un fibré en droites ample A sur S vérifiant $K_X + (n-1)L = p^*A$. Soit maintenant une courbe C passant par x non incluse dans une fibre de la projection p. Le point x étant en position très générale dans X, il en est de même de son image dans S. On note C' l'image de C dans S et $\nu : \overline{C'} \to C'$ et $\eta : \bar{C} \to C$ leurs normalisations respectives. Le morphisme $f = p_{|C} \circ \eta : \bar{C} \to C'$ se factorise en $\bar{C} \to \overline{C'} \to C'$. On note d le degré du morphisme $\bar{C} \to \overline{C'}$. De part la position générale de $p(x)$ dans S, on a $A \cdot C' \geqslant \operatorname{mult}_{p(x)} C'$. De plus on a l'inégalité suivante : $\operatorname{mult}_x C \leqslant d \operatorname{mult}_{p(x)} C'$. On a alors $p^*A \cdot C \geqslant d \operatorname{mult}_x C' \geqslant \operatorname{mult}_x C$. De plus, d'après la proposition 70, on a $H \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$. On a donc

$$(n-1)L \cdot C \geqslant -K_X \cdot C + p^*A \cdot C \geqslant rH \cdot C + p^*A \cdot C \geqslant (n-2) \operatorname{mult}_x C + \operatorname{mult}_x C$$

et on obtient finalement l'inégalité souhaitée : $L \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$. On a donc minoré les constantes de Seshadri de L par 1 pour tout point x en position très générale de X. $\square$

Après avoir traité tous ces cas particuliers, on peut enfin démontrer le théorème principal :

Démonstration (Théorème 71) On note $\tau(L) = \inf\{\tau \mid K_X + \tau L \text{ est nef}\}$ la valeur nef de (X, L). On distingue les cas $\tau(L) \leqslant n-2$ et $\tau(L) > n-2$.

Si $\tau(L) \leqslant n-2$ alors pour tout point $x \in X$ en position très générale, $\varepsilon(X, L; x) \geqslant 1$. Soit en effet C une courbe passant par x. Puisque $K_X + (n-2)L$ est nef, on a

$$(n-2)L \cdot C \geqslant -K_X \cdot C.$$

Or $\varepsilon(X, -K_X; x) \geqslant r_X \geqslant n-2$ d'après la proposition 70 et l'hypothèse sur l'indice de X. On en déduit que $L \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$, c'est-à-dire que $\varepsilon(X, L; x) \geqslant 1$.

Il reste à traiter le cas $\tau(L) > n-2$. D'après les lemmes 87 et 88, on peut supposer que (X, L) admet une première réduction. Via cette réduction, on obtient une variété polarisée (Y, L'). D'après le point 4 du théorème 83, la valeur nef de L' est strictement inférieure à $n-1$.

Supposons que $n-2 < \tau(L') < n-1$. On peut alors utiliser le théorème 86.

Les constantes de Seshadri de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)$ sont minorées par 1 en tout point. De plus, un éclatement de $\mathbb{P}^4$ ne peut être une variété de Fano d'indice supérieur à 2 : en effet si $X \to \mathbb{P}^4$ est un éclatement de $\mathbb{P}^4$ le long d'une sous-variété lisse, on a $\operatorname{Pic}(X) = \operatorname{Pic}(\mathbb{P}^4) \oplus \mathbb{Z} \cdot E$, où E est le diviseur exceptionnel. Donc si la première réduction de (X, L) est $(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2))$, la première réduction est un isomorphisme : en effet, la première réduction est l'éclatement d'un nombre fini de points lisses. Dans ce cas, $L \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^4}(2)$ et on a donc minoré les constantes de Seshadri de L par 1 en tout point de X.

Si $\dim Y = 3$, alors la dimension de X est ausi égale à 3, le morphisme $f : X \to Y$ étant birationnel. La variété X est donc une variété presque de Fano terminale. D'après le théorème 55 et le lemme 53, les constantes de Seshadri de L sont minorées par 1 pour tout point x en position très générale dans X.

Si $\tau(L') \leqslant n-2$ alors $K_Y + (n-2)L'$ est nef. D'après le point 4 du théorème 83, on a $K_X = f^*K_Y + (n-1)E$, où E est le diviseur exceptionnel de $f : X \to Y$. De plus le diviseur L est égal à $L = f^*L' - E$. On peut donc écrire

$$K_X + (n-2)L = f^*(K_Y + (n-2)L') + E.$$

Pour un point $x \in X$ en dehors du support de E et toute courbe C passant par x, on alors

$$(K_X + (n-2)L) \cdot C = f^*(K_Y + (n-2)L' + E) \cdot C \geqslant 0.$$

On peut donc conclure de la même manière que dans le cas $\tau(L) \leqslant n-2$. $\square$

5.5. Minoration pour le diviseur anticanonique des variétés de Fano de dimension 4

Démonstration (Théorème 74) On commence par montrer que les constantes de Seshadri de $-K_X$ sont minorées par 1 en tout point en position très générale. D'après [Kaw00], theorem 5.2, il existe un diviseur effectif $Y \in |-K_X|$ tel que la paire (X, Y) soit purement log terminale. En particulier, le diviseur Y est irréductible, normal et réduit. De plus Y est Gorenstein, ne possède que des singularités canoniques et son diviseur canonique est linéairement équivalent à 0. D'après [Kaw00], proposition 4.1, le fibré en droites $\mathcal{O}_Y(Y_{|Y})$ possède une section globale. On note D le diviseur effectif associé. Le diviseur $-K_{X|Y} - D$ étant numériquement trivial, on peut appliquer le lemme 47 à $-K_{X|Y}$. Soit x un point lisse de Y pour lequel $\varepsilon(Y, Y_{|Y}; x) \geqslant 1$. Toute courbe $C \subset X$ passant par x vérifie $-K_X \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$: si C est incluse dans Y cela découle de la minoration de la constante de Seshadri de $Y_{|Y}$ en x. Dans le cas contraire on a $-K_X \cdot C = Y \cdot C \geqslant \operatorname{mult}_x C$. On a donc $\varepsilon(X, -K_X; x) \geqslant 1$ et par semi-continuité des constantes de Seshadri, les constantes de Seshadri de $-K_X$ sont minorées par 1 en tout point en position générale.

Cela conclut le cas où $r = 1$, c'est-à-dire $-K_X = H$. Si $r > 1$, la variété X satisfait les hypothèses du théorème 71. $\square$

Deuxième partie .

Singularités et positivité locale

6. Idéaux multiplicateurs et positivité locale

Le principal résultat de ce chapitre est la preuve de la conjecture de non-annulation effective de Kawamata en dimension 3 pour les diviseurs adjoints à un diviseur de "grand" volume.

Théorème 89 *Soit X une variété projective lisse de dimension 3, L un diviseur ample sur X. Supposons que $\sqrt[3]{L^3} > 3$ et que $K_X + L$ soit nef. Alors $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) \neq 0$.*

La preuve de ce résultat (*cf.* sous-section 6.4.1) utilise les idéaux multiplicateurs, la notion de centre de singularités log-canoniques et la sous-adjonction de Kawamata. Une grande part de ce chapitre est consacré à l'introduction de ces différentes notions.

Comme application directe du résultat précédent, on obtient une minoration des constantes de Seshadri d'un tel diviseur. Sur des variétés non uniréglées, si la différence est trop importante entre le volume d'un diviseur adjoint et ses constantes de Seshadri, on en déduit dans certains cas l'existence de courbes rationnelles passant par tout point de la variété, ce qui est impossible si la variété n'est pas uniréglée. Plus précisément, on obtient le résultat suivant (*cf.* démonstration sous-section 6.4.3).

Corollaire 90 *Soit X une variété projective lisse de dimension 3, L un diviseur ample sur X. Supposons que $\sqrt[3]{L^3} > 3$ et que $K_X + L$ soit ample. On a alors $\varepsilon(K_X + L; x) \geqslant 1$ pour tout point x en position très générale dans X.*

De plus, si K_X est pseudo-effectif ou, de manière équivalente, si X n'est pas uniréglée, alors le résultat précédent reste vrai si $\sqrt[3]{L^3} \geqslant 3$.

On essaiera aussi de mettre en exergue le lien entre constantes de Seshadri et certains lieux de base (propositions 113, 114 et 115). En effet, on ne peut espérer minorer les constantes de Seshadri d'un diviseur ample en un point quelconque. On va donc essayer de procéder par récurrence sur la dimension, en faisant varier le point considéré le long d'un lieu de base d'une série linéaire bien choisie. Malheureusement il est très difficile de contrôler le lieu de base d'une série linéaire quelconque. Il est même généralement difficile de ne serait-ce que montrer l'existence d'une section globale non nulle d'un fibré en droites. C'est pour cela qu'on essaie de réinterpréter la remarque précédente en terme d'idéaux multiplicateurs et de seuils log-canoniques. Ces concepts sont en effet bien plus souples d'utilisation.

6.1. Rappels sur les idéaux multiplicateurs

6.1.1. Idéaux multiplicateurs

L'essentiel de ces rappels est tiré de [Laz04b].

Définition 91 (Idéaux multiplicateurs) *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur une variété lisse X et soit $\mu : X' \to X$ une log-résolution de D. Alors l'idéal multiplicateur de D est défini par*

$$\mathcal{J}(D) = \mu_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor \mu^* D \rfloor).$$

Si D n'est pas effectif, on peut encore définir son idéal multiplicateur de cette manière. On obtiendra un $\mathcal{O}_X$-sous-module de rang 1 des fonctions rationnelles sur X.

Plus généralement, soit $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_X$ un faisceau d'idéaux non nul, $\mu : X' \to X$ une log-résolution de $\mathfrak{a}$ de sorte que $\mathcal{O}_{X'}(-F) = \mathfrak{a} \cdot \mathcal{O}_{X'}$ soit un diviseur à croisements normaux simples. Alors l'idéal multiplicateur de $c \cdot \mathfrak{a}$ est défini pour tout réel $c > 0$ par

$$\mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}) = \mu_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'/X} - \lfloor cF \rfloor).$$

L'idéal multiplicateur ne dépend pas du choix de la log-résolution.

Le résultat principal concernant les idéaux multiplicateurs est le théorème d'annulation de Nadel : l'idéal multiplicateur d'un diviseur compense le défaut de positivité qui empêche d'utiliser le théorème d'annulation de Kawamata-Viehweg.

Théorème 92 (Théorème d'annulation de Nadel - [Laz04b] theorem 9.4.8) *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur une variété lisse X et L un diviseur tel que $L - D$ soit gros et nef. Alors pour tout entier $i > 0$,*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{J}(D)) = 0$$

Le comportement des idéaux multiplicateurs par restriction à une hypersurface permet de démontrer une relation importante entre la multiplicité d'un diviseur en un point et la (non)-trivialité de cet idéal en ce point.

Proposition 93 (Diviseurs de petite ou grande multiplicité - [Laz04b] propositions 9.3.2 et 9.5.13) *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur une variété lisse X de dimension n et $x \in X$ un point.*

1. *Si $\operatorname{mult}_x D < 1$, alors*
$$\mathcal{J}(D)_x = \mathcal{O}_{X,x}.$$
2. *Si p est un entier strictement positif et $\operatorname{mult}_x D \geqslant n + p - 1$, alors*
$$\mathcal{J}(D) \subset \mathfrak{m}_x^p.$$

Lors d'applications du résultat précédent, on est amené à considérer l'invariant suivant.

Définition 94 (Seuil log-canonique) *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur une variété lisse X. On appelle seuil log-canonique de D en un point $x \in X$ la quantité suivante :*

$$\operatorname{lct}(D; x) = \inf\{c \geqslant 0 \mid \mathcal{J}(cD)_x \subseteq \mathfrak{m}_x\}.$$

On peut noter que pour un diviseur ample, ou plus généralement gros et nef, il est possible de construire un $\mathbb{Q}$-diviseur $\mathbb{Q}$-linéairement équivalent au premier et “très” singulier en un point.

Proposition 95 ([Laz04a], proposition 1.1.31) *Soit X une variété irréductible de dimension n, D un diviseur de Cartier gros et nef sur X et $x \in X$ un point lisse. Pour tout rationnel $0 < \alpha < \sqrt[n]{D^n}$, il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $D' \sim D$ vérifiant*

$$\operatorname{mult}_x D' \geqslant \alpha.$$

Le théorème de sous-additivité nous donne une information précieuse sur la façon dont les idéaux multiplicateurs se comportent par addition de deux diviseurs.

Théorème 96 (Sous-additivité, [Laz04b] theorem 9.5.20) *Soit X une variété lisse, D_1 et D_2 deux diviseurs effectifs. Alors*

$$\mathcal{J}(D_1 + D_2) \subseteq \mathcal{J}(D_1) \cdot \mathcal{J}(D_2).$$

Les idéaux multiplicateurs mesurent en général le manque de positivité des diviseurs. On l'a vu avec le théorème d'annulation de Nadel. On en a encore un exemple avec la proposition suivante.

Proposition 97 ([Laz04b], proposition 9.4.26) *Soit X une variété projective lisse de dimension n. Il existe un diviseur H sur X tel que pour tout $\mathbb{Q}$-diviseur effectif D et diviseur L, si $L - D$ est nef alors*

$$\mathcal{O}_X(H + L) \otimes \mathcal{J}(D)$$

est globalement engendré.

De plus on peut choisir $H = K_X + mA$ avec A très ample quelconque et $m \geqslant n + 1$.

