Cohomologie et actions isométriques propres sur les espaces L_p

Marc Bourdon

Résumé

Ces notes sont une présentation introductive de la cohomologie ℓ_p des groupes, avec une application à l'étude des actions isométriques propres sur les espaces L_p.

Abstract

These notes present and discuss some of the basic properties and results of the ℓ_p-cohomology of groups. We also use the ℓ_p-cohomology to study the proper isometric actions of word hyperbolic groups on L_p-spaces.

A.M.S. Classification : 20F67, 20J06, 43A07, 43A15, 58E40.
Key words : ℓ_p-cohomology, proper isometric actions on Banach spaces.

0 Introduction

Ce texte traite de certains aspects de la cohomologie ℓ_p des groupes, et des actions isométriques sur les espaces L_p. Pratiquement aucun résultat qu'il contient n'est original. Il comporte deux parties. La première est une relecture détaillée et commentée de certains passages du livre [31] de M. Gromov qui portent sur la cohomologie ℓ_p. Cette partie a également bénéficié des nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec P. Pansu. Dans la seconde partie, la cohomologie ℓ_p est utilisée pour étudier les actions isométriques propres des groupes (Gromov) hyperboliques sur les espaces L_p. Chaque partie se termine par un survol de quelques résultats complémentaires et par des questions.

0.1 Cohomologie ℓ_p

Le premier thème abordé est celui de la cohomologie ℓ_p des groupes de type fini Γ. Nous en présentons des définitions et résultats de base. Sont discutés en particulier :

- L'invariance par quasi-isométrie de la cohomologie ℓ_p de Γ (Th.1.2 et Def.1.3),
- Plusieurs caractérisations de la moyennabilité en termes d'homologie et de cohomologie ℓ_p (Th.1.5),
- L'annulation de la cohomologie ℓ_p réduite de Γ lorsque le centre Γ est infini (Prop.1.9),
- Des énoncés d'annulation de la 1-cohomologie ℓ_p en présence d'un sous-groupe distingué ayant des propriétés spéciales (Prop.1.12 et Th.1.13),
- Un résultat de représentation harmonique de la 1-cohomologie ℓ_p des groupes non moyennables (Cor.1.6).

0.2 Actions isométriques propres

La 1-cohomologie ℓ_p de Γ décrit les actions isométriques de Γ sur $\ell_p(\Gamma)$ associées à la représentation régulière droite. Elle participe donc au second thème abordé dans ces notes, qui est celui des actions isométriques sur les espaces L_p.

Rappelons qu'une action de Γ sur un Banach V est dite *propre* si pour toute partie bornée $P \subset V$ le cardinal des $g \in \Gamma$ tels que $gP \cap P \neq \emptyset$ est fini.

Un groupe est dit *a-T-menable* s'il possède une action isométrique propre sur un Hilbert. Cette notion apparait dans [31] p.177. Elle joue un rôle de premier plan dans l'étude des groupes via leurs actions sur les espaces de Hilbert (voir notamment [16]).

On s'intéresse ici à sa généralisation naturelle aux actions sur les espaces L_p. L'un des objectifs de ces notes est d'établir le résultat suivant qui est une version quantitative d'un théorème de G. Yu [55]. Dans l'énoncé Confdim$(\partial\Gamma)$ désigne la dimension conforme Ahlfors régulière du bord de Γ, il s'agit d'un invariant de quasi-isométrie de Γ dont la définition est rappelée au paragraphe 2.1.

Théorème 0.1 *Soit Γ un groupe hyperbolique (au sens de Gromov), alors pour tout $p > \mathrm{Confdim}(\partial\Gamma)$ il possède une action isométrique propre sur ℓ_p.*

G. Yu démontre l'existence d'une telle action pour p assez grand, en utilisant la construction d'I. Mineyev du "fibré unitaire tangent" à un groupe hyperbolique. Une de ses motivations provient de la K-théorie des C^*-algèbres [34]. Nous montrons le théorème en utilisant la 1-cohomologie ℓ_p de Γ et le bord à l'infini de Γ. Récemment B. Nica [39] a donné une autre preuve du théorème de G. Yu qui repose sur des structures conformes au bord construites par I. Mineyev.

Dans le cas où Γ est un réseau cocompact d'un groupe de Lie simple de rang 1, le théorème 0.1 est dû à Y. De Cornulier, R. Tessera, A. Valette [19] par des méthodes différentes.

