

# Constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo

Amaël BROUSTET

11 octobre 2006

**Abstract.** Seshadri constants, introduced by Demailly, capture positivity of a nef divisor at a point. We compute in this note the Seshadri constants of the anticanonical bundle at every point of del Pezzo surfaces. During the proof, we enlighten the role of rational curves in our computations. We present then two examples where the positivity of the anticanonical bundle cannot be detected using rational curves.

## 1 Introduction

Le concept de positivité locale, introduit par J.P Demailly [D], consiste à mesurer au travers des constantes de Seshadri la positivité d'un diviseur nef en un point.

**Définition 1.1** Soit  $X$  une variété projective lisse complexe,  $x$  un point de  $X$  et  $D$  un diviseur nef sur  $X$ . La constante de Seshadri en  $x$  de  $D$  est le réel positif :

$$\varepsilon(D; x) = \inf_{x \in C \subset X} \frac{D \cdot C}{\text{mult}_x C}$$

la borne inférieure étant prise sur l'ensemble des courbes irréductibles et réduites  $C \subset X$  passant par  $x$ .

Pour plus d'informations sur les constantes de Seshadri, on recommande le chapitre 5 de [L].

Par semi-continuité inférieure des constantes de Seshadri ([L] exemple 5.1.11), si  $x$  est un point en position très générale, la constante ne dépend pas du point. L'expression "point en position très générale" signifie qu'il existe une intersection dénombrable d'ouverts denses telle que la propriété soit vérifiée si le point appartient à cet ensemble. Dans cette note, on calcule *en tout point* les constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo lisses. On peut dans notre cas donner une définition précise de la notion de point en position générale.

**Définition 1.2** Un ensemble de  $r \leq 8$  points  $\{x_1, \dots, x_r\}$  du plan est dit en position générale si aucun sous-ensemble de 3 de ces points n'est sur une droite, si aucun sous-ensemble de 6 d'entre eux n'est sur une conique et si 8 d'entre eux ne sont pas sur une cubique singulière en l'un d'eux. Dans la suite, on notera  $\mu_r : X_r \rightarrow \mathbb{P}^2$  l'éclatement du plan en  $r$  points distincts  $x_1, \dots, x_r$ . Lorsque  $r \leq 7$ , un point  $x$  de  $X_r$  sera dit en position générale si son image  $y$  par  $\mu_r$

---

**Key-words :** Seshadri constants, rational curves.

**A.M.S. classification :** 14J26, 14J45.

est distincte des points d'éclatement  $x_i$  et si les points  $\{x_1, \dots, x_r, y\}$  sont en position générale. Si le point  $x$  n'est pas en position générale, il est alors sur une courbe exceptionnelle ou sur la transformée stricte d'une des courbes précédemment citées. On dira que cette courbe est une courbe distinguée contenant  $x$ .

On montre le résultat suivant :

**Théorème 1.3** *Si  $r \leq 5$ , la constante de Seshadri de  $-K_{X_r}$  au point  $x$  vaut :*

- $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 2$  si  $x$  est en position générale,
- $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 1$  sinon.

*Si  $r = 6$ , la constante de Seshadri de  $-K_{X_6}$  au point  $x$  vaut :*

- $\varepsilon(-K_{X_6}; x) = 3/2$  si  $x$  est en position générale,
- $\varepsilon(-K_{X_6}; x) = 1$  sinon.

*Si  $r = 7$ , la constante de Seshadri de  $-K_{X_7}$  au point  $x$  vaut :*

- $\varepsilon(-K_{X_7}; x) = 4/3$  si  $x$  est en position générale,
- $\varepsilon(-K_{X_7}; x) = 1$  sinon.