L'énoncé précédent diffère légèrement de celui donné en référence : on insiste ici sur le fait que le diviseur H ci-dessus est universel, au sens où il ne dépend pas de L et de D.

Cette proposition fondamentale est à la base de résultats comme la proposition 103 ou les propositions 114 et 115.

6.1.2. Reformulation dans le langage des paires

Les idéaux multiplicateurs et le langage des paires sont en partie redondant. Il est toutefois pratique de pouvoir utiliser l'un où l'autre suivant les circonstances. Nous passerons de l'un à l'autre sans prendre trop de précautions.

Si X est une variété projective lisse, $D = \sum d_i D_i$ un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif sur X, on peut considérer la paire (X, D) et l'idéal multiplicateur de D.

Proposition 98 ([Laz04b], definition 9.3.9) *Avec les notations, ci-dessus, on a :*

1. *la paire (X, D) est klt si et seulement si $\mathcal{J}(D) = \mathcal{O}_X$,*
2. *la paire (X, D) est log-canonique si et seulement si pour tout rationnel $0 < \varepsilon < 1$ on a $\mathcal{J}((1-\varepsilon)D) = \mathcal{O}_X$.*

On définit le seuil log-canonique d'une paire (X, D) par :

$$\mathrm{lct}(X, D) = \sup\{c \geqslant 0 \mid (X, cD) \text{ est klt}\}.$$

Sous les hypothèses ci-dessus, le seuil log-canonique d'une paire (X, D) avec X lisse coïncide avec le seuil log-canonique de D.

6.1.3. Idéaux multiplicateurs asymptotiques

Définition 99 (Systèmes gradués de faisceaux d'idéaux) *Un système gradué de faisceaux d'idéaux $\mathfrak{a}_\bullet$ sur une variété lisse X est une famille $\mathfrak{a}_\bullet = (\mathfrak{a}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'idéaux vérifiant $\mathfrak{a}_0 = \mathcal{O}_X$ et*

$$\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j \subseteq \mathfrak{a}_{i+j}.$$

Exemple 100 Voici trois exemples fondamentaux de système gradué de faisceaux d'idéaux.

1. L'exemple fondamental est le système gradué formé des idéaux de base d'un système linéaire :
$$\mathfrak{b}_\bullet = (\mathfrak{b}(|kL|))_{k\in\mathbb{N}}.$$
2. Un deuxième exemple, qui nous intéressera plus particulièrement est le système gradué des idéaux de base d'une famille graduée de séries linéaires. Pour une famille (V_k) de séries linéaires définie par $V_k \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(kL))$ et vérifiant $V_k \cdot V_l \subset V_{k+l}$ pour tout $l, k \geqslant 0$, on peut définir un système gradué de faisceaux d'idéaux. On pose
$$\mathfrak{b}_\bullet = (\mathfrak{b}(V_k))_{k\in\mathbb{N}}.$$
3. Soit X une variété lisse de dimension n et L un diviseur gros et nef sur X. Pour un réel $d \geq 0$, on considère la série linéaire graduée $V^d_{x,\bullet}$ définie par
$$V^d_{x,k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(kL) \otimes \mathfrak{m}_x^{\lceil kd\rceil}).$$
Si $d < \sqrt[n]{L^n}$, le lemme 95 assure, pour k suffisamment grand, que $V^d_{x,k} \neq 0$. Si d est quelconque, ces séries linéaires sont en général réduites à 0. Puisque $\lceil k_1 d\rceil + \lceil k_2 d\rceil \geqslant \lceil (k_1+k_2)d\rceil$, on a bien $V^d_{x,k_1} \cdot V^d_{x,k_2} \subseteq V^d_{x,k_1+k_2}$, il s'agit donc bien d'un système gradué de faisceaux d'idéaux.

   Essayons de motiver ce dernier exemple. Supposons pour simplifier que d soit rationnel. On note $f : X' \to X$ l'éclatement de X en x et E le diviseur exceptionnel (on rappelle que X est lisse). Pour tout entier k tel que kd soit entier, les sections globales de $\mathcal{O}_X(kL)$ appartenant à $V^d_{x,k}$ sont en bijection avec celles de $\mathcal{O}_X(f^*kL - kdE)$. Étudier la série linéaire graduée $V^d_{x,\bullet}$ revient ainsi en quelque sorte à étudier la série linéaire graduée $\mathfrak{b}_\bullet = (\mathfrak{b}(|f^*kL - kdE|))_k$. Avec cependant l'avantage de ne pas avoir à changer de variété à chaque nouveau point x considéré. Nous verrons au cours des propositions 114 et 115 que la série linéaire graduée apparaissant dans cet exemple contient des informations sur la constante de Seshadri de L en x, ce qui n'est pas étonnant au regard de la remarque précédente, mais aussi sur la constante de Seshadri de L en un point en position très générale.

Les constantes de Seshadri reflètent des propriétés asymptotiques des séries linéaires du type $|k(f^*L - dE)|$.

On peut définir un idéal multiplicateur attaché à un système gradué. En effet, par noethérianité, il existe un elément maximal dans l'ensemble

$$\left\{ \mathcal{J}(\frac{c}{p} \cdot \mathfrak{a}_p) \right\}_{p \geqslant 1}$$

et le lemme suivant montre qu'il est unique.

Lemme 101 ([Laz04b], lemma 11.1.4) *Soit un système gradué de faisceaux d'idéaux $\mathfrak{a}_\bullet$ sur une variété lisse X. Pour tout réel $c > 0$ on a l'inclusion*

$$\mathcal{J}(\frac{c}{p} \cdot \mathfrak{a}_p) \subseteq \mathcal{J}(\frac{c}{pk} \cdot \mathfrak{a}_{pk}),$$

pour tout entier $p, k \geqslant 1$.

On peut alors définir l'idéal multiplicateur de $\mathfrak{a}_\bullet$:

Définition 102 (Idéaux multiplicateurs asymptotiques) *On définit $\mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$ comme étant l'unique élément maximal de $\left\{ \mathcal{J}(\frac{c}{p} \cdot \mathfrak{a}_p) \right\}_{p \geqslant 1}$.*

Si $\mathfrak{a}_\bullet$ est le système gradué de faisceaux d'idéaux associé aux séries linéaires complètes $|kL|$, on notera $\mathcal{J}(c \cdot \|L\|)$ l'idéal multiplicateur associé.

Si $\mathfrak{a}_\bullet$ est le système gradué de faisceaux d'idéaux associé à une série linéaire graduée $V_\bullet = (V_k)$, on notera $\mathcal{J}(c \cdot V_\bullet)$ l'idéal multiplicateur associé.

L'introduction de la notion d'idéaux multiplicateurs asymptotiques dans ce mémoire est motivée par la proposition suivante. L'idéal asymptotique associé à une série linéaire asymptotique d'un diviseur gros caractérise les diviseurs (gros et) nefs.

Proposition 103 ([Laz04b], proposition 11.2.18) *Soit L un diviseur gros sur une variété projective lisse. Alors L est nef si et seulement si pour tout entier $m \geqslant 1$, on a*

$$\mathcal{J}(\|mL\|) = \mathcal{O}_X.$$

On verra que l'union sur l'entier m du lieu des zéros des idéaux $\mathcal{J}(\|mL\|)$ est le lieu de base restreint de L (voir la définition 109 et la proposition 111).

Dans ce cadre aussi, il est possible de définir le seuil log-canonique :

Définition 104 (Seuil log-canonique asymptotique) *Soit X une variété lisse, $\mathfrak{a}_\bullet$ une suite graduée d'idéaux sur X. On définit le seuil log-canonique de $\mathfrak{a}_\bullet$ en un point x par*

$$\operatorname{lct}(\mathfrak{a}_\bullet; x) = \sup\{c \geqslant 0 \mid \mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}_\bullet)_x = \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

On aura brièvement besoin par la suite d'une variation (personnelle) de cette définition afin de prendre en compte les composantes irréductibles maximales du lieu des zéros de $\mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$, lorsque $c \gg 0$. On commence par une remarque simple sur l'existence de composantes irréductibles maximales du lieu des zéros de $\mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$, lorsque c varie.

Lemme 105 *Soit X une variété lisse, $\mathfrak{a}_\bullet$ une suite graduée d'idéaux sur X et $x \in X$ un point. Supposons que $\operatorname{lct}(\mathfrak{a}_\bullet; x) < +\infty$. L'ensemble*

$$\mathcal{V}_x = \{V \mid \exists c \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } V \text{ est une composante irréductible de } \mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}_\bullet) \text{ et } x \in V\}$$

possède un élément maximal.

Démonstration Une suite strictement croissante pour l'inclusion de telles variétés V est de longueur au plus $\dim X + 1$, la dimension augmentant strictement à chaque nouvelle inclusion stricte. □

On note $\mathcal{V}_x^m$ l'ensemble des éléments maximaux de $\mathcal{V}_x$. On peut noter que ces éléments sont les composantes irréductibles de

$$\bigcup_{c>0} \mathcal{J}(c \cdot \mathfrak{a}_\bullet)$$

passant par x. On peut maintenant définir le seuil log-canonique maximal.

Définition 106 (Seuil log-canonique maximal) *Soit X une variété lisse, $\mathfrak{a}_\bullet$ une suite graduée d'idéaux sur X et $x \in X$ un point. On définit le seuil log-canonique maximal de $\mathfrak{a}_\bullet$ en x par*

$$\operatorname{mlct}(\mathfrak{a}_\bullet; x) = \inf\{\operatorname{lct}(\mathfrak{a}_\bullet; \eta_V) \mid V \in \mathcal{V}_x^m\}.$$

où η_V désigne un point général de V.

Il faut voir ce dernier invariant comme une sorte d'inverse de la multiplicité d'un certain lieu de base asymptotique au voisinage de x (ceci prendra tout son sens au cours de la preuve de la proposition 115).

6.2. Liens avec les constantes de Seshadri

6.2.1. Lieux de base

Le lieu de base de la série linéaire complète associée à un diviseur gros est un invariant naturel de ce diviseur mais n'a pas de suffisamment bonnes propriétés pour être manipulé de manière pratique. Il n'est notamment invariant ni par équivalence numérique, ni par multiplication par un entier. Le lieu de base asymptotique possède, lui, cette deuxième propriété. En particulier, on peut définir le lieu de base asymptotique d'un $\mathbb{Q}$-diviseur $\mathbb{Q}$-Cartier.

Définition 107 (Lieu de base asymptotique) *Soit X une variété projective irréductible, D un diviseur de Cartier sur X. Le lieu de base asymptotique de D est défini par*

$$\boldsymbol{B}(D) = \bigcap_{m \geqslant 1} \mathrm{Bs}(|mD|),$$

où $\mathrm{Bs}(|mD|)$ *est l'ensemble des points de base de* $|mD|$.

On définit le lieu de base asymptotique d'un $\mathbb{Q}$-diviseur $\mathbb{Q}$-Cartier comme le lieu de base asymptotique d'un multiple de ce diviseur par un entier strictement positif suffisamment divisible (de sorte que ce multiple soit Cartier).

Le lieu de base asymptotique n'est toutefois toujours pas un invariant de la classe numérique du diviseur (on pourra consulter [ELM+06], example 1.1). Nakamaye a mis en évidence que deux constructions permettent de résoudre ce problème, en perturbant légèrement le diviseur.

Définition 108 (Lieu de base augmenté) *Soit X une variété projective irréductible. On appelle lieu de base augmenté d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D le fermé*

$$\mathbf{B}_+(D) = \bigcap_A \boldsymbol{B}(D - A)$$

où l'intersection porte sur tous les $\mathbb{Q}$-diviseurs A amples.

Définition 109 (Lieu de base restreint) *Soit X une variété projective irréductible. On appelle lieu de base restreint d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D la réunion*

$$\mathbf{B}_-(D) = \bigcup_A \boldsymbol{B}(D + A)$$

où l'union porte sur tous les $\mathbb{Q}$-diviseurs A amples.

Remarque 110 Le lieu de base restreint d'un diviseur D est une union dénombrable de fermés. On a en effet pour n'importe quel diviseur ample A :

$$\mathbf{B}_-(D) = \bigcup_{r \in \mathbb{N}^*} \boldsymbol{B}(D + \frac{1}{r}A).$$

On ne connaît pas d'exemple où ce lieu de base n'est pas une union finie de fermés (voir [ELM+06]).

On peut remarquer que $\mathbf{B}_-(D) = X$ si et seulement si D n'est pas pseudo-effectif. En particulier la restriction d'un diviseur pseudo-effectif à une composante irréductible de son lieu de base restreint n'est pas pseudo-effective. On peut aussi noter que d'après ces définitions, on a $\mathbf{B}_-(D) \subset \mathbf{B}_+(D)$.

Ces lieux de base possèdent d'intéressantes propriétés lorsque l'on perturbe légèrement le diviseur D.

Sur une variété lisse, le lieu de base restreint d'un diviseur gros est complètement décrit par les idéaux multiplicateurs $\mathcal{J}(c \cdot \|D\|)$.

Proposition 111 ([ELM$^+$06], corollary 2.10) *Soit X une variété lisse, D un $\mathbb{Q}$-diviseur gros. Soit q un entier tel que qD soit entier. On a alors*

$$\mathbf{B}_-(D) = \bigcup_{m\in\mathbf{N}} Z(\mathcal{J}(m\cdot\|qD\|))_{red}.$$

6.2.2. Une approche par récurrence

Lors d'une approche par récurrence de la minoration des constantes de Seshadri, il est naturel d'étudier le lieu de base des séries linéaires $V^d_{x,k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(kL)\otimes \mathfrak{m}_x^{\lceil dk\rceil})$. On a par exemple :

Exemple 112 Soit X une variété lisse, L un diviseur X nef et d un réel. Pour un point $x\in X$, on pose $V^d_{x,k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(kL)\otimes \mathfrak{m}_x^{\lceil dk\rceil})$. On note B_k le lieu de base réduit de $V^d_{x,k}$.