Il est intéressant de noter que le théorème entraîne que les groupes hyperboliques de Kazhdan agissent proprement sur les espaces ℓ_p lorsque p est assez grand, alors que leurs actions isométriques sur ℓ_2 fixent toujours un point.

0.3 Remerciements

Je remercie les éditeurs C.S. Aravinda, F.T. Farrell et J.F. Lafont pour avoir considéré ce texte pour les actes de la conférence "Geometry, Topology and Dynamics in Negative Curvature" de Bangalore d'aout 2010. Ces notes reprennent et complètent un mini-cours donné lors de la rencontre "Cohomologie L^p et actions affines sur les espaces L^p" en juin 2009 à Orléans. Je remercie ses organisateurs I. Chatterji, Y. de Cornulier, V. Lafforgue et Y. Stalder. Je suis reconnaissant à G. Yu qui m'a posé le problème d'utiliser la cohomologie ℓ_p pour donner une autre démonstration de son théorème. Je salue D. Gaboriau en souvenir de nos discussions et tentatives communes. Je remercie P. Pansu pour les discussions éclairantes. Je suis reconnaissant au rapporteur pour avoir suggéré plusieurs ajouts aux paragraphes 1.6.1, 1.6.3, 2.4.1 et 2.4.2.

0.4 Conventions et notations

Etant donné $p \in [1, +\infty)$ et un ensemble dénombrable E, on désignera indifféramment par $\ell_p(E)$ l'espace de Banach des suites réelles $(a_i)_{i\in E}$ ou des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$, qui sont p-sommables. On notera simplement ℓ_p tout espace de Banach $\ell_p(E)$ avec E dénombrable infini (et muni de la mesure de comptage).

On appelle *espace* L_p tout espace de Banach de la forme $L_p(\mathbb{R}, \mu)$ où μ est une mesure borélienne quelconque sur $\mathbb{R}$.

1 Cohomologie ℓ_p

Dans ce chapitre sont présentés des définitions et résultats de base de la cohomologie ℓ_p des groupes. Au premier paragraphe nous définissons l'homologie et cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux et étudions leur dualité. Au second paragraphe l'invariance par quasi-isométrie est discutée. Celle-ci nous permet au paragraphe 3 de définir la cohomologie ℓ_p des groupes qui agissent par isométries de manière proprement discontinue et compacte sur des complexes simpliciaux contractiles. Des liens entre cohomologie ℓ_p et cohomologie à valeurs dans une représentation sont établis. Le paragraphe 4 porte sur la cohomologie ℓ_p en degré 1 des groupes de type fini généraux. On y donne, entre autres choses, plusieurs caractérisations de la moyennabilité. Au paragraphe 5 des exemples de phénomènes d'annulation et de non-annulation de cohomologie sont présentés. On termine au paragraphe 6 par un survol de quelques résultats complémentaires et par des questions.

1.1 Cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux

On ne considérera ici que des complexes simpliciaux X munis d'une métrique de longueur notée $|\cdot - \cdot|$, telle que

(i) il existe une constante $C \geq 0$ telle que tout simplexe de X soit de diamètre inférieur à C,

(ii) il existe une fonction $N : [0, +\infty[\to \mathbb{N}$ telle que toute boule de rayon r contienne au plus $N(r)$ simplexes de X.

Un tel complexe sera dit *géométrique*. Suivant [31] §8, on définit leur homologie et cohomologie ℓ_p pour $p \in [1, +\infty)$, et on discute quelques-unes de leurs propriétés.

Pour $k \in \mathbb{N}$ soit X_k l'ensemble des k-simplexes de X. Pour $p \in [1, +\infty)$ on pose :

$$\ell_p C_k(X) := \{\Sigma_{\sigma \in X_k} a_\sigma \sigma \ ; \ (a_\sigma)_{\sigma \in X_k} \in \ell_p(X_k)\},$$
$$\ell_p C^k(X) := \{\omega : X_k \to \mathbb{R} \ ; \ \omega \in \ell_p(X_k)\}.$$

L'opérateur bord standard induit des opérateurs bornés (grâce à la propriété (ii) ci-dessus) :

$$\partial_k : \ell_p C_k(X) \to \ell_p C_{k-1}(X) \ , \quad d_k : \ell_p C^k(X) \to \ell_p C^{k+1}(X),$$

qui satisfont pour tout $\omega \in \ell_p C^k(X)$ et tout $\sigma \in X^{k+1}$: $(d_k \omega)(\sigma) = \omega(\partial_{k+1}\sigma)$.