*Si  $r = 8$ , les constantes de Seshadri de  $-K_{X_8}$  valent  $\frac{1}{2}$  en au plus 12 points n'appartenant pas au diviseur exceptionnel et 1 partout ailleurs.*

Au cours de la preuve du théorème 1.3, nous mettrons en relief le rôle des courbes rationnelles dans le calcul des constantes de Seshadri. Plus exactement nous obtenons le résultat suivant :

**Proposition 1.4** *Si  $S$  est une surface de del Pezzo lisse*

$$\varepsilon(-K_S; x) = \inf_{x \in C \text{ rationnelle}} \frac{-K_S \cdot C}{\text{mult}_x C}.$$

Malheureusement, les courbes rationnelles ne permettent en général pas de détecter la positivité sur une variété rationnellement connexe. On donne à la fin de cette note deux exemples de surfaces rationnellement connexes dont le diviseur anticanonique possède une intersection positive avec toute courbe rationnelle mais n'est pas nef, ni même pseudoeffectif dans le cas du deuxième exemple.

## 2 Constantes de Seshadri du diviseur anticanonique des surfaces de del Pezzo

### 2.1 Preuve du théorème 1.3

**Le cas  $r \leq 6$ .** Le diviseur anticanonique  $-K_{X_r}$  est très ample donc  $\varepsilon(-K_{X_r}; x) \geq 1$  pour tout point  $x$  (le degré d'une courbe irréductible et réduite est minoré par sa multiplicité en  $x$ ). Si  $x$  n'est pas en position générale, une courbe distinguée  $C$  contenant  $x$  vérifie  $-K_X \cdot C = 1$ . On en déduit que  $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 1$ .

Si  $x$  est en position générale, il existe alors un membre irréductible et réduit  $D_x \in |-K_{X_r}|$  vérifiant  $\text{mult}_x D_x = 2$ . Supposons ceci vrai pour le moment, on a alors pour toute courbe  $C$  contenant  $x$  différente du support de  $D_x$

$$D_x \cdot C \geq 2 \text{mult}_x C.$$

De plus  $D_x^2 = 9 - r \geq 4$  si  $r \leq 5$  et  $D_x^2 = 3$  si  $r = 6$ . D'où  $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = 2$  si  $r \leq 5$  et  $\varepsilon(-K_{X_r}; x) = \frac{3}{2}$  si  $r = 6$ .

Il reste à montrer l'existence de  $D_x$ . D'après [F] (Theorem 1 page 110) il existe une cubique  $D$  passant par tous les  $x_i$  et dont la multiplicité au point  $\mu_r(x)$  est supérieure ou égale à 2. Il suffit de vérifier que  $\text{mult}_{\mu_r(x)} D \leq 2$  et que  $D$  est bien irréductible et réduite,  $D_x$  sera alors la transformée stricte de  $D$ . Quitte à compléter l'ensemble des points  $x_i$ , on peut supposer  $r = 6$ . Si  $D$  n'est pas irréductible et réduite,  $D$  est l'union de trois droites ou d'une droite et d'une conique. Par la position générale de l'ensemble de points  $\{x_1, \dots, x_6, \mu_r(x)\}$ , la courbe  $D$  ne peut alors passer par tous les points avec la multiplicité prescrite.

La courbe  $D$  étant irréductible, son intersection avec une droite  $L$  passant par  $\mu_r(x)$  et un autre point  $z \in D$  vérifie

$$3 \geq D \cdot L \geq \text{mult}_z D + \text{mult}_{\mu_r(x)} D.$$

On en déduit que  $\text{mult}_{\mu_r(x)} D \leq 2$  et que  $z$  est un point lisse de  $D$ .

**Le cas  $r = 7$**  D'après [H], proposition III.4.3, le système linéaire  $| -K_{X_7}|$  est sans point de base. Il existe donc pour tout point  $x \in X_7$  un diviseur  $D \in | -K_{X_7}|$  passant par  $x$  et lisse au point  $x$ . On en déduit que  $\varepsilon(-K_{X_7}; x) \geq 1$ . Si le point  $x$  n'est pas en position générale, on déduit comme précédemment que  $\varepsilon(-K_{X_7}; x) = 1$ .