S'il existe $k\geqslant 1$ tel que B_k est localement réduit à $\{x\}$ alors la constante de Seshadri de L en x est minorée par d : en effet, pour toute courbe $C\subset X$ passant par x, il existe un diviseur $D\sim kL$ de multiplicité au moins $\lceil dk\rceil$ en x ne contenant pas C. On en déduit que

$$L\cdot C \geqslant d\,\mathrm{mult}_x C,$$

d'où la minoration souhaitée.

Cependant, même lorsque le lieu de base de ces séries linéaires $V^d_{x,k}$ n'est pas localement réduit à x, il est encore possible d'obtenir des informations sur les constantes de Seshadri de L.

Proposition 113 *Soit X une variété projective lisse, L un diviseur gros et nef sur X, $k\geqslant 1$ un entier et V une série linéaire vérifiant $V\subset H^0(X,\mathcal{O}_X(kL))$. On note $B = \mathrm{Bs}\,|V|$, $D\in|V|$ un diviseur général et η_{B_i} le point général d'une composante irréductible B_i de B. Soit un réel $\alpha>0$ tel que $\mathrm{mult}_{\eta_{B_i}} D\geqslant \alpha k$.*

Alors pour tout point $x\in X$ en position très générale et tout point $z\in B_i^{\mathrm{reg}}$ on a

$$\varepsilon(X,L;x)\geqslant \min\{\alpha;\varepsilon(B_i,L_{|B_i};z)\}.$$

En général $L_{|B_i}$ n'est plus gros[1] et dans ce cas, on a $\varepsilon(B_i,L_{|B_i};z)=0$ (les constantes de Seshadri d'un diviseur sont majorées par le volume de ce dernier). Cependant, si L est ample, $L_{|B_i}$ est encore ample. On peut ainsi espérer se ramener à une situation connue par récurrence sur la dimension.

Démonstration Soit $z\in B_i^{\mathrm{reg}}$ et $C\subset X$ une courbe passant par z.

Si C n'est pas incluse dans B_i il existe un diviseur $D\in|V|$ tel que $\mathrm{supp}(D)\not\supseteq C$. Par hypothèse, $\mathrm{mult}_z D\geqslant \alpha k$. On a donc

$$D\cdot C\geqslant \alpha k\,\mathrm{mult}_z C.$$

[1] On peut considérer par exemple le tiré en arrière d'un diviseur ample sur un éclatement de la variété de départ et la restriction de ce diviseur au diviseur exceptionnel.

Si C est incluse dans B_i on a alors

$$L \cdot C \geqslant \varepsilon(B_i, L_{|B_i}; z) \operatorname{mult}_z C.$$

On déduit de ces deux inégalités que $\varepsilon(X, L; x) \geqslant \min\{\alpha; \varepsilon(B_i, L_{|B_i}; z)\}$. □

L'application la plus simple de cette proposition est le cas où $k = 1$ et $H^0(X, \mathcal{O}_X(L)) \neq 0$, en prenant $V \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(L))$.

Il est malheureusement difficile, en général, de contrôler le lieu de base d'une série linéaire. De plus, bien que les constantes de Seshadri ne dépendent que des propriétés numériques des diviseurs, le lieu de base asymptotique d'une série linéaire complète n'est pas un invariant numérique du diviseur. Il paraît donc préférable de considérer, soit le lieu de base augmenté, soit le lieu de base restreint d'un diviseur. Ce dernier semble le plus approprié, étant vide si et seulement si le diviseur est nef. De plus il s'exprime en terme de lieu des zéros d'un idéal multiplicateur, ce qui permet d'utiliser tous les outils associés. Il reste que le lieu de base restreint qui nous intéresse est associé à un diviseur qui n'existe que sur l'éclatement de la variété X en un point x. Il semble préférable de travailler directement sur X, ne serait-ce que pour pouvoir faire varier le point où l'on calcule la constante de Seshadri. C'est ainsi qu'au cours des deux propositions suivantes, on considère les idéaux multiplicateurs asymptotiques associés à des séries linéaires graduées de la forme $V^d_{x,\bullet}$ avec

$$V^d_{x,k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(kL) \otimes \mathfrak{m}_x^{\lceil dk \rceil}).$$

Le point clé qui permet l'utilisation de cette construction réside dans la proposition 97. Cette dernière permet de s'affranchir de la différence entre lieu de base asymptotique et idéal multiplicateur asymptotique en perturbant légèrement le diviseur puis en effectuant un passage à la limite. En effet, on peut remarquer qu'en général le lieu de base restreint est contenu strictement dans le lieu de base asymptotique d'un diviseur. Il n'est donc *a priori* pas clair qu'en considérant uniquement un analogue du lieu de base restreint, il soit possible d'obtenir des informations sur les constantes de Seshadri.

Proposition 114 *Soit X une variété projective lisse de dimension n, L un diviseur ample sur X et un rationnel d vérifiant $\sqrt[n]{L^n} > d > 0$. On considère la série linéaire graduée $V^d_{x,\bullet}$ définie par*

$$V^d_{x,k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(kL) \otimes \mathfrak{m}_x^{\lceil kd \rceil}).$$

Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) $\varepsilon(X, L; x) \geqslant d$.

ii) Pour tout rationnel α strictement positif et suffisamment petit et tout entier (dépendant de α) $k \gg 0$, on a localement

$$\operatorname{Bs}(|V^{d-\alpha}_{x,k}|) \subseteq \{x\}.$$

iii) Pour tout rationnel α strictement positif et suffisamment petit et pour tout réel $c > 0$, on a localement

$$Z(\mathcal{J}(c \cdot V^{d-\alpha}_{x,\bullet}))_{red} \subseteq \{x\}.$$

Démonstration On commence par montrer que *i)* $\Rightarrow$ *ii)*. On note $f : X' \to X$ l'éclatement de X en x, E le diviseur exceptionnel de l'éclatement et $\alpha > 0$ un rationnel suffisamment petit. Par hypothèse sur la constante de Seshadri de L en x, $f^*L-(d-\alpha)E$ est ample. Pour k suffisamment grand et divisible, le système linéaire $|kf^*L-k(d-\alpha)E|$ est sans point de base. Via l'identification naturelle entre les éléments de $|kf^*L-k(d-\alpha)E|$ et ceux de $|V^{d-\alpha}_{x,k}|$, on en déduit que $\mathrm{Bs}(|V^{d-\alpha}_{x,k}|) \subseteq \{x\}$.

Montrons maintenant que *ii)* $\Rightarrow$ *iii)*. Par définition, on a pour tout réel $c > 0$ et tout entier $k > 0$

$$\mathfrak{b}(|V^{d-\alpha}_{x,k}|) \subseteq \mathcal{J}(c \cdot V^{d-\alpha}_{x,\bullet}).$$

En particulier, on a

$$Z(\mathcal{J}(c \cdot V^{d-\alpha}_{x,\bullet}))_{\mathrm{red}} \subseteq \mathrm{Bs}(|V^{d-\alpha}_{x,k}|),$$

ce qui prouve l'assertion.

On montre enfin que *iii)* $\Rightarrow$ *i)*.

On va montrer que pour tout rationnel $d' < d$ tel que $d-d'$ soit suffisamment petit, il existe un diviseur B tel que pour tout entier $t \gg 0$, toute courbe C passant par x, on ait

$$(L+\frac{1}{t}B)\cdot C \geqslant (d'-\frac{n}{t})\cdot \mathrm{mult}_x C.$$

On conclura en passant à la limite quand $t \to \infty$ et $d' \to d$.

On pose $B = K_X+(n+1)H$ pour un diviseur très ample H. Soit $C \subset X$ une courbe. Il existe pour tout entier $t > 0$ un entier m_t tel que $\mathcal{J}(t\cdot V^{d'}_{x,\bullet}) = \mathcal{J}(\frac{t}{m_t}\cdot V^{d'}_{x,m_t})$. Il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur $D \sim_{\mathbb{Q}} m_tL$ vérifiant $\mathcal{J}(\frac{t}{m_t}D) = \mathcal{J}(\frac{t}{m_t}\cdot V^{d'}_{x,m_t})$. D'après la proposition 97, le faisceau $\mathcal{O}_X(B+tL)\otimes\mathcal{J}(\frac{t}{m_t}D)$ est globalement engendré. Puisque $Z(\mathcal{J}(\frac{t}{m_t}D))_{\mathrm{red}} \subseteq \{x\}$, il existe une section globale $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(B+tL)\otimes\mathcal{J}(\frac{t}{m_t}D))$ ne s'annulant pas le long de la courbe C. De plus tout diviseur associé à une telle section globale a une multiplicité au moins égale à $\lceil d't\rceil-n$ en x. En effet, d'après la proposition 93, on a $\mathcal{J}(\frac{t}{m_t}D)) \subset \mathfrak{m}_x^{\lceil d't\rceil-n}$ On a donc

$$(B+tL)\cdot C \geqslant (d't-n)\cdot \mathrm{mult}_x C$$

et on en déduit, en passant à la limite quand $t \to \infty$, que

$$L\cdot C \geqslant d' \,\mathrm{mult}_x C.$$

et donc, en passant à la limite quand $d' \to d$, que

$$L\cdot C \geqslant d \,\mathrm{mult}_x C.$$

$\square$

Proposition 115 *Soit X une variété projective lisse de dimension n, L un diviseur gros et nef sur X et un rationnel d vérifiant $\sqrt[n]{L^n} > d > 0$. On considère toujours la série linéaire graduée $V^d_{x,\bullet}$ définie par*

$$V^d_{x,k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(kL)\otimes \mathfrak{m}_x^{\lceil kd\rceil}).$$

Soit α un réel positif.

Si $\varepsilon(Y, L_{|Y}; y) \geqslant \alpha$ pour toute sous-variété $Y \subsetneq X$ et tout point $y \in Y$ en position très générale dans Y alors

$$\varepsilon(X, L; z) \geqslant \min\{\frac{1}{\mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet})}; \alpha\}$$

pour tout point $x \in X$ et tout point $z \in X$ en position très générale dans X.

Démonstration On note, de la même façon que dans le lemme 105,

$$\mathcal{V}_x = \{V \mid \exists c \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } V \text{ est une composante irréductible de } \mathcal{J}(c \cdot V^d_{x,\bullet}) \text{ et } x \in V\}.$$

Soit c un rationnel et V une composante irréductible de $\mathcal{J}(c \cdot V^d_{x,\bullet})$, maximale dans $\mathcal{V}_x$ tels que

$$\mathrm{lct}(V^d_{x,\bullet}; \eta_V) = \mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet}).$$

Puisque $\varepsilon(V, L_{|V}; y) \geqslant \alpha$ pour un point y en position très générale dans V, toute courbe $C \subset V$ passant par y vérifie $L \cdot C \geqslant \alpha \operatorname{mult}_y C$.

Si y est en position très générale dans V alors, par définition de V, pour tout $c > 0$, toute courbe passant par le point y et non incluse dans V n'est pas incluse dans le lieu des zéros de $\mathcal{J}(c \cdot V^d_{x,\bullet})$. On va comme dans la proposition précédente minorer en passant à la limite l'intersection de C avec L.

Pour tout entier $t > 0$, il existe un entier m_t tel que $\mathcal{J}(t \cdot V^d_{x,\bullet}) = \mathcal{J}(\frac{t}{m_t} \cdot V^d_{x,m_t})$. Soit $D_t \sim m_t L$ un $\mathbb{Q}$-diviseur tel que $\mathcal{J}(\frac{t}{m_t} D_t) = \mathcal{J}(\frac{t}{m_t} \cdot V^d_{x,m_t})$.

Soit H un diviseur très ample sur X. Le faisceau $\mathcal{O}_X(K_X + (n+1)H + tL) \otimes \mathcal{J}(\frac{t}{m_t} D_t)$ est globalement engendré (proposition 97). Tout diviseur effectif F associé aux zéros d'une section globale de ce dernier a une multiplicité en y au moins égale à

$$\operatorname{mult}_y F \geqslant \left\lfloor \frac{t}{\mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet})} \right\rfloor.$$

En effet, par définition on a $\mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet}) = \mathrm{lct}(V^d_{x,\bullet}; y)$. Si on note $l = \left\lfloor \frac{t}{\mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet})} \right\rfloor$, on en déduit par sous-additivité des idéaux multiplicateurs (théorème 96) que

$$\mathcal{J}(\frac{t}{m_t} D_t)_y \subset (\mathcal{J}(\frac{t}{l m_t} D_t)_y)^l = \mathfrak{m}_y^l.$$

On a donc

$$(tL + K_X + (n+1)H) \cdot C \geqslant \left\lfloor \frac{t}{\mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet})} \right\rfloor \times \operatorname{mult}_y C.$$

En passant à la limite quand $t \to \infty$ on a finalement

$$L \cdot C \geqslant \frac{\operatorname{mult}_y C}{\mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet})}.$$

On a donc bien $\varepsilon(X, L; y) \geqslant \min\{\frac{1}{\mathrm{mlct}(V^d_{x,\bullet})}; \alpha\}$ pour tout point y en position très générale dans Y et donc pour tout point z en position très générale dans X. $\square$

Cette dernière proposition inspire deux remarques. La première, relativement optimiste, est qu'il suffit pour minorer les constantes de Seshadri d'un diviseur gros et nef, de majorer certains seuils log-canoniques. Ceci n'est *a priori* pas plus facile mais ouvre la possibilité d'utiliser d'autres outils, comme le théorème de sous-adjonction de Kawamata. Dans le cas d'une variété non uniréglée de dimension 3, j'ai ainsi pu améliorer légèrement une minoration que j'avais obtenu par d'autres moyens.