Le k-ième groupe d' homologie ℓ_p de X (resp. d'homologie ℓ_p réduite) est

$$\ell_p H_k(X) = \ker \partial_k / \mathrm{Im}\ \partial_{k+1},$$

(resp. $\ell_p \overline{H_k}(X) = \ker \partial_k / \overline{\mathrm{Im}\ \partial_{k+1}}$, où $\overline{\mathrm{Im}\ \partial_{k+1}}$ désigne l'adhérence pour la topologie ℓ_p).

De même le k-ième groupe de cohomologie ℓ_p de X (resp. de cohomologie ℓ_p réduite) est

$$\ell_p H^k(X) = \ker d_k / \mathrm{Im}\ d_{k-1},$$

(resp. $\ell_p \overline{H^k}(X) = \ker d_k / \overline{\mathrm{Im}\ d_{k-1}}$).

On munit ces espaces vectoriels de la topologie quotient provenant de la topologie ℓ_p. Les groupes de cohomologie réduite sont alors des espaces de Banach.

Proposition 1.1 *Pour $p, q \in (1, +\infty)$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et $k \in \mathbb{N}$, l'espace $\ell_p\overline{H^k}(X)$ est canoniquement isomorphe au dual de $\ell_q\overline{H_k}(X)$. De même $\ell_q\overline{H_k}(X)$ est canoniquement isomorphe au dual de $\ell_p\overline{H^k}(X)$.*

En général il est plus difficile de comparer les cohomologies et homologies non réduites. Par exemple pour $p \in (1, +\infty)$ la cohomologie ℓ_p d'un groupe infini de type fini est toujours nulle en degré 0, par contre son homologie ℓ_p en degré 0 est nulle si et seulement si il est non moyennable (voir Th. 1.5).

Preuve de la proposition : Pour $p, q \in (1, +\infty)$ avec $p^{-1} + q^{-1} = 1$ et $k \in \mathbb{N}$, considérons l'accouplement

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell_pC^k(X) \times \ell_qC_k(X) \to \mathbb{R},$$

défini par :

$$\forall \omega \in \ell_pC^k(X),\ \forall \tau = \Sigma_{\sigma \in X_k} a_\sigma \sigma \in \ell_qC_k(X) : \quad \langle \omega, \tau \rangle = \sum_{\sigma \in X_k} a_\sigma \omega(\sigma).$$

Il satisfait pour $\omega \in \ell_pC^k(X)$ et $\tau \in \ell_{q+1}C_k(X)$: $\langle \omega, \partial\tau \rangle = \langle d\omega, \tau \rangle$. Désignons respectivement les espaces $\ker \partial_k$, $\ker d_k$, $\mathrm{Im}\partial_{k+1}$, $\mathrm{Im} d_{k-1}$ par Z_k, Z^k, B_k, B^k. D'après la relation ci-dessus on a $\langle Z^k, \overline{B_k} \rangle = \langle \overline{B^k}, Z_k \rangle = 0$. Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induit un accouplement entre $\ell_p\overline{H^k}(X)$ et $\ell_q\overline{H_k}(X)$.

Montrons que l'application

$$\ell_p\overline{H^k}(X) \to \ell_q\overline{H_k}(X)^* \ , \ [\omega] \mapsto \langle \omega, \cdot \rangle,$$

est surjective. Soit $f \in \ell_q\overline{H_k}(X)^*$, elle se relève en une forme linéaire continue de Z_k puis se prolonge en une forme linéaire continue de $\ell_qC_k(X)$ grâce au théorème de Hahn-Banach. Notons la $\tilde{f}$. Puisque $\ell_pC^k(X)$ est canoniquement isomorphe au dual de $\ell_qC_k(X)$, il existe $\omega \in \ell_pC^k(X)$ avec $\tilde{f} = \langle \omega, \cdot \rangle$. Par définition de $\tilde{f}$ on a $\tilde{f}(B_k) = 0$, donc pour tout $\tau \in \ell_qC_{k+1}(X)$ on obtient :

$$\langle d\omega, \tau \rangle = \langle \omega, \partial\tau \rangle = \tilde{f}(\partial\tau) = 0.$$

Par suite $d\omega = 0$ et donc $\omega \in Z^k$, ce qui montre la surjectivité.