Si le point  $x$  est en position générale, on évalue les constantes de Seshadri de  $-2K_{X_7}$  et l'on conclut par homogénéité. Il existe un membre irréductible et réduit  $D_x \in | -2K_{X_7}|$  dont la multiplicité en  $x$  vaut 3. Cela revient à prouver l'existence d'une courbe plane de degré 6 irréductible, réduite de multiplicité 3 en  $\mu_7(x)$  et de multiplicité 2 aux points  $x_i$ . Il existe ([F] Theorem 1 page 110) une courbe plane  $D$  de degré 6 et de multiplicités au moins égales à celles attendues aux points  $x_i$  et  $\mu_7(x)$ . Si cette courbe est irréductible et réduite, son intersection avec une cubique passant par les 8 points  $x_1, \dots, x_7, \mu_7(x)$  et un neuvième sur la courbe  $D$  vaut 18 d'après le théorème de Bézout. On en déduit que  $\text{mult}_{x_i} D = 2$  pour tout  $i$  et que  $\text{mult}_{\mu_7(x)} D = 3$ . Il reste à montrer que cette courbe est irréductible et réduite. Si la courbe  $D$  était l'union de deux cubiques  $C_1$  et  $C_2$  (éventuellement non irréductibles ou non réduites), les points  $x_1, \dots, x_7, \mu_7(x)$  étant en position générale, on aurait alors

$$17 = \sum_{i \leq 7} \text{mult}_{x_i} D + \text{mult}_{\mu_7(x)} D = \sum_{j=1,2} \sum_{i \leq 7} \text{mult}_{x_i} C_j + \text{mult}_{\mu_7(x)} C_j \leq 2 \times 8.$$

Si  $D$  n'est pas irréductible,  $D$  est donc soit l'union de 3 coniques soit l'union d'une quintique réduite irréductible et d'une droite ou d'une quartique réduite irréductible et d'une conique. En intersectant cette quintique  $Q$  avec une cubique  $C$  passant par tous les points  $x_1, \dots, x_7, \mu_7(x)$  et un autre point de la quintique, on obtient d'après le théorème de Bézout

$$\sum_{i \leq 7} \text{mult}_{x_i} Q + \text{mult}_{\mu_7(x)} Q \leq 15 - 1 = 14.$$

Encore une fois, on aurait dans ce cas

$$\sum_{i \leq 7} \text{mult}_{x_i} D + \text{mult}_{\mu_7(x)} D \leq 16$$

ce qui n'est pas possible. On procède de même pour les cas où  $D$  est l'union d'une quartique et d'une conique et où  $D$  est l'union de 3 coniques. Le diviseur  $D_x$  est donc irréductible et réduit. Comme au paragraphe précédent, on en conclut que

$$\varepsilon(-K_{X_7}; x) = \min\left\{\frac{3}{2}, \frac{-K_{X_7} \cdot D_x}{3}\right\} = \frac{4}{3}.$$

De même qu'au paragraphe précédent, la courbe  $D$  qui permet "d'atteindre" la constante de Seshadri est rationnelle.

**Le cas  $r = 8$ .** Toujours d'après [H], proposition III.4.3, il existe pour tout  $x \in X_8$  un élément  $D_x \in |-K_{X_8}|$  passant par  $x$ . Le diviseur  $D_x$  est irréductible et réduit grâce à la position générale des points  $x_1, \dots, x_8$ . On en déduit que  $\varepsilon(-K_{X_8}; x) = 1$  sauf aux éventuels points singuliers des membres de  $|-K_{X_8}|$ . Mais d'après la position générale des points  $x_1, \dots, x_8$  ces points singuliers sont en dehors du diviseur exceptionnel de  $\mu_8$  et correspondent aux singularités des cubiques du pinceau de cubiques passant par les  $x_i$ . Le nombre de cubiques singulières dans un pinceau général de cubique est un problème classique de géométrie énumérative et vaut 12. En ces points les constantes de Seshadri de  $-K_{X_8}$  valent  $\frac{1}{2}$ .