La seconde remarque est plus pessimiste : utiliser le seuil log-canonique en lieu et place de la multiplicité fait certes gagner en souplesse mais fait aussi perdre beaucoup d'informations.

Exemple 116 (Non-optimalité de la minoration) Soit X une variété projective lisse de dimension $n \geqslant 3$, L un diviseur ample sur X, et $x \in X$ un point. Supposons que $\varepsilon(X, L; x) > 1$. Si on note $f : X' \to X$ l'éclatement de X en x et E le diviseur exceptionnel, le diviseur $f^*L - E$ est ample. Par conséquent, pour $m \gg 0$, $f : X' \to X$ est une log-résolution du lieu de base de $V^1_{x,m}$. On en déduit que $\operatorname{mlct}(V^d_{x,\bullet}) = \operatorname{lct}(V^d_{x,\bullet}; x) = n$. La minoration obtenue en appliquant la proposition 115 est donc sous-optimale d'un facteur n.

6.3. Centres log-canoniques et sous-adjonction

Si on note $c = \operatorname{lct}(X, D)$ le seuil log-canonique d'un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif D sur une variété lisse X, on peut considérer les composantes irréductibles du lieu des zéros de l'idéal multiplicateur $\mathcal{J}(cD)$. Sous certaines conditions, ces sous-variétés sont normales et peuvent être munies d'une structure de paire qui fait apparaître leur (log)-diviseur canonique comme la restriction du (log)-diviseur canonique de la paire (X, D). Les rappels suivants sont énoncés dans le cadre général des paires (en particulier, on ne suppose pas que X est lisse).

6.3.1. Centres log-canoniques

Soit (X, D) une paire. On s'intéresse au lieu où la paire (X, D) n'est pas klt. On note

$$\operatorname{nklt}(X, D) = \{x \mid (X, D) \text{ n'est pas klt au voisinage de } x\}.$$

Définition 117 (Centre de singularités log-canoniques) *On appelle centre de singularités log-canoniques l'image W dans X d'un diviseur irréductible de discrépance -1 sur une log-résolution de X, telle que la paire (X, D) soit log-canonique au point générique de W.*

On peut remarquer que si la paire (X, D) est klt, il n'existe pas de centre de singularités log-canoniques. Plus exactement, si (X, D) est log-canonique, $\operatorname{nklt}(X, D)$ est égal à l'union des centres de singularités log-canoniques de X.

Pour n'importe quelle paire log-canonique, ces centres sont en nombre fini. En considérant n'importe quelle log-résolution $f : X' \to X$ de la paire (X, D), on les obtient comme l'image d'une intersection quelconque de diviseurs de discrépance -1.

Définition 118 (Centre maximal, centre minimal) *On définit un centre de singularités log-canoniques maximal comme un élément maximal pour l'inclusion. On définit un centre de singularités log-canoniques minimal comme un élément minimal pour l'inclusion.*

Lorsque la paire (X, D) est log-canonique, les centres de singularités log-canoniques maximaux sont exactement les composantes connexes du lieu non-klt de la paire (X, D).

Parmi les centres minimaux, on peut considérer la classe *a priori* beaucoup plus restreinte des centres de singularités log-canoniques exceptionnels.

Définition 119 (Centre de singularités log-canoniques exceptionnel) *Soit (X, D) une paire log-canonique. Un centre de singularités log-canoniques W est dit exceptionnel s'il existe une log-résolution $f : X' \to X$ de la paire (X, D) telle que :*

i) il existe un unique diviseur E_W de discrépance -1 sur X' dont l'image dans X est W,

ii) pour tout diviseur $E' \neq E_W$ sur X' de discrépance -1, $f(E') \cap W = \varnothing$.

Remarque 120 Dans la définition précédente, il est équivalent de demander qu'il existe une log-résolution vérifiant les deux propriétés ou que ces propriétés soient vérifiées pour toute log-résolution.

Un centre de singularités log-canoniques exceptionnel est un centre de singularités log-canoniques à la fois minimal et maximal. En particulier un tel centre est une composante connexe du lieu non-klt de la paire (X, D). Cette dernière propriété nous sera fort utile pour construire des sections non nulles de fibrés en droites sur le lieu non-klt de certaines paires (X, D).

6.3.2. Un lemme de perturbation : le "tie-breaking"

Les centres de singularités log-canoniques exceptionnels paraissent très spéciaux parmi les centres minimaux. Il n'en est en fait rien lorsque la paire $(X, 0)$ est klt comme le montre le théorème suivant. Ce résultat est attribué à Miles Reid ([Rei83], 1.4) par János Kollár dans [Kol07]. La version énoncée ici l'est sous une forme légèrement plus forte que dans [Kol07]. Cependant, la preuve est identique (voir aussi le théorème 142).

Théorème 121 ([Kol07], proposition 8.7.1) *Soit (X, Δ) une paire klt et D un $\mathbb{Q}$-diviseur $\mathbb{Q}$-Cartier effectif tel que $(X, \Delta + D)$ soit log-canonique et non klt. On note W un centre de singularités log-canoniques minimal pour la paire $(X, \Delta + D)$ et H un diviseur de Cartier ample sur X.*

Pour tout rationnel $1 \gg r > 0$, il existe des rationnels $0 < c_1 \leqslant r$ et $0 < c_2 \leqslant r$ et un $\mathbb{Q}$-diviseur ample effectif $A \sim_{\mathbb{Q}} c_1 H$ tels que la paire $(X, \Delta + (1 - c_2)D + A)$ soit log-canonique et W soit un centre de singularités log-canoniques exceptionnel pour $(X, \Delta + (1 - c_2)D + A)$.

6.3.3. Sous-adjonction

Un analogue du théorème d'adjonction pour les diviseurs lisses, démontré par Kawamata dans [Kaw97] et [Kaw98], permet de munir d'une structure de paire, dépendant du (log)-diviseur canonique de (X, D), les centres log-canoniques exceptionnels de la paire (X, D).

Théorème 122 ([Kol07], theorem 8.6.1) *Soit (X, D) une paire log-canonique et W un centre de singularités log-canoniques exceptionnel. Soit H un diviseur ample et $\varepsilon > 0$ un rationnel.*

Alors W est normal et il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif D_W sur W tel que :

1. *(W, D_W) soit une paire klt,*
2. *$(K_X + D + \varepsilon H)_{|W} \sim_{\mathbb{Q}} K_W + D_W$.*

6.4. Conjecture de non-annulation effective

Créer des idéaux multiplicateurs non triviaux et étendre des sections globales est un procédé qui n'est aujourd'hui plus très original pour produire des sections globales non-triviales de fibrés adjoints. On utilise ici ces techniques pour montrer la conjecture de non-annulation en dimension 3 pour des diviseurs de grand volume.

6.4.1. Diviseurs de grand volume

L'utilisation des idéaux multiplicateurs permet de démontrer en dimension 3 la conjecture de non-annulation effective de Kawamata dans le cas particulier des diviseurs de "grand" volume.

Démonstration (théorème 89) On note x_0 un point de X. D'après l'hypothèse sur le volume de L, il existe un diviseur $D \sim_{\mathbb{Q}} L$ de multiplicité $\mathrm{mult}_{x_0} D > 3$. On en déduit que le seuil log-canonique de D en x_0 vérifie $c = \mathrm{lct}(D; x_0) < 1$.

Le $\mathbb{Q}$-diviseur $L - cD$ est donc ample et d'après le théorème d'annulation de Nadel, la cohomologie supérieure de $\mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{J}(cD)$ est nulle. Si on note $V = Z(\mathcal{J}(cD))_{\mathrm{red}}$ (on peut remarquer que $V \neq X$), on a alors une suite exacte

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L) \otimes \mathcal{J}(cD)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) \to H^0(V, \mathcal{O}_V((K_X + L)_{|V})) \to 0.$$

L'existence d'une section globale non nulle de $\mathcal{O}_X(K_X + L)$ découle donc de l'existence d'une section globale non nulle de $\mathcal{O}_V((K_X + L)_{|V})$. Si une composante irréductible de V est de dimension nulle, c'est une composante connexe de V et on a alors $H^0(V, \mathcal{O}_V((K_X + L)_{|V})) \neq 0$. On en déduit donc que $H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + L)) \neq 0$.

Si toutes les composantes de V sont de dimension strictement positive, on va légèrement modifier le diviseur D et son seuil log-canonique de sorte que l'une d'entre elles soit un centre de singularités log-canonique exceptionnel. On majorera ensuite son diviseur canonique à l'aide du théorème de sous-adjonction. On pourra ainsi appliquer le théorème de non-annulation effective (dû à Kawamata en dimension 2, *cf.* théorème 51) pour montrer l'existence d'une section globale non nulle de $\mathcal{O}_V((K_X+L)_{|V})$. Si cette composante irréductible est de dimension 1, on pourra plus simplement utiliser le théorème de Riemann-Roch.

Soit W un centre de singularités log-canoniques minimal pour la paire (X, cD). En appliquant le théorème 121 avec $\Delta = 0$, $H = L$, on obtient que W est un centre log-canonique exceptionnel de $(X, c'D)$ pour un rationnel $c' < 1$. On peut donc appliquer le théorème de sous-adjonction (théorème 122) à la paire $(X, c'D)$. Pour tout rationnel ε, il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif Δ_W sur W vérifiant :

$$(K_X + c'D + \varepsilon D)_{|W} \sim_{\mathbb{Q}} K_W + \Delta_W.$$

La paire (W, Δ_W) étant klt et de dimension au plus 2, on peut appliquer le théorème de non-annulation effective (théorème 51). Le diviseur $(K_X+L)_{|W}$ est nef et

$$(K_X+L)_{|W} - (K_W + \Delta_W) \sim_{\mathbb{Q}} (1 - c' - \varepsilon)L_{|W}$$

est ample si ε est suffisamment petit. Il existe ainsi une section globale non nulle de $\mathcal{O}_W((K_X+L)_{|W})$. De plus, W étant une composante connexe de $V = Z(\mathcal{J}(c'D))_{\mathrm{red}}$, on obtient donc une section globale non nulle de $\mathcal{O}_V((K_X+L)_{|V})$. À l'aide de la suite exacte ci-dessus, on en déduit l'existence d'une section globale non nulle de $\mathcal{O}_X(K_X+L)$. $\square$

On a bien sûr une application directe du précédent résultat à la minoration des constantes de Seshadri, à l'image de ce qui a été fait précédemment. Cependant l'inégalité stricte dans l'hypothèse sur le volume de L est assez restrictive puisqu'elle ne permet pas de considérer de façon générale des diviseurs L de la forme $L = 3A$ avec A ample. Il serait donc souhaitable d'arriver à relâcher la condition sur le volume en une inégalité au sens large. Si X n'est pas uniréglée, on utilise un argument basé sur la non-existence de courbes rationnelles pour obtenir directement une minoration des constantes de Seshadri. La sous-section suivante est une présentation de cette idée.

6.4.2. Diviseurs effectifs non nef

Nous allons voir dans cette section que l'existence de diviseurs effectifs non nef implique dans certains cas l'existence de courbes rationnelles dans la variété ambiante X. On en tirera dans la sous-section suivante une minoration des constantes de Seshadri pour certains diviseurs adjoints sur des variétés de dimension 3 non uniréglées.

On commence par une proposition élémentaire afin d'illustrer notre propos.

Proposition 123 *Soit (X, Δ) une paire klt telle que $-(K_X+\Delta)$ soit nef et F un diviseur de Cartier effectif non nef sur X. Il existe une contraction de Mori extrémale birationnelle dont le lieu exceptionnel est uniréglé et contenu dans $\boldsymbol{B}_-(F)$.*

Démonstration Soit C une courbe vérifiant $F \cdot C < 0$. Pour un rationnel $\alpha > 0$ suffisamment petit, la paire $(X, \Delta + \alpha F)$ est klt. On peut donc appliquer le théorème du cône à cette paire. Le diviseur F étant non nef et $-(K_X+\Delta)$ étant nef, on en déduit que le $\mathbb{Q}$-diviseur $K_X + \Delta + \alpha F$ est non nef. Il existe donc un élément C_+ de $\overline{\mathrm{NE}}(X)$

vérifiant $(K_X+\Delta+\alpha F)\cdot C_+ \geqslant 0$ et des arêtes $\mathbb{R}_+\cdot[\Gamma_i]$ dans $\overline{\mathrm{NE}}(X)_{K_X+\Delta+\alpha F<0}$ tels que $[C]=\sum a_i[\Gamma_i]+C_+$ pour des coefficients a_i strictement positifs. Puisque $F\cdot C+\geqslant 0$, il existe i tel que Γ_i vérifie $F\cdot\Gamma_i<0$. Le lieu exceptionnel de la contraction associée à Γ_i est donc contenu dans $\boldsymbol{B}_-(F)$ puisque la classe numérique de toute courbe contractée est dans l'arête $\mathbb{R}_+\cdot[\Gamma_i]$. Kawamata a montré que le lieu exceptionnel d'une telle contraction était uniréglé (théorème 33). □

Il serait souhaitable de généraliser cette proposition à des paires n'ayant pas nécessairement un log-diviseur anticanonique $-(K_X+\Delta)$ nef. Il faut au minimum supposer qu'il existe une courbe C telle que $F\cdot C<0$ et $(K_X+\Delta+F)\cdot C<0$. Mais même dans ce cas, les difficultés surgissent immédiatement à cause des singularités de F. En effet, comme dans la preuve de la proposition précédente, on peut choisir un rationnel α suffisamment petit de sorte que $(X,\Delta+\alpha F)$ soit klt. Mais il est alors possible que le diviseur $K_X+\Delta+\alpha F$ soit nef.