Etablissons à présent l'injectivité. On sait d'après ci-dessus (en échangeant les rôles de $\ell_p\overline{H^k}(X)$ et $\ell_q\overline{H_k}(X)$) que toute forme linéaire de $\ell_p\overline{H^k}(X)$ s'écrit $\langle \cdot, \tau \rangle$ pour un certain $[\tau] \in \ell_q\overline{H_k}(X)$. D'après Hahn-Banach, pour tout élément non nul $[\omega] \in \ell_p\overline{H^k}(X)$ il existe une forme linéaire de $\ell_p\overline{H^k}(X)$ qui ne s'annule pas en $[\omega]$. Ainsi il existe $[\tau] \in \ell_q\overline{H_k}(X)$ tel que $\langle \omega, \tau \rangle \neq 0$. D'où l'injectivité. $\square$

1.2 Invariance par quasi-isométrie

Lorsque X est un complexe simplicial fini, ses homologies et cohomologies ℓ_p se confondent avec les homologies et cohomologies ordinaires à coefficients réels. A l'opposé, lorsque X est un complexe simplicial géométrique uniformément contractile, ses homologies et cohomologies ℓ_p sont des invariants de quasi-isométrie. Ce résultat, dû à M. Gromov, est l'objet du théorème 1.2 ci-dessous (voir aussi [41] et [24] pour des résultats voisins). Rappelons d'abord les définitions nécessaires à son énoncé.

Un complexe géométrique X est dit *uniformément contractile* s'il est contractile et s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que toute boule $B(x,r)$ soit contractile dans $B(x,\phi(r))$.

Une application quelconque $F : X \to Y$ entre deux espaces métriques est dite *quasi-Lipschitz* s'il existe des constantes C, D positives telles que

$$\forall x, x' \in X,\ |F(x) - F(x')| \leq C|x - x'| + D.$$

C'est un *plongement uniforme* si elle est quasi-Lipschitz et s'il existe une fonction $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{t\to+\infty} \Psi(t) = +\infty$ telle que

$$\forall x, x' \in X,\ \Psi(|x - x'|) \leq |F(x) - F(x')|.$$

C'est une *quasi-isométrie* si elle est quasi-Lipschitz, et s'il existe une application quasi-Lipschitz $G : Y \to X$, telle que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient à distance bornée de l'identité.

Voici des exemples de telles situations. Un complexe simplicial géométrique et contractile qui possède un groupe d'isométries cocompact est uniformément contractile. Supposons qu'un groupe Γ agisse par isométries de manière proprement discontinue sur deux complexes simpliciaux géométriques X et Y, soit $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Si l'action de Γ sur X est cocompacte alors l'application de Γx_0 dans Y, $gx_0 \mapsto gy_0$, se prolonge en un plongement uniforme F de X dans Y. Si de plus Γ agit de manière cocompacte sur Y, alors F est une quasi-isométrie de X sur Y.

Théorème 1.2 *([31] p.219). Soit X et Y deux complexes simpliciaux géométriques uniformément contractiles, et soit $p \in [1, +\infty)$.*

a) Tout plongement uniforme $F : X \to Y$ induit canoniquement des morphismes continus $F^\bullet : \ell_p H^\bullet(Y) \to \ell_p H^\bullet(X)$.

b) Si F_i, $i = 1, 2$, sont comme en a) et sont à distance bornée, alors $F_1^\bullet = F_2^\bullet$.

c) Si $F : X \to Y$ est une quasi-isométrie alors les $F^\bullet$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques.

De plus, ces résultats persistent en cohomologie ℓ_p réduite.

Sa preuve est seulement esquissée dans [31] p.219, nous renvoyons à [8], [27] pour une preuve détaillée.

1.3 Cohomologie ℓ_p des groupes

Soit Γ un groupe agissant par isométries, de manière proprement discontinue et cocompacte, sur un complexe simplicial géométrique et uniformément contractile X. Soit $p \in [1, +\infty)$.

Définition 1.3 *On définit* l'homologie et la cohomologie ℓ_p (resp. l'homologie et la cohomologie ℓ_p réduites) de Γ *, comme étant égales à celles de X. D'après l'invariance par quasi-isométrie (Th.1.2) elles sont bien définies. On les désigne par $\ell_p H_\bullet(\Gamma), \ell_p H^\bullet(\Gamma)$ (resp. $\ell_p \overline{H_\bullet}(\Gamma), \ell_p \overline{H^\bullet}(\Gamma)$).*

On se propose à présent de relier la cohomologie ℓ_p de Γ à la théorie cohomologique classique des groupes (voir [10] pour cette dernière).