Contrairement aux cas précédents, il n'existe en général pas pour les constantes de Seshadri de  $-K_{X_8}$  de courbe rationnelle  $\Gamma$  telle que

$$\varepsilon(-K_{X_8}; x) = \frac{-K_{X_8} \cdot \Gamma}{\text{mult}_x \Gamma}.$$

Pour voir cela, on peut notamment utiliser le lemme 3.1 ci-dessous. On note  $X_9$  l'éclatement de  $X_8$  au point  $x$  et  $E_9$  le diviseur exceptionnel correspondant. A une telle courbe rationnelle correspondrait un morphisme stable non pointé de genre 0 et de classe  $dH - \sum_{i=1}^9 a_i E_i$  avec  $3d - \sum a_i = 0$ . Or l'espace de module de ces morphismes est vide.

On peut cependant noter qu'il existe une suite  $(\Gamma_k)$  de courbes rationnelles telles que

$$\varepsilon(-K_{X_8}; x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-K_{X_8} \cdot \Gamma_k}{\text{mult}_x \Gamma_k}.$$

On obtient la courbe  $\Gamma_k$ , vérifiant  $\frac{-K_{X_8} \cdot \Gamma_k}{\text{mult}_x \Gamma_k} = \frac{k}{k-1}$ , en projetant dans  $X_8$  (par contraction du diviseur  $E_9$  sur  $x = x_9$ ) la courbe rationnelle obtenue dans le lemme suivant ([GLS] Lemma 3.2.10) :

**Lemme 2.1** *Soit  $X_9$  l'éclatement de  $\mathbf{P}^2$  en 9 points en position très générale, on note  $H$  le tiré en arrière de  $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(1)$ , et  $E_i$  la préimage du point d'éclatement  $x_i$ . Pour tout entier  $k \geq 1$  il existe une courbe rationnelle nodale irréductible dans le système*

$$|3kH - kE_1 - \dots - kE_8 - (k-1)E_9|.$$

■

### 3 Positivité et courbes rationnelles

#### 3.1 Un exemple de surface rationnelle dont le diviseur anticanonique n'est pas nef mais s'intersecte positivement avec toute courbe rationnelle

Soient 9 points dans  $\mathbb{P}^2$  de sorte que par ces 9 points passe une unique cubique lisse  $C$ . On complète ces neuf points par un dixième toujours sur  $C$  et on note  $\mu : X \rightarrow \mathbf{P}^2$  l'éclatement du plan en ces 10 points. La transformée stricte  $C'$  de  $C$  par  $\mu$  est un membre irréductible de  $|-K_X|$  dont l'intersection avec toute courbe rationnelle est positive ou nulle. Cependant, comme  $C'^2 = -1$ , le diviseur  $-K_X$  n'est pas nef.

#### 3.2 Un exemple de surface rationnelle dont le diviseur anticanonique n'est pas pseudoeffectif mais s'intersecte positivement avec toute courbe rationnelle

Soient 13 points  $x_1, \dots, x_{13}$  en position très générale dans  $\mathbb{P}^2$  de sorte qu'entre autre, passe par ces 13 points un pinceau de quartiques mais aucune cubique. On note  $\mu : X \rightarrow \mathbf{P}^2$  l'éclatement du plan en ces 13 points. Puisque la transformée stricte  $C$  par  $\mu$  de toute quartique passant par ces 13 points vérifie  $-K_X \cdot C = -1$  et que ces courbes couvrent un ouvert dense de  $X$ , le diviseur anticanonique n'est pas pseudoeffectif. Les diviseurs pseudoeffectifs sont ceux dont la classe numérique appartient à l'adhérence du cône engendré par les diviseurs effectifs. Boucksom, Demailly, Paun et Peternell ont montré [BDPP] que c'est la forme de positivité la plus faible que l'on pouvait espérer pour un diviseur : le cône des diviseurs pseudoeffectifs est le dual du cône des courbes qui bougent (celles dont les déformations couvrent un ouvert dense de  $X$ ). Cependant, le diviseur anticanonique de  $X$  s'intersecte positivement avec toute courbe rationnelle, comme le montre le lemme suivant ([GP] lemme 4.2 page 74, les notations ajoutées sont au paragraphe 3.1 pages 66-67) :