Nous verrons au chapitre suivant un critère simple et intuitif pour qu'un centre de singularités log-canoniques soit uniréglé. Pour le moment, les idées introduites dans la preuve de la proposition précédente sont suffisantes pour une application à la minoration des constantes de Seshadri.

6.4.3. Application aux constantes de Seshadri

Démonstration (corollaire 90) On se ramène au cas d'une surface (voir proposition 49) en trouvant un membre $S\in|K_X+L|$.

Si $\sqrt[3]{L^3}>3$, l'existence de S est une application directe du théorème 89.

On suppose maintenant que $\sqrt[3]{L^3}=3$, ce qui empêche une application immédiate du théorème 89. On montre dans ce cas que soit

$$\varepsilon(X,K_X+L;x)\geqslant\varepsilon(X,L;x)\geqslant 1$$

pour un point x en position très générale, soit il existe un rationnel $0<t<1$ et un $\mathbb{Q}$-diviseur $D\sim_{\mathbb{Q}} tL$ tel que $\mathcal{J}(D)\neq\mathcal{O}_X$.

Commençons par montrer que pour un point en position très générale x,

$$\varepsilon(X,K_X+L;x)\geqslant\varepsilon(X,L;x).$$

En effet, puisque K_X est pseudo-effectif, toute courbe passant par un point en position très générale x, vérifie $K_X\cdot C\geqslant 0$. On a donc $(K_X+L)\cdot C\geqslant L\cdot C$, ce qui implique l'inégalité recherchée.

Soit $x\in X$ un point en position très générale, $f:X'\to X$ l'éclatement de X en x, E le diviseur exceptionnel. Supposons $\varepsilon(X,K_X+L;x)<1$. On note c un rationnel vérifiant $1>c>\varepsilon(X,K_X+L;x)$. Par hypothèse sur le volume de L, le diviseur $f^*L-(2+c)E$ est gros et d'après le choix de c, ce diviseur est non nef. On note $d=\mathrm{lct}(\|f^*L-(2+c)E\|)$. Si $d<1$, il existe un rationnel $d'<1$ et un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $D'\sim_{\mathbb{Q}} d'(f^*L-(2+c)E)$ tel que $\mathcal{J}(D')\neq\mathcal{O}_{X'}$. D'après la formule de transformation birationnelle des idéaux multiplicateurs, $\mathcal{J}(f_*D')\neq\mathcal{O}_X$. Le diviseur f_*D' étant $\mathbb{Q}$-linéairement équivalent à $d'L$, en utilisant les mêmes arguments qu'au cours de la preuve du théorème 89, on en déduit l'existence d'un diviseur effectif $S \in |K_X + L|$.

Il reste maintenant le "nouveau" cas, lorsqu'il n'est pas possible de construire facilement un diviseur $D \sim_{\mathbb{Q}} (1-\alpha)L$ vérifiant $\mathcal{J}(D) \neq \mathcal{O}_X$. On vient de voir que cela correspond au cas où le seuil log-canonique de $\|f^*L-(2+c)E\|$ vérifie $d = \mathrm{lct}(\|f^*L-(2+c)E\|) \geqslant 1$.

L'idée consiste alors à construire une courbe rationnelle dans X passant par x. La variété X n'étant pas uniréglée, on montre ainsi que le "nouveau" cas ne peut avoir lieu pour tout x. Pour ce faire, on va construire une frontière Δ telle que la paire (X', Δ) soit klt et $K_{X'} + \Delta$ soit non nef. On obtient ainsi par le théorème du cône une contraction, le lieu exceptionnel de cette contraction est uniréglé et on verra qu'il est localement isomorphe à son image sur X et contient le point x.

Afin de mettre en lumière l'argument, traitons tout d'abord le cas où

$$d = \mathrm{lct}(\|f^*L - (2+c)E\|) > 1.$$

Le rationnel c vérifie $c < 1$, ce qui, par hypothèse sur L, implique que $2 + c < \sqrt[3]{L^3}$. On peut donc choisir un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif vérifiant

$$\Delta \sim_{\mathbb{Q}} f^*L - (2+c)E.$$

Puisque $d > 1$, on a alors $\mathcal{J}(\Delta) = \mathcal{O}_X$, autrement dit, la paire (X', Δ) est klt. D'après notre choix de c (on rappelle que $c > \varepsilon(X, K_X + L; x)$), le diviseur $K_{X'} + \Delta = f^*(K_X + L) - cE$ n'est pas nef. Il existe donc une arête $(K_{X'} + \Delta)$-négative. D'après le théorème du cône, cette arête peut être contractée et toute courbe dont la classe numérique appartient à cette arête est contractée. Le lieu exceptionnel, noté Z, de cette contraction est uniréglé. De plus il est distinct de E. En effet, toute courbe contenue dans E s'intersecte positivement avec $K_{X'} + \Delta$. La restriction de $f : X' \to X$ à Z est donc localement un isomorphisme (en dehors de l'intersection de Z avec E). En particulier l'image de Z dans X est uniréglée. Il reste à montrer qu'elle contient le point x. Puisque $K_X + L$ est ample, toute courbe dont la classe numérique est sur une arête $(K_{X'} + \Delta)$-négative a une intersection strictement positive avec E. Donc l'image de Z dans X contient x.

Le cas où $d = 1$ est similaire. Pour un rationnel $0 < \alpha \ll 1$, on construit

$$\Delta \sim_{\mathbb{Q}} (1-\alpha)(f^*L - (2+c)E).$$

Là encore, la paire (X', Δ) est klt. Il reste à montrer que $(K_{X'} + \Delta)$ n'est pas nef. On a

$$K_{X'} + \Delta = f^*(K_X + (1-\alpha)L) - (1-\alpha)cE.$$

Pour toute courbe C vérifiant $(f^*(K_X + L) - E) \cdot C < 0$, il existe $0 < \alpha \ll 1$ tel que

$$(1-\alpha)(K_{X'} + \Delta) \cdot C < 0.$$

Si α est suffisamment petit, il existe donc une arête $(K_{X'} + \Delta)$-négative. Le lieu exceptionnel de la contraction associée à cette arête est distinct de E puisque toute courbe contenue dans E s'intersecte positivement avec $K_X + \Delta$. On conclut comme dans le cas $d > 1$.

Puisque X n'est pas uniréglé, il existe donc un point où la constante de Seshadri de $K_X + L$ est minorée par 1. La borne est donc valable en tout point en position très générale. $\square$

7. De certains lieux de base uniréglés

Ce chapitre traite de l'existence de certaines sous-variétés uniréglées dans une variété X. Il a été montré par Boucksom, Demailly, Păun et Peternell que les variétés uniréglées sont exactement celles dont le diviseur canonique n'est pas pseudo-effectif. Le principe général des résultats que nous allons énoncer s'inscrit dans le cadre actuel du programme minimal, où l'on ne considère plus seulement le diviseur canonique d'une variété mais une perturbation de ce dernier par un diviseur effectif Δ. Si une sous-variété W est un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel pour la paire (X, Δ), des résultats de Kawamata et d'Ambro nous assurent que la restriction de $K_X + \Delta$ à W est égale au diviseur canonique de W auquel a été ajouté un diviseur pseudo-effectif. En éliminant l'hypothèse d'exceptionalité faible du centre de singularités log-canoniques à l'aide du lemme de perturbation, on obtient le résultat suivant :

Théorème 124 *Soit $(X, 0)$ une paire klt, Δ une frontière sur X et W un centre de singularités log-canoniques de dimension strictement positive pour la paire (X, Δ). Supposons $(K_X + \Delta)_{|W}$ non pseudo-effectif. Alors W est uniréglé.*

Il faut noter que par hypothèse, K_X est $\mathbb{Q}$-Cartier puisque $(X, 0)$ est une paire. Cela entraine que Δ est aussi $\mathbb{Q}$-Cartier.

La preuve de ce résultat (*cf.* section 7.5) est très courte une fois les outils adéquats introduits. Elle repose, on l'a dit, sur deux idées essentielles : la caractérisation des variétés uniréglées en terme de non-positivité du diviseur canonique et le théorème de positivité, à la base de la formule de sous-adjonction, résultat très profond qui étend à des sous-variétés de codimension supérieure à 1 la classique formule d'adjonction pour des hypersurfaces. En ces termes, un résumé de la preuve du théorème précédent consisterait en : on calcule le diviseur canonique de (la normalisation de) W ; ce dernier n'étant pas pseudo-effectif, W est uniréglé. On verra toutefois qu'une dernière difficulté technique apparaît puisque la sous-adjonction s'applique usuellement à des centres log-canoniques faiblement exceptionnels. On contourne la difficulté en utilisant le lemme de perturbation.

On en déduit le corollaire suivant (*cf.* démonstration section 7.5) dont la formulation est inspirée par des résultats de Takayama ([Tak06a], un résumé de cet article se trouve section 7.6).

Corollaire 125 *Soit X une variété projective lisse de dimension n. Soit L un diviseur gros sur X. Supposons que $-K_X$ soit nef. Soit un rationnel $c > 0$ et W une composante irréductible de $Z(\mathcal{J}(c \cdot \|L\|))_{red}$ de dimension strictement positive. Supposons W couverte par des courbes ayant une intersection strictement négative avec L.*

Alors la sous-variété W est uniréglée. En particulier, toute composante irréductible de $\mathbf{B}_-(L)$ couverte par des courbes ayant une intersection strictement négative avec L est uniréglée.

Le fait de demander que W soit couverte par des courbes L-négatives est une hypothèse technique qui peut sembler superflue : on pourrait être enclin à penser que la restriction d'un diviseur gros à son lieu de base restreint n'est pas pseudo-effectif. Il n'en est rien comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 126 (Diviseur gros pseudo-effectif lorsque restreint à son lieu de base restreint) Soit $f : X \to X_1 \to \mathbf{P}^2$ l'éclatement de $\mathbf{P}^2$ en 2 points infinitésimalement voisins (le deuxième point éclaté est sur le diviseur exceptionel au-dessus du premier). On note E_1 la transformée stricte dans la variété de Fano X du premier diviseur exceptionnel, E_2 le diviseur exceptionnel au-dessus du second point et H un diviseur hyperplan sur $\mathbf{P}^2$. Le diviseur $D = f^*H + E_1 + 3E_2$ est gros, son lieu de base restreint est $E_1 \cup E_2$ et $D_{|E_1}$ est nef.

Bien entendu E_1 est une courbe rationnelle mais le théorème 124 ne donne *a priori* aucune information en ce sens.

7.1. Le cadre

Il est malheureusement nécessaire d'introduire encore un peu de terminologie issue du langage des paires.

Définition 127 (Centre faiblement exceptionnel) *Soit (X, Δ) une paire. On appelle centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel de la paire (X, Δ) un centre de singularités log-canoniques W tel qu'il existe une log-résolution $f : Y \to X$ de la paire (X, Δ) et un unique diviseur exceptionnel E de discrépance -1 sur Y vérifiant $f(E) = W$.*

La définition précédente est de Shokurov. Ces centres sont appelés exceptionnels par Ambro et Shokurov.

Définition 128 (Log-structures) *Une log-structure est un couple (X, Δ) formé d'une variété normale X et d'un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil Δ tel que le $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil $K_X + \Delta$ soit $\mathbb{Q}$-Cartier. On appelle Δ le bord de la log-structure. On définit de la même manière que pour les paires la notion de log-structures log-canoniques ou klt.*

On notera la différence entre un bord et une frontière, les coefficients de cette dernière étant compris entre 0 et 1.

Remarque 129 (Terminologie) La terminologie utilisée dans le cadre du programme minimal n'est malheureusement pas fixe d'un auteur à l'autre. Les différences rencontrées peuvent parfois sembler anodines tout en ayant des conséquences importantes. On pourra consulter à ce sujet la section 3.7 de l'article de Fujino [Fuj07] où l'auteur explique quelles conséquences peut avoir une légère modification de la définition d'une log-résolution. En ce qui concerne la définition d'un centre de singularités log-canoniques exceptionnel, il est probable que la bonne définition soit ce qu'on appelle ci-dessus un centre faiblement exceptionnel. On pourrait alors appeler dans cette autre terminologie les centres exceptionnels des «centres de singularités log-canoniques minimaux et exceptionnels d'une paire log-canonique» ...

7.2. Pseudo-effectivité du diviseur canonique et courbes rationnelles

Dans [BDPP04], Boucksom, Demailly, Păun et Peternell obtiennent une caractérisation des variétés uniréglées en terme de pseudo-effectivité du diviseur canonique.