Soit $N \lhd \Gamma$ un sous-groupe distingué de Γ . Désignons par $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}\, \ell_p(\Gamma/N)$ la représentation régulière droite de Γ sur $\ell_p(\Gamma/N)$, c'est-à-dire l'application définie pour toute fonction p-sommable $f : \Gamma/N \to \mathbb{R}$ et tout $g \in \Gamma$ par:

$$\rho(g)f = f \circ R_g,$$

où R_g désigne la multiplication à droite par g dans Γ/N. La proposition suivante identifie la cohomologie de Γ à valeurs dans cette représentation, notée $H^\bullet(\Gamma, \ell_p(\Gamma/N))$, à la cohomologie ℓ_p du complexe $N\backslash X$:

Proposition 1.4 *Les espaces vectoriels $\ell_p H^\bullet(N\backslash X)$ et $H^\bullet(\Gamma, \ell_p(\Gamma/N))$ sont canoniquement isomorphes. En particulier les espaces $\ell_p H^\bullet(\Gamma)$ et $H^\bullet(\Gamma, \ell_p(\Gamma))$ sont canoniquement isomorphes.*

Preuve de la proposition : Notons Y le complexe $N\backslash X$. Quitte à remplacer X par sa première subdivision barycentrique, on peut supposer que Y est simplicial et géométrique. Puisque Γ agit par automorphismes simpliciaux de manière proprement discontinue sur le complexe simplicial contractile X ([1]), la cohomologie $H^\bullet(\Gamma, \ell_p(\Gamma/N))$ est isomorphe à celle du complexe de cochaînes $\{U^k, d_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ où :

$$U^k := \{\phi : X_k \to \ell_p(\Gamma/N) \ ; \ \forall g \in \Gamma : \phi \circ g = \rho(g) \circ \phi\}.$$

Comme N est distingué, pour tout $\phi \in U^k$, $n \in N$ et $\sigma \in X_k$, on a $\phi(n\sigma) = \phi(\sigma)$. Donc U^k s'identifie canoniquement à

$$V^k := \{\psi : Y_k \to \ell_p(\Gamma/N) \ ; \ \forall g \in \Gamma/N : \psi \circ g = \rho(g) \circ \psi\}.$$

Remarquons que pour $\psi \in V^k$ l'application $\sigma \in Y_k \mapsto \psi(\sigma)(N) \in \mathbb{R}$ est un élément de $\ell_p C^k(Y)$. En effet si $g \in \Gamma/N$ on a :

$$\psi(g\sigma)(N) = [\rho(g)\psi(\sigma)](N) = [\psi(\sigma) \circ R_g](N) = \psi(\sigma)(Ng).$$

[1] Il n'est pas nécessaire de supposer l'action libre, car l'anneau sous-jacent – ici $\mathbb{R}$ – est un corps de caractéristique nulle.

Donc en utilisant le fait que l'action de Γ/N sur Y est proprement discontinue et cocompacte, et en partitionnant Y_k en orbites, on obtient la propriété cherchée.

Inversement pour $f \in \ell_p C^k(Y)$ on définit $\psi : Y_k \to \ell_p(\Gamma/N)$ par $\psi(\sigma)(Ng) = f(g\sigma)$. Elle satisfait pour $h \in \Gamma/N$:

$$\psi(h\sigma)(Ng) = f(gh\sigma) = \psi(\sigma)(Ngh) = \psi(\sigma) \circ R_h(Ng).$$

Autrement dit $\psi \circ h = \rho(h) \circ \psi$.