**Lemme 3.1** *Soit un couple  $(d, \alpha)$ , où  $d$  est un entier strictement positif et  $\alpha$  un  $r$ -uplet  $\alpha = (a_1, \dots, a_r)$ . On note  $X_r$  l'éclatement de  $\mathbf{P}^2$  en  $r$  points distincts en position très générale,  $H$  le tiré en arrière d'un diviseur hyperplan de  $\mathbf{P}^2$ ,  $E_i$  la préimage du point d'éclatement  $x_i$ . On désigne par  $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$  l'espace de modules des morphismes stables non pointés de genre 0 et de classe  $dH - \sum_{i=1}^r a_i E_i$ .*

*Si  $3d - 1 - \sum a_i < 0$  alors  $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$  est vide.*

L'espace de module  $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$  paramètre les morphismes vers  $X_r$  de toutes les courbes  $C$  réduites, connexes, de genre 0, au plus nodales et dont l'image dans  $X_r$  est numériquement équivalente à  $dH - \sum_{i=1}^r a_i E_i$ . Il faut noter que les restrictions ne portent que sur les singularités de  $C$  et non sur son image dans  $X_r$ . En particulier, toute courbe rationnelle irréductible et réduite dans  $X_r$ , de classe  $dH - \sum_{i=1}^r a_i E_i$ , est obtenue comme l'image par un morphisme stable de  $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$ . Une courbe rationnelle  $\Gamma$  s'intersectant négativement

avec le diviseur anticanonique de  $X$ , vérifie

$$3d - \sum_{i=1}^{13} a_i \leq 0$$

et n'existe donc pas puisque l'espace de module correspondant  $\bar{M}_{(0,0)}(X_r)(d, \alpha)$  est vide d'après le lemme.

*Je remercie Thierry Vust pour sa lecture attentive d'une première version de ce texte.*

## Références

- [BDPP] S. Boucksom, J.P. Demailly, M. Paun et T. Peternell *The pseudo-effective cone of a compact Kähler manifold and varieties of negative Kodaira dimension* <http://arxiv.org/abs/math/0405285>
- [D] J.P. Demailly. *Singular Hermitian metrics on positive line bundles*, Complex algebraic varieties, Proc. Conf., Bayreuth/Ger. 1990, Lect. Notes Math. 1507, 87-104. 1992.
- [F] W. Fulton. *Algebraic curves*, Mathematics Lecture Note Series, New York-Amsterdam : W.A. Benjamin, Inc. XIII. 1969.
- [GLS] G.M. Greuel, C. Lossen et E. Shustin. *Geometry of families of nodal curves on the blown-up projective plane*, Trans. Am. Math. Soc. 350, No.1, 251-274. 1998.
- [GP] L. Göttsche et R. Pandharipande. *The quantum cohomology of blow-ups of  $\mathbf{P}^2$  and enumerative geometry*, J. Differ. Geom. 48, No.1, 61-90. 1998.
- [H] R. Hartshorne. *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52, New York-Heidelberg : Springer-Verlag, 1977.
- [L] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I. Classical setting : line bundles and linear series*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 48, Berlin : Springer. 2004.

A.B. e-mail : [broustet@ujf-grenoble.fr](mailto:broustet@ujf-grenoble.fr)

*Institut Fourier, UFR de Mathématiques, Université de Grenoble 1, UMR 5582, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères, FRANCE*