Théorème 130 ([BDPP04], theorem 2.7) *Soit X une variété projective normale, $\mathcal{F} \subset T_X$ un sous-faisceau cohérent, $\mathcal{F}^*$ son dual. Si $\det \mathcal{F}^*$ n'est pas pseudo-effectif, alors X est uniréglée.*

Un corollaire immédiat de ce théorème est l'existence d'un critère similaire dans le cadre des paires.

Commençons cependant par introduire la notion de diviseur de Weil pseudo-effectif.

Définition 131 (Diviseur de Weil pseudo-effectif) *Soit X une variété normale. Un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil D est pseudo-effectif s'il existe un morphisme propre birationnel $f : X' \to X$ et un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D' pseudo-effectif sur X' tel que $f_*D' = D$.*

Corollaire 132 *Soit X une variété normale et Δ un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil pseudo-effectif tel que $K_X + \Delta$ soit $\mathbb{Q}$-Cartier. Supposons que $K_X + \Delta$ ne soit pas pseudo-effectif. Alors X est uniréglée.*

Démonstration Soit $g : X' \to X$ un morphisme birationnel tel qu'il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier Δ' pseudo-effectif sur X' tel que $g_*\Delta' = \Delta$. Soit $f : Y \to X$ une log-résolution de (X, Δ) se factorisant à travers g en

$$f : Y \xrightarrow{f'} X' \xrightarrow{g} X .$$

On peut remarquer que $f_* f'^* \Delta' = \Delta$ et que $f'^*\Delta'$ est pseudo-effectif. On peut écrire

$$K_Y + f'^*\Delta' = f^*(K_X + \Delta) + F,$$

avec F f-exceptionnel. Pour tout diviseur de Cartier ample A sur X et tous entiers $k \gg m \gg 0$ suffisamment divisibles, on a donc

$$\begin{aligned} H^0(Y, \mathcal{O}_Y(k(m(K_Y + f'^*\Delta') + f^*A))) &= H^0(X, \mathcal{O}_X(k(mf^*(K_X + \Delta) + mF + f^*A))) \\ &\hookrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(k(m(K_X + \Delta) + A))) = 0. \end{aligned}$$

Le diviseur f^*A étant gros et nef sur Y, $K_Y + f'^*\Delta'$ n'est donc pas pseudo-effectif. Le $\mathbb{Q}$-diviseur $f'^*\Delta'$ étant pseudo-effectif et la somme de deux diviseurs pseudo-effectifs étant pseudo-effective, on en déduit donc que K_Y n'est pas pseudo-effectif. D'après le théorème 130, Y est uniréglée, il en est donc de même pour X puisque f est birationnel. $\square$

Il nous reste à trouver un moyen de calculer un diviseur log-canonique de la normalisation du centre W. On utilise pour cela la sous-adjonction dans sa forme générale.

7.3. Fibrations lc-triviales

Au cœur de la sous-adjonction, il y a la notion de fibration lc-triviale $f : (X, \Delta) \to Y$. Dans de telles fibrations, le log-diviseur canonique de la fibre générale est numériquement trivial et par définition, le log-diviseur canonique de X vient de la base Y.

7.3.1. Définition

Définition 133 (Contraction) *Une contraction est un morphisme propre $f : X \to Y$ entre deux variétés normales X et Y tel que $\mathcal{O}_Y = f_*\mathcal{O}_X$.*

Définition 134 (Fibration lc-triviale - [Amb04] definition 2.1) *Une fibration lc-triviale consiste en une contraction $f : X \to Y$ et un bord Δ sur X tel que*

1. *la paire (X, Δ) ait des singularités au plus klt sur la fibre générale de Y.*
2. *Il existe une log-résolution de $g : X' \to X$ de (X, Δ) et un diviseur Δ' sur X' tels que $K_{X'} = g^*(K_X + \Delta) + \Delta'$ et $\mathrm{rang}(f_*(g_*\mathcal{O}_X(\lceil \Delta' \rceil))) = 1$.*

   Si X est lisse, cela revient à dire que $\mathrm{rang}(f_*\mathcal{J}(\Delta)) = 1$ en utilisant la définition d'un idéal multiplicateur pour un diviseur non nécessairement effectif.
3. *Il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier D_Y sur Y, un entier strictement positif r et une fonction rationnelle ϕ sur X tels que si D_ϕ est le diviseur associé à ϕ, on ait*

$$K_X + \Delta + \frac{1}{r}D_\phi = f^*D_Y.$$

Ambro exprime le point 2 de la définition précédente dans le langage des b-diviseurs, ce qui évite d'avoir recours à une log-résolution. Ce point de vue est similaire à celui mis en avant avec les idéaux multiplicateurs, où l'on souhaite éviter de passer à des log-résolutions auxiliaires. L'introduction d'une nouvelle terminologie ne semblait cependant pas nécessaire dans notre cas ce qui explique que le point 2 paraisse un peu technique.

Nous aurons besoin de la notion de changement de base pour une fibration lc-triviale.

Définition 135 (Changement de base pour une fibration lc-triviale) *Soit $f : X \to Y$ une fibration lc-triviale et $\sigma : Y' \to Y$ une contraction birationnelle. Soit X' une résolution de la composante de $X \times_Y Y'$ dominant Y'. Le morphisme induit $\mu : X' \to X$ est birationnel. On définit une log-structure (X', Δ') sur X' par $\mu^*(K_X + \Delta) = K_{X'} + \Delta'$. La contraction $f' : (X', \Delta') \to Y'$ est une fibration lc-triviale qui est induite par* changement de base *de la fibration lc-triviale $f : X \to Y$.*

On va voir dans un instant qu'à une telle fibration lc-triviale, on peut associer d'une façon naturelle deux $\mathbb{R}$-diviseurs : le discriminant et le diviseur modulaire. Avant d'entrer dans ces considérations, on va préalablement mettre en lumière le lien entre ces fibrations et certains centres de singularités log-canoniques.

7.3.2. Lien avec les centres de singularités log-canoniques

Un centre log-canonique faiblement exceptionnel est l'espace d'arrivée d'une fibration lc-triviale venant de l'unique diviseur de discrépance -1 au-dessus du centre. Ce cas particulier de fibration lc-triviale sera essentiel dans la preuve du théorème 124.

Proposition 136 *Soit (X, Δ) une paire, W un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel pour cette paire et $\nu : W^\nu \to W$ la normalisation de W. Soit $\mu : X' \to X$ une log-résolution de (X, Δ) et E l'unique diviseur exceptionnel dominant W de discrépance -1 pour la paire (X, Δ). On note Δ_E l'unique diviseur sur E vérifiant*

$$K_E + \Delta_E = \mu^*(K_X + \Delta)_{|E}$$

Alors la restriction de μ à E se factorise à travers W^ν et le morphisme induit $f : E \to W^\nu$ est une fibration lc-triviale de (E, Δ_E).

De plus, on a

$$K_E + \Delta_E = f^*\nu^*((K_X + \Delta)_{|W}).$$

Démonstration Il s'agit d'une reformulation du lemme 4.1 de [Amb99b]. Le diagramme que l'on construit de cette façon est :

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu} \\ W^\nu & \longrightarrow & X \end{array} .$$

□

7.3.3. Le discriminant et le diviseur modulaire

Dans la définition d'une fibration lc-triviale $X \to Y$, le log-diviseur canonique de X vient de Y. Ce diviseur peut être décomposé de façon naturelle en trois diviseurs de Weil, le diviseur canonique de Y, le discriminant de la fibration et le diviseur modulaire. Ce qui sera important dans la suite, c'est que le discriminant et le diviseur modulaire sont positifs lorsque la base de la fibration est un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel.

Définition 137 (Discriminant d'une fibration lc-triviale) *Soit X variété normale, Δ un bord sur X et $f : X \to Y$ une contraction telle que f soit une fibration lc-triviale de (X, Δ). On définit le discriminant Δ_Y de f comme le $\mathbb{R}$-diviseur*

$$\Delta_Y = \sum_{P \subset Y} b_P P$$

où les P sont les diviseurs de Weil premiers dans X et les coefficients b_P sont définis par

$$1 - b_P = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid \exists U \subset Y \textit{ ouvert}, U \cap P \neq \varnothing \\ \textit{et } (X, \Delta + tf^*P)_{|f^{-1}(U)} \textit{ est log-canonique}\}.$$

Ce diviseur est effectif si f est une fibration lc-triviale induite par un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel (au sens de la proposition 136).

Proposition 138 ([Amb99b], lemma 4.2) *Soit (X, Δ) une paire, W^ν la normalisation d'un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel W et $f : E \to W^\nu$ la fibration lc-triviale induite.*

Le discriminant de f est effectif.

D'après la définition d'une fibration lc-triviale $f : X \to Y$, il existe une fonction rationnelle ϕ sur X de diviseur associé D_ϕ, un entier strictement positif r et un $\mathbb{R}$-diviseur de Weil M_Y sur Y tel que

$$K_X + \Delta + \frac{1}{r} D_\phi = f^*(K_Y + \Delta_Y + M_Y),$$

où $M_Y = D_Y - K_Y - \Delta_Y$ (pour le $\mathbb{Q}$-diviseur D_Y apparaissant dans la définition d'une fibration lc-triviale).

Définition 139 (Diviseur modulaire) *Le $\mathbb{R}$-diviseur M_Y ci-dessus est appelé le diviseur modulaire de la fibration lc-triviale f. Il n'est défini uniquement qu'à $\mathbb{Q}$-équivalence linéaire près. Quand cela ne prête pas à confusion on parlera quand même* du *diviseur modulaire.*

Le comportement de ces deux diviseurs par changement de base de la fibration lc-triviale est important dans les applications.

Proposition 140 (Comportement par changement de base) *Soit (X, Δ) une paire, W un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel et W^ν sa normalisation. Soit $\mu : X' \to X$ une log-résolution de (X, Δ), E l'unique diviseur sur X' de discrépance -1 dominant W et $f : E \to W^\nu$ la fibration lc-triviale induite. On considère une contraction birationnelle $\sigma : W' \to W^\nu$ et la fibration lc-triviale $f' : E' \to W'$ induite de f par changement de base*

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & E \arrow[d, "f"] \\ W' \arrow[r, "\sigma"] & W^\nu \end{tikzcd}$$

Alors le discriminant $\Delta_{W'}$ de f' vérifie $\sigma_* \Delta_{W'} = \Delta_{W^\nu}$, où Δ_{W^ν} est le discriminant de f. De même, il existe un ($\mathbb{R}$-)diviseur modulaire $M_{W'}$ de f' qui vérifie $\sigma_* M_{W'} = M_{W^\nu}$, où M_{W^ν} est un diviseur modulaire de f.

Démonstration Pour le discriminant, il s'agit du point 2 de la proposition 4.2 de [Amb99b]. Pour le diviseur modulaire, c'est inclus dans le fait que ce dernier peut-être défini en tant que b-diviseur (voir par exemple [Amb04] remark 2.5 et le paragraphe suivant la preuve du lemme 2.6). $\square$

La question fondamentale concernant les fibrations lc-triviales concerne la positivité du diviseur modulaire. Elle a été résolue par Kawamata dans [Kaw98] sous certaines hypothèses, auxquelles il est facile de se ramener en général. Ambro a montré dans [Amb04] une propriété de stabilité asymptotique de la construction.

Théorème 141 ([Kaw98] theorem 2, [Amb04] theorem 0.2) *Soit $f : (X, \Delta) \to Y$ une fibration lc-triviale. Il existe un morphisme birationnel propre $Y' \to Y$ tel que le diviseur modulaire de la fibration lc-triviale $f' : X' \to Y'$ induite par changement de base soit nef.*

7.4. Le lemme de perturbation revisité

Au cours des rappels, nous avons vu que pour appliquer les résultats concernant les fibrations lc-triviales à un centre de singularités log-canonique, il fallait que ce dernier soit faiblement exceptionnel. Dans le cas contraire, on perd l'unicité du diviseur de discrépance -1 au dessus du centre. Comme l'explique Ambro dans [Amb99b], remark 4.3, pour contourner cette difficulté, il faudrait développer la théorie de l'adjonction dans le cadre de variétés semi-normales.

Dans la preuve du théorème 124, la première étape consiste à se ramener au cas d'un centre de singularités log-canonique exceptionnel. Pour cela on utilise le lemme de perturbation ci-dessous.

On souhaite appliquer le lemme de perturbation à un centre log-canonique quelconque, c'est-à-dire pas nécessairement minimal. Après perturbation, on obtient ainsi un centre de singularités log-canoniques maximal et faiblement exceptionnel, ce qui est indispensable pour utiliser les résultats sur les fibrations lc-triviales. La technique est classique et ne diffère pas réellement du lemme de perturbation énoncé dans le chapitre précédent (théorème 121).

On peut noter que même si la paire $(X, \Delta+D)$ ci-dessous est log-canonique, la nouvelle paire $(X, \Delta + (1 - c_2)D + A)$ obtenue après perturbation n'est pas nécessairement log-canonique.

Théorème 142 *Soit (X, Δ) une paire klt et D un $\mathbb{Q}$-diviseur $\mathbb{Q}$-Cartier effectif. Soit W un centre de singularités log-canoniques pour la paire $(X, \Delta + D)$ et H un diviseur de Cartier ample sur X.*

Pour tout rationnel $r > 0$ suffisamment petit, il existe des rationnels $0 \leqslant c_1 \leqslant r$ et $0 \leqslant c_2 \leqslant r$ et un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $A \sim_{\mathbb{Q}} c_1 H$ tels que W soit un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel pour la paire $(X, \Delta + (1 - c_2)D + A)$.