Ainsi on obtient des isomorphismes $V^k \to \ell_p C^k(Y)$, qui clairement commutent aux différentielles. $\square$

1.4 Cas du degré 1

Au paragraphe précédent a été définie la cohomologie ℓ_p d'un groupe, en supposant qu'il agisse par isométries de manière proprement discontinue et cocompacte sur un complexe simplicial uniformément contractile. En degré 1, il y a moyen d'étendre canoniquement la définition à tout groupe de type fini. Cette généralisation apparaît dans [40]. Afin de la présenter considérons d'abord un complexe simplicial géométrique simplement connexe X. Ses 1-cycles sont des bords, donc sa cohomologie en degré 1 s'ecrit :

$$\ell_p H^1(X) = \{\omega \in \ell_p C^1(X) \; ; \; \omega(c) = 0 \text{ pour tout 1-cycle c}\}/d\ell_p(X).$$

En intégrant un tel ω le long de chemins contenus dans le 1-squelette de X et issus d'une origine fixée, on obtient une fonction $f : X_0 \to \mathbb{R}$ telle que $df = \omega$. Par suite on obtient un isomorphisme canonique

$$\ell_p H^1(X) \simeq \{f : X_0 \to \mathbb{R} \; ; \; df \in \ell_p(X_1)\}/\ell_p(X_0) + \mathbb{R}, \tag{1}$$

où $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des fonctions constantes sur X_0, et où la topologie est celle induite par la p-norme de df. De même on a

$$\ell_p \overline{H^1}(X) \simeq \{f : X_0 \to \mathbb{R} \; ; \; df \in \ell_p(X_1)\}/\overline{\ell_p(X_0) + \mathbb{R}}. \tag{2}$$

Observons que seul le 1-squelette de X intervient dans les espaces de droite des relations (1) et (2). Ils ont donc encore un sens si, au lieu d'être un complexe simplicial simplement connexe, X est un graphe connexe quelconque de valence bornée (l'orientation des arêtes ne joue aucun rôle dans (1) et (2)).

De plus on montre facilement que lorsque $\phi : X \to X'$ est une quasi-isométrie entre graphes connexes de valences bornées, l'application $f \mapsto f \circ \phi$ induit canoniquement un isomorphisme entre les membres de droite de (1) (resp. (2)) associés à X' et X.

Ainsi pour un groupe de type fini Γ et un graphe de Cayley G de Γ, il est naturel de définir la cohomologie ℓ_p de Γ en degré 1 (ordinaire et réduite) par

$$\ell_p H^1(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R} \; ; \; df \in \ell_p(G_1)\}/\ell_p(\Gamma) + \mathbb{R},$$

$$\ell_p\overline{H^1}(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R}\ ;\ df \in \ell_p(G_1)\}/\overline{\ell_p(\Gamma)+\mathbb{R}}.$$

Ce sont des invariants de quasi-isométrie de Γ. Le théorème suivant est issu de [31] p.247-248. Il figure également en partie dans [43] Prop.10.

Théorème 1.5 *Soit Γ un groupe infini de type fini et soit $p \in (1, +\infty)$. Il y a équivalence entre :*

(a) Γ est non moyennable,

(b) $\ell_pH^1(\Gamma) = \ell_p\overline{H^1}(\Gamma)$,

(c) $\ell_pH_0(\Gamma) = 0$,

(d) $\Delta : \ell_p(\Gamma) \to \ell_p(\Gamma)$ est inversible.

De plus l'équivalence entre (a) et (b) est vraie pour $p = 1$ également.

Dans l'énoncé (d) Δ désigne le Laplacien standard sur le graphe de Cayley de Γ associé à un système de générateurs S, c'est-à-dire l'opérateur linéaire de $\ell_p(\Gamma)$ défini par

$$\forall f \in \ell_p(\Gamma)\ ,\ \forall x \in \Gamma\ :\ (\Delta f)(x) = f(x) - \frac{1}{|S|}\sum_{y\sim x} f(y).$$

Preuve du théorème : On munit le graphe de Cayley G d'une structure de 1-complexe simplicial en choisissant une orientation pour chacune de ses arêtes. Montrons d'abord l'équivalence entre (a) et (b) pour $p \geq 1$. Les arguments présentés sont issus de [31] p.247-248. La condition (b) équivaut à la fermeture du sous-espace

$$\mathrm{Im}\left(d_0 : \ell_p(\Gamma) \to \ell_p(G_1)\right)$$

dans $\ell_p(G_1)$. Puisque Γ est un groupe infini l'application d_0 est injective, et donc grâce au théorème de Banach la condition (b) équivaut à l'inégalité de Sobolev suivante :

$$\forall f \in \ell_p(\Gamma)\ :\ \|f\|_p \leq C_p\|df\|_p, \tag{3}$$

où C_p est une constante indépendante de f. Appliquée aux fonctions caractéristiques des sous-ensembles finis de Γ, elle implique l'inégalité isopérimétrique suivante :

$$\forall A \subset \Gamma \text{ fini}\ :\ |A| \leq C|\partial A|, \tag{4}$$

où ∂A désigne le bord de A c'est-à-dire l'ensemble des arêtes de G dont l'une des extrémités se trouve dans A et l'autre en dehors. Cette dernière inégalité caractérise les groupes non moyennables (elle équivaut clairement à l'absence de suites de Fölner). Ainsi on obtient que (b) implique (a).

Réciproquement si (4) est satisfaite, alors un résultat de Cheeger et Mazzia (voir [14] Th.II.2.1) montre que (3) l'est aussi pour $p = 1$. On passe alors facilement du cas $p = 1$ au cas $p > 1$ avec l'inégalité de Hölder et l'analogue discret de la formule $d(f^p) = pf^{p-1}df$.

Montrons à présent les implications (d) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a) $\Rightarrow$ (d) pour $p > 1$. On remarque que (c) équivaut à la surjectivité de $\partial_1 : \ell_p(G_1) \to \ell_p(\Gamma)$. Observons aussi (par un calcul immédiat) que $\Delta = \frac{1}{|S|}\partial_1 \circ d_0$. L'implication (d) $\Rightarrow$ (c) en découle.

Soit q le conjugué de p. D'après (c) l'image de $\partial_1 : \ell_p(G_1) \to \ell_p(\Gamma)$ est fermée dans $\ell_p(\Gamma)$. Donc l'image de $\partial_1^* : \ell_p(\Gamma)^* \to \ell_p(G_1)^*$ est fermée dans $\ell_p(G_1)^*$ (voir [51] Th.4.14). Or $\partial_1^* = d_0$ et $\ell_p^* = \ell_q$, donc (b) est satisfaite pour l'exposant q. Puisque (b) équivaut à (a) on obtient l'implication (c) $\Rightarrow$ (a).

Soit M l'opérateur de $\ell_p(\Gamma)$ défini par $(Mf)(x) = \frac{1}{|S|}\sum_{y\sim x} f(y)$. Puisqu'il est un opérateur de moyenne on a $\|M\|_{\ell_\infty \to \ell_\infty} \leq 1$. De plus lorsque Γ est non moyennable le théorème de Kesten [35] montre que $\|M\|_{\ell_2\to\ell_2} < 1$. Appliquons le théorème d'interpolation de Riesz entre 2 et $+\infty$ (voir [12] Th.1.4.3), pour tout $p \in [2, +\infty)$ on obtient : $\|M\|_{\ell_p\to\ell_p} < 1$. Par suite $\Delta = I - M$ est inversible sur $\ell_p(\Gamma)$ pour $p \in [2, +\infty)$. Puisqu'il est autoadjoint il est également inversible sur $\ell_q(\Gamma)$ pour $q \in (1, 2]$. Ainsi (a) $\Rightarrow$ (d) en découle. $\square$

Le résultat suivant, de représentation harmonique, m'a été signalé par P. Pansu à la fin du siècle dernier.

Corollaire 1.6 *Si Γ est non moyennable alors pour $p > 1$:*

$$\ell_pH^1(\Gamma) = \{f : \Gamma \to \mathbb{R}\ ;\ \Delta f = 0,\ df \in \ell_p(G_1)\}/\mathbb{R}.$$

Preuve : Soit $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ avec $[f] \in \ell_pH^1(\Gamma)$. On cherche une fonction h harmonique (c-à-d qui satisfait $\Delta f = 0$) telle que $f - h \in \ell_p(\Gamma) + \mathbb{R}$. Puisque $d_0 f \in \ell_p(\Gamma)$ on a $\Delta f = \frac{1}{|S|}(\partial_1 \circ d_0)f \in \ell_p(\Gamma)$. D'après le théorème précédent Δ est inversible sur $\ell_p(\Gamma)$, donc il existe une fonction $u \in \ell_p(\Gamma)$ telle que $\Delta u = \Delta f$. Alors la fonction $h = f - u$ convient.

Reste à montrer l'unicité du représentant harmonique. Si $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ est une fonction harmonique telle que $[h] = 0$ dans $\ell_pH^1(\Gamma)$, alors elle appartient à $\ell_p(\Gamma) + \mathbb{R}$. En particulier elle est asymptote à une fonction constante lorsque $|g| \to +\infty$, $g \in \Gamma$. Alors le principe du maximum entraîne qu'elle est constante. $\square$

Corollaire 1.7 *Supposons Γ non moyennable, alors $\ell_pH^1(\Gamma) \subset \ell_rH^1(\Gamma)$ pour $1 < p \leq r$.*

Preuve : Puisque $\ell_p(G_1) \subset \ell_r(G_1)$ le résultat découle du corollaire précédent. $\square$

Corollaire 1.8 *Supposons Γ non moyennable et $p > 1$. Soit $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ avec $df \in \ell_p(G_1)$. Alors $[f] = 0$ dans $\ell_pH^1(\Gamma)$ si et seulement si f est asymptote à une fonction constante (lorsque $|g| \to +\infty$, $g \in \Gamma$).*

Preuve : Si $[f]=0$ dans $\ell_pH^1(\Gamma)$ alors f appartient à $\ell_p(\Gamma)+\mathbb{R}$, donc elle est asymptote à une fonction constante.

Réciproquement si f est asymptote à une fonction constante alors son représentant harmonique (voir Cor.1.6) également. Par le principe du maximum ce dernier est constant, donc f appartient à $\ell_p(\Gamma)+\mathbb{R}$. □

1.5 Quelques exemples

On présente des exemples et résultats élémentaires d'annulation et de non annulation de cohomologie.

L'énoncé suivant découle du corollaire de [31] p.227. Pour les groupes de Lie, un énoncé similaire se trouve dans [44] Prop.15.

Proposition 1.9 *([31] p.227). Supposons que Γ agisse par isométries sur un complexe géométrique contactile de manière proprement discontinue et cocompacte. Si le centre de Γ est infini alors $\ell_p\overline{H^k}(\Gamma)=0$ pour tout $p\in(1,+\infty)$ et tout $k\in\mathbb{N}$.*

Preuve : Soit X le complexe géométrique de l'énoncé. Soit z un élément du centre de Γ, alors l'application $L_z:\Gamma\to\Gamma$ définie par $L_z(g)=zg$ est une isométrie à distance bornée de l'identité. Elle induit une quasi-isométrie de X à distance bornée de l'identité. Donc d'après le théorème 1.2, L_z^* est égale à l'identité en cohomologie. Soit $[\omega]\in\ell_p\overline{H^k}(X)$. Supposons par l'absurde que $[\omega]$ soit non nulle, soit q est le conjugué de p. La proposition 1.1 et sa preuve montrent qu'il existe $[\tau]\in\ell_q\overline{H_k}(X)$ avec $\langle\omega,\tau\rangle=1$. Puisque l'accouplement $\langle\omega,\tau\rangle$ ne dépend que des classes de ω et de τ, on a encore $\langle L_z^*(\omega),\tau\rangle=1$. Par ailleurs, lorsque $|z|\to+\infty$ les supports de $L_z^*(\omega)$ et de τ s'éloignent l'un de l'autre, donc

$$\lim_{|z|\to+\infty}\langle L_z^*(\omega),\tau\rangle=0.$$

D'où une contradiction. □

Puisque tout groupe nilpotent de type fini possède un sous-groupe d'indice fini de centre infini ([2]) on obtient :

Corollaire 1.10 *Soit Γ un groupe nilpotent de type fini, alors $\ell_p\overline{H^k}(\Gamma)=0$ pour tout $p\in(1,+\infty)$ et tout $k\in\mathbb{N}$.* □

A l'opposé la 1-cohomologie des groupes libres non abéliens est non nulle, et plus généralement :

Proposition 1.11 *Soit A et B deux groupes de type fini avec $|A|\geq 2$ et $|B|\geq 3$. Alors $\Gamma=A\star B$ satisfait $\ell_pH^1(\Gamma)\neq 0$ pour tout $p\geq 1$.*

[2]Tout groupe nilpotent de type fini possède un sous-groupe d'indice fini sans torsion (voir [49] Lemma 4.6), de plus le centre d'un groupe nilpotent sans torsion est infini.

Preuve : Observons que Γ est quasi-isométrique au graphe G défini comme suit. On considère les 2-complexes de présentation de A et de B, on joint le sommet du premier au sommet du second par une arête notée a, le graphe G est le 1-squelette du revêtement universel du 2-complexe ainsi obtenu.

Si $\tilde{a}$ relève l'arête (ouverte) a, le graphe