La démonstration ci-dessous diffère (très) légèrement des autres preuves de ce résultat que j'ai pu voir ([Tak06b] pages 570-571 ou [Kol07]) dans le sens où la deuxième partie de la perturbation est plus effective. J'espère que cela simplifie l'argument.

Démonstration Si W est de codimension 1, alors W est faiblement exceptionnel pour la paire $(X, \Delta + D)$, c'est-à-dire $c_1 = c_2 = 0$ et $A = 0$. On peut donc supposer que $\mathrm{codim}(W) > 1$.

La première étape consiste à rendre le centre W maximal. Pour cela on pose $D_1 = (1 - \epsilon)D$ pour un rationnel ϵ suffisamment petit. La paire $(X, \Delta + D_1)$ est klt. On choisit maintenant un $\mathbb{Q}$-diviseur de Cartier ample $A_1 \sim_{\mathbb{Q}} H$ très général parmi ceux contenant

W. Plus précisément, on suppose que ce diviseur A_1 ne contient pas de centre de singularités log-canoniques de $(X, \Delta + D)$ contenant strictement W. Il existe un rationnel a_1 tel que $(X, \Delta + D_1 + a_1 A_1)$ soit log-canonique mais non klt au point général de W, c'est-à-dire que W soit un centre de singularités log-canoniques maximal pour la paire $(X, \Delta + D_1 + a_1 A_1)$. On peut remarquer que $a_1 \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$.

On peut donc supposer dès maintenant que W est un centre de singularités log-canoniques maximal pour la paire $(X, \Delta + D)$. En particulier, tout diviseur sur une log-résolution de $(X, \Delta + D)$ de discrépance -1 pour $(X, \Delta + D)$ et dominant W a son image égale à W.

Soit $\mu : X' \to X$ une log-résolution de $(X, \Delta + D)$. On va construire un $\mathbb{Q}$-diviseur ample sur X' qui va nous permettre de garder un seul diviseur exceptionnel de discrépance -1 au-dessus de W. Toute la difficulté consiste à ce que ce $\mathbb{Q}$-diviseur ample «vienne d'en bas».

On note a_i la discrépance de E_i pour la paire $(X, \Delta + D)$, d_i le coefficient de E_i dans le $\mathbb{Q}$-diviseur $\mu^* D$.

On commence par construire un diviseur ample sur X'. Pour un diviseur F dont le support est μ-exceptionnel, on note F^C la somme réduite des diviseurs μ-exceptionnels non inclus dans le support de F. On note D_{exc} le diviseur $\mu^* D - \mu_*^{-1} D$. Comme son nom l'indique D_{exc} est supporté sur le lieu exceptionnel de μ.

Pour tout rationnel $0 < \varepsilon \ll 1$, le $\mathbb{Q}$-diviseur $\mu^* A_1 - \varepsilon(D_{\text{exc}} + D_{\text{exc}}^C)$ est ample. On note $B \sim_{\mathbb{Q}} \mu^* A_1 - \varepsilon(D_{\text{exc}} + D_{\text{exc}}^C)$ un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif très général.

On va maintenant modifier légèrement notre diviseur ample B sur X de sorte que l'image directe dans X du nouveau diviseur obtenu soit le diviseur recherché. On choisit un diviseur E_0 sur X' dominant W, de discrépance -1 pour la paire $(X, \Delta + D)$ et de coefficient d_0 minimal parmi de tels diviseurs :

$$d_0 = \min\{d_i \mid E_i \text{ soit un diviseur de discrépance } -1 \text{ dominant } W \text{ et de coefficient } d_i \text{ dans } \mu^* D\}.$$

On peut remarquer que la paire (X, Δ) étant klt, on a $a(E_0, X, \Delta) > -1$. On en déduit que $d_0 > 0$ puisque $a(E_0, X, \Delta + D) = -1$. On pose $B' \sim_{\mathbb{Q}} B - \varepsilon E_0$ de sorte que B' soit ample, effectif, irréductible et que $B' + \varepsilon E_0 + \varepsilon(D_{\text{exc}} + D_{\text{exc}}^C)$ soit à croisements normaux simples : ceci est possible si ε est choisi dès le départ suffisamment petit.

Par construction, on a $B' + \varepsilon E_0 + \varepsilon(D_{\text{exc}} + D_{\text{exc}}^C) \sim \mu^* A_1$. On pose $B_X = \mu_*(B' + \varepsilon E_0 + \varepsilon(D_{\text{exc}} + D_{\text{exc}}^C))$. Ce $\mathbb{Q}$-diviseur B_X vérifie $B_X \sim A_1$ et est $\mathbb{Q}$-Cartier. Comme $\mu^* B_X = B' + E'$, avec E' exceptionnel et effectif, et que $\mu^* B_X \sim B' + \varepsilon E_0 + \varepsilon(D_{\text{exc}} + D_{\text{exc}}^C)$, on en déduit que $\mu^* B_X = B' + \varepsilon(E_0 + D_{\text{exc}} + D_{\text{exc}}^C)$.

Pour tout rationnel $0 < \alpha \ll 1$, montrons qu'il existe un rationnel β tel que W soit un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel pour la paire $(X, \Delta + (1 - \alpha)D + \beta B_X)$. On pose

$$\begin{aligned} d'_0 &= 2\varepsilon \\ d'_i &= \varepsilon \quad \text{si} \quad i \neq 0. \end{aligned}$$

On a

$$K_{X'}+\mu_*^{-1}(\Delta+(1-\alpha)D+\beta B_X) = \mu^*(K_X+\Delta+(1-\alpha)D+\beta B_X)+\sum_{E_i\ \mu-\text{exc.}}(a_i+\alpha d_i-\beta d_i')E_i.$$

D'après l'équation précédente, si $0 < \alpha \ll 1$, $\beta = \frac{d_0}{2\varepsilon}\alpha$ convient : en effet, on a $a_0 + \alpha d_0 - \beta d_0' = a_0 = -1$ et

$$a_i + \alpha d_i - \beta d_i' = a_i + \alpha d_i - \frac{\alpha}{2}d_0 \geqslant a_i + \frac{\alpha}{2}d_0 > a_i = -1$$

si E_i est un diviseur dominant W et vérifiant $i \neq 0$ et $a_i = -1$. Il reste le cas des diviseurs E_j dominant W et de discrépance $a_j > -1$. Mais ces diviseurs sont en nombre fini donc pour α suffisamment petit, on a $a_j + \alpha d_j - \beta d_j' > -1$.

Donc E_0 est le seul diviseur de discrépance -1 pour la paire $(X, \Delta + (1-\alpha)D + \beta B_X)$ dominant W. Cela conclut la démonstration en posant $c_1 = \beta$, $c_2 = \alpha$ et $A = \beta B_X$. $\square$

7.5. Preuves

Démonstration (Théorème 124) On commence par changer légèrement notre bord de sorte à rendre W faiblement exceptionnel pour une nouvelle paire qui satisfera encore les hypothèses. Soit H un diviseur ample. D'après le théorème 142, pour tout rationnel $1 \gg r > 0$, il existe des rationnels $0 \leqslant c_1 \leqslant r$ et $0 \leqslant c_2 \leqslant r$ et un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $A \sim_{\mathbb{Q}} c_1 H$ tels que W soit un centre de singularités log-canoniques faiblement exceptionnel pour la paire $(X, (1-c_2)\Delta + A)$. En choisissant r suffisamment petit, le $\mathbb{Q}$-diviseur $(K_X + (1-c_2)\Delta + A)_{|W}$ n'est toujours pas pseudo-effectif.

On pose $\Delta' = (1-c_2)\Delta + A$. On note $\nu : W^\nu \to W$ la normalisation de W. On va montrer qu'il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur de Weil pseudo-effectif D sur W^ν tel que $K_{W^\nu} + D$ soit $\mathbb{Q}$-Cartier et ne soit pas pseudo-effectif. Pour cela on utilise le théorème de positivité de Kawamata.

Soit $\mu : X' \to X$ une log-résolution de (X, Δ') et E l'unique diviseur exceptionnel dominant W de discrépance -1 pour la paire (X, Δ') (W est faiblement exceptionnel pour la paire (X, Δ')). On note Δ'_E l'unique $\mathbb{Q}$-diviseur sur E vérifiant

$$K_E + \Delta'_E = \mu^*(K_X + \Delta')_{|E}$$

D'après la proposition 136, la restriction de μ à E se factorise à travers W^ν et le morphisme induit $f : E \to W^\nu$ est une fibration lc-triviale de (E, Δ'_E). Le discriminant Δ'_{W^ν} de cette fibration est un $\mathbb{Q}$-diviseur sur W^ν. D'après la proposition 138, ce $\mathbb{Q}$-diviseur Δ'_{W^ν} est effectif.

Montrons maintenant que le diviseur modulaire de f est pseudo-effectif. En effet, Kawamata et Ambro ont montré qu'après un changement de base birationnel propre convenable, le diviseur modulaire de f devient nef (théorème 141). D'après la proposition 140, un diviseur M_{W^ν} est donc pseudo-effectif (voir définition 131). Notons enfin $D = \Delta'_{W^\nu} + M_{W^\nu}$. D'après ce qui précède, D est pseudo-effectif.

Montrons que $K_{W^\nu} + D$ n'est pas pseudo-effectif, ce qui impliquera bien, d'après le corollaire 132 que W^ν et donc W est uniréglé. Par définition d'une fibration lc-triviale et du diviseur modulaire, il existe une fonction rationnelle ϕ sur E de diviseur associé D_ϕ et un entier strictement positif r tels que

$$K_E + \Delta'_E + \frac{1}{r} D_\phi = f^*(K_{W^\nu} + D).$$

De plus, d'après la proposition 136, on a $K_E + \Delta'_E = f^*\nu^*((K_X + \Delta')_{|W})$. On en déduit que $f^*(K_{W^\nu} + D) \sim_{\mathbb{Q}} f^*\nu^*((K_X + \Delta')_{|W})$ et donc que $K_{W^\nu} + D \sim_{\mathbb{Q}} (K_X + \Delta')_{|W}$. Or $(K_X + \Delta')_{|W}$ n'est pas pseudo-effectif, ce qui termine la preuve. □

Démonstration (Corollaire 125) Soit $c > 0$ un rationnel. D'après [Laz04b], proposition 11.1.4, il existe un entier $p > 0$ tel que $\mathcal{J}(c \cdot \|L\|) = \mathcal{J}(\frac{c}{p} \cdot |pL|)$. D'après [Laz04b], proposition 9.2.26, il existe un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $\Delta \sim_{\mathbb{Q}} cL$ tel que $\mathcal{J}(\Delta) = \mathcal{J}(\frac{c}{p} \cdot |pL|)$. En particulier, on a $Z(\mathcal{J}(\Delta))_{\text{red}} = Z(\mathcal{J}(c \cdot \|L\|))_{\text{red}}$. Soit W une composante irréductible de $Z(\mathcal{J}(c \cdot \|L\|))_{\text{red}}$. On note t le seuil log-canonique de Δ au point général de W. La sous-variété W est alors un centre de singularités log-canoniques maximal pour la paire $(X, t\Delta)$ (car $t \leqslant 1$ et pour tout rationnel $s \leqslant 1$, on a $Z(\mathcal{J}(s\Delta))_{\text{red}} \subset Z(\mathcal{J}(\Delta))_{\text{red}}$).

Par hypothèse, W est couverte par des courbes d'intersection strictement négative avec L, donc d'intersection strictement négative avec $K_X + tcL$ aussi car $-K_X$ est nef. D'après [BDPP04] theorem 2.2 et le commentaire qui suit et en notant que $t\Delta \sim_{\mathbb{Q}} tcL$, la restriction $(K_X + \Delta)_{|W}$ n'est pas pseudo-effective. D'après le théorème 124, W étant un centre de singularités log-canoniques pour la paire (X, Δ), la variété W est uniréglée.

On va en déduire, grâce à la proposition 111, que toute composante irréductible de $\mathbf{B}_-(L)$ est uniréglée. D'après cette proposition, il existe un entier $N > 0$ tel que $W \subset Z(\mathcal{J}(N \cdot \|L\|))_{\text{red}}$. De plus W est une composante irréductible de $\mathbf{B}_-(L)$ donc de $Z(\mathcal{J}(N \cdot \|L\|))_{\text{red}}$: en effet, si ce n'était pas le cas, il existerait une composante irréductible V de $Z(\mathcal{J}(N \cdot \|L\|))_{\text{red}}$ telle que $W \neq V$ et $W \subset V$. Mais dans ce cas, W serait incluse strictement dans toute composante irréductible de $\mathbf{B}_-(L)$ contenant V (une telle composante existe puisque par définition de $\mathbf{B}_-(L)$, on a $V \subset \mathbf{B}_-(L)$). On conclut comme dans le paragraphe précédent.

□

7.6. Résultats de Takayama

Takayama a montré dans [Tak06a] que les lieux de base augmentés, diminués et stables de certains diviseurs étaient uniréglés. La preuve que donne Takayama de ce résultat est basée sur un résultat d'extension de sections de fibrés en droites adjoints qui induit un critère élégant de non-pseudo-effectivité du diviseur canonique.

Théorème 143 ([Tak06a], theorem 3.1) *Soit X une variété lisse, V une variété irréductible lisse de dimension strictement positive et L un diviseur (entier). Supposons qu'il existe une décomposition $L \sim_{\mathbb{Q}} A + D$ en*

1. *un $\mathbb{Q}$-diviseur ample A et*

2. un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif D tel que V soit un centre de singularités log-canoniques maximal pour la paire (X, D).

Si K_V est pseudo-effectif, alors le système linéaire $|m(K_X + L)|$ sépare deux points généraux distincts de V pour tout entier m suffisamment divisible.

Comme corollaire, Takayama obtient le résultat suivant. La preuve de ce dernier n'est toutefois pas immédiate, toute la difficulté consistant à fabriquer la décomposition adéquate $L \sim_{\mathbb{Q}} A+D$ sur une résolution plongée des singularités des lieux de base considérés.

Théorème 144 ([Tak06a], theorem 1.1, 1.2, 1.3, proposition 4.3, 4.4, 4.5) *Soit X une variété projective lisse.*

1. *Supposons X de type général. Toutes les composantes irréductibles de $\mathrm{Bs}(\|K_X\|)$, de $\boldsymbol{B}_+(K_X)$ et de $\boldsymbol{B}_-(K_X)$ sont alors uniréglées. De plus, pour tout rationnel $c > 0$, toute composante irréductible de $Z(\mathcal{J}(c \cdot \|K_X\|))_{red}$ est uniréglée.*
2. *Soit L un diviseur gros sur X. Supposons que $K_X \equiv 0$. Toutes les composantes irréductibles de $\mathrm{Bs}(\|L\|)$, $\boldsymbol{B}_+(L)$ et de $\boldsymbol{B}_-(L)$ sont alors uniréglées. De plus, pour tout rationnel $c > 1$, toute composante irréductible de $Z(\mathcal{J}(c \cdot \|L\|))_{red}$ non incluse dans $Z(\mathcal{J}(\|L\|))_{red}$ est uniréglée.*
3. *Supposons que $-K_X$ soit gros. Toutes les composantes irréductibles de $\mathrm{Bs}(\|-K_X\|)$ et de $\boldsymbol{B}_+(-K_X)$ non incluses dans $\boldsymbol{B}_-(-K_X)$ sont alors uniréglées. De plus, pour tout rationnel $c > 2$, toute composante irréductible de $Z(\mathcal{J}(c \cdot \| - K_X\|))_{red}$ non incluse dans $Z(\mathcal{J}(\| - 2K_X\|))_{red}$ est uniréglée.*

Index

Bibliographie

[ABW93] M. Andreatta, E. Ballico, and J. A. Wiśniewski. Two theorems on elementary contractions. *Math. Ann.*, 297(2) :191–198, 1993.

[Amb99a] F. Ambro. Ladders on Fano varieties. *J. Math. Sci. (New York)*, 94(1) :1126–1135, 1999. Algebraic geometry, 9.

[Amb99b] F. Ambro. The adjunction conjecture and its applications. *arXiv preprint math.AG/9903060*, 1999.

[Amb04] Florin Ambro. Shokurov's boundary property. *J. Differential Geom.*, 67(2) :229–255, 2004.

[Bau98] Thomas Bauer. Seshadri constants and periods of polarized abelian varieties. *Math. Ann.*, 312(4) :607–623, 1998. With an appendix by the author and Tomasz Szemberg.

[Bau99] Thomas Bauer. Seshadri constants on algebraic surfaces. *Math. Ann.*, 313(3) :547–583, 1999.

[BCE$^+$02] Thomas Bauer, Frédéric Campana, Thomas Eckl, Stefan Kebekus, Thomas Peternell, Sławomir Rams, Tomasz Szemberg, and Lorenz Wotzlaw. A reduction map for nef line bundles. In *Complex geometry (Göttingen, 2000)*, pages 27–36. Springer, Berlin, 2002.

[BDPP04] S. Boucksom, J.P. Demailly, M. Păun, and T. Peternell. The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension. *arXiv preprint math.AG/0405285*, 2004.

[BP04] Thomas Bauer and Thomas Peternell. Nef reduction and anticanonical bundles. *Asian J. Math.*, 8(2) :315–352, 2004.

[Bri97] Michel Brion. Variétés sphériques. Notes de la session de la S. M. F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques", http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/ mbrion/spheriques.pdf, 1997.

[Bro06] Amaël Broustet. Constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo. *L'Enseignement Mathématique*, 52 :231–239, 2006.

[BS93] M. C. Beltrametti and A. J. Sommese. Comparing the classical and the adjunction-theoretic definition of scrolls. In *Geometry of complex projective varieties (Cetraro, 1990)*, volume 9 of *Sem. Conf.*, pages 55–74. Mediterranean, Rende, 1993.

[BS95] Mauro C. Beltrametti and Andrew J. Sommese. *The adjunction theory of complex projective varieties*, volume 16 of *de Gruyter Expositions in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[CJR06] C. Casagrande, P. Jahnke, and I. Radloff. On the Picard number of almost Fano threefolds with pseudo-index > 1. *arXiv preprint math.AG/0603090*, 2006.

[CMSB02] Koji Cho, Yoichi Miyaoka, and N. I. Shepherd-Barron. Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds. In *Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)*, volume 35 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 1–88. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002.

[Deb01] Olivier Debarre. *Higher-dimensional algebraic geometry.* Universitext. Springer-Verlag, New York, 2001.

[Dem80] M. Demazure. Surfaces de Del Pezzo. I. II. III. IV. V. Semin. sur les singularites des surfaces, Cent. Math. Ec. Polytech., Palaiseau 1976-77, Lect. Notes Math. 777, 21-69 (1980)., 1980.

[Dem92] Jean-Pierre Demailly. Singular Hermitian metrics on positive line bundles. In *Complex algebraic varieties (Bayreuth, 1990)*, volume 1507 of *Lecture Notes in Math.*, pages 87–104. Springer, Berlin, 1992.

[DR96] Sandra Di Rocco. k-very ample line bundles on del Pezzo surfaces. *Math. Nachr.*, 179 :47–56, 1996.

[DR99] Sandra Di Rocco. Generation of k-jets on toric varieties. *Math. Z.*, 231(1) :169–188, 1999.

[EKL95] Lawrence Ein, Oliver Küchle, and Robert Lazarsfeld. Local positivity of ample line bundles. *J. Differential Geom.*, 42(2) :193–219, 1995.

[EL93] Lawrence Ein and Robert Lazarsfeld. Seshadri constants on smooth surfaces. *Astérisque*, (218) :177–186, 1993. Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Orsay, 1992).

[ELM+06] Lawrence Ein, Robert Lazarsfeld, Mircea Mustaţă, Michael Nakamaye, and Mihnea Popa. Asymptotic invariants of base loci. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 56(6) :1701–1734, 2006.

[Fuj07] Osamu Fujino. *What is log-terminal*, volume 35 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*, chapter 8, pages 45–57. Oxford University Press, Oxford, 2007. Preliminary draft.

[Fuk06] Yoshiaki Fukuma. On a conjecture of Beltrametti-Sommese for polarized 3-folds. *Internat. J. Math.*, 17(7) :761–789, 2006.

[Ful69] William Fulton. *Algebraic curves. An introduction to algebraic geometry.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969. Notes written with the collaboration of Richard Weiss, Mathematics Lecture Notes Series.

[Gar06] Luis Fuentes García. Seshadri constants on ruled surfaces : the rational and the elliptic cases. *Manuscripta Math.*, 119(4) :483–505, 2006.

[GP98] L. Göttsche and R. Pandharipande. The quantum cohomology of blow-ups of $\mathbf{P}^2$ and enumerative geometry. *J. Differential Geom.*, 48(1) :61–90, 1998.

[Har66] Robin Hartshorne. Ample vector bundles. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (29) :63–94, 1966.

[Har70] Robin Hartshorne. *Ample subvarieties of algebraic varieties.* Notes written in collaboration with C. Musili. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 156. Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[HM05] Christopher D. Hacon and James McKernan. Shokurov's rational connectedness conjecture. *arXiv preprint math.AG/0504330*, 2005.

[JP06] P. Jahnke and T. Peternell. Almost del Pezzo manifolds. *arXiv preprint math.AG/0612516*, 2006.

[Kaw86] Yujiro Kawamata. On the plurigenera of minimal algebraic 3-folds with $K \equiv 0$. *Math. Ann.*, 275(4) :539–546, 1986.

[Kaw97] Yujiro Kawamata. Subadjunction of log canonical divisors for a subvariety of codimension 2. In *Birational algebraic geometry (Baltimore, MD, 1996)*, volume 207 of *Contemp. Math.*, pages 79–88. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[Kaw98] Yujiro Kawamata. Subadjunction of log canonical divisors. II. *Amer. J. Math.*, 120(5) :893–899, 1998.

[Kaw00] Yujiro Kawamata. On effective non-vanishing and base-point-freeness. *Asian J. Math.*, 4(1) :173–181, 2000. Kodaira's issue.

[KM98] János Kollár and Shigefumi Mori. *Birational geometry of algebraic varieties*, volume 134 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Translated from the 1998 Japanese original.

[KMM04] Sean Keel, Kenji Matsuki, and James McKernan. Corrections to : "Log abundance theorem for threefolds" [Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 99–119 ; mr1284817]. *Duke Math. J.*, 122(3) :625–630, 2004.

[KMMT00] János Kollár, Yoichi Miyaoka, Shigefumi Mori, and Hiromichi Takagi. Boundedness of canonical $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 76(5) :73–77, 2000.

[Kol07] János Kollár. *Kodaira's canonical bundle formula and subadjunction*, volume 35 of *Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications*, chapter 8, pages 121–146. Oxford University Press, Oxford, 2007. Preliminary draft.

[Laz96] Robert Lazarsfeld. Lengths of periods and Seshadri constants of abelian varieties. *Math. Res. Lett.*, 3(4) :439–447, 1996.

[Laz04a] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern*

Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Classical setting : line bundles and linear series.

[Laz04b] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. II*, volume 49 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Positivity for vector bundles, and multiplier ideals.

[Lee03] Seunghun Lee. Seshadri constants and Fano manifolds. *Math. Z.*, 245(4) :645–656, 2003.

[Miy87] Yoichi Miyaoka. The Chern classes and Kodaira dimension of a minimal variety. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 449–476. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Mor82] Shigefumi Mori. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. *Ann. of Math. (2)*, 116(1) :133–176, 1982.

[Muk88] S Mukai. Problems on characterization of the complex projective space. Birational geometry of algebraic varieties. Open problems. The 23rd Intern. Sympos. Division of Math. The Taniguchi Foundation. Kataka, 1988.

[Nak03] Michael Nakamaye. Seshadri constants and the geometry of surfaces. *J. Reine Angew. Math.*, 564 :205–214, 2003.

[Nak05] Michael Nakamaye. Seshadri constants at very general points. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(8) :3285–3297 (electronic), 2005.

[Rei83] Miles Reid. Projective morphisms according to Kawamata. http ://www.maths.warwick.ac.uk/ miles/3folds/Ka.pdf, 1983.

[Rei87] Miles Reid. Young person's guide to canonical singularities. In *Algebraic geometry, Bowdoin, 1985 (Brunswick, Maine, 1985)*, volume 46 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 345–414. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987.

[Tak06a] Shigeharu Takayama. On the uniruledness of stable base loci. Communication privée., 2006.

[Tak06b] Shigeharu Takayama. Pluricanonical systems on algebraic varieties of general type. *Invent. Math.*, 165(3) :551–587, 2006.

[Wiś90] Jarosław A. Wiśniewski. On a conjecture of Mukai. *Manuscripta Math.*, 68(2) :135–141, 1990.

[Xie04] Qihong Xie. On pseudo-effectivity of the second Chern classes for smooth threefolds. *Manuscripta Math.*, 115(1) :101–116, 2004.

RÉSUMÉ

Ce mémoire traite de la positivité locale des fibrés en droites amples. Cette positivité locale est mesurée par les constantes de Seshadri de ces fibrés. Il est conjecturé par Ein et Lazarsfeld que les constantes de Seshadri d'un fibré en droites gros et nef sur une variété projective sont minorées par 1 pour tout point en position très générale. On montre cette conjecture :

1. pour tout fibré en droites ample sur une variété lisse X de dimension 3 avec $-K_X$ nef,
2. pour tout fibré en droites gros et nef adjoint sur une variété X à singularités canoniques de dimension 3 avec K_X nef,
3. pour tout fibré en droites ample adjoint et de "grand volume" sur une variété X lisse de dimension 3,
4. pour tout fibré en droites ample sur une variété X factorielle, à singularités terminales, presque de Fano et de coindice au plus 3,
5. pour tout fibré en droites ample $\mathcal{O}_X(D)$ sur une variété de Fano lisse de dimension 4 vérifiant $-K_X \equiv rD$.

La preuve de ces résultats utilise l'existence de sections globales non nulles pour certains fibrés en droites. Ceci fait l'objet d'une conjecture de Kawamata, la conjecture de non annulation effective, que l'on prouve en dimension 3 dans le cas des fibrés en droites de "grand volume". Enfin le dernier chapitre traite du caractère uniréglé de certains lieux de base de diviseurs gros et non nefs. De tels diviseurs apparaîssent naturellement lorsqu'un fibré en droites gros et nef admet de "petites" constantes de Seshadri.

MOTS-CLÉS

Positivité locale, constantes de Seshadri, non-annulation effective, courbes rationnelles, géométrie birationnelle, programme du modèle minimal de Mori, variétés de Fano, sous-adjonction, centres de singularités log-canoniques.

CLASSIFICATION MATHÉMATIQUE

14J30, 14J35, 14J40, 14J45, 14E05, 14E25, 14E30, 14N30, 14C20, 14C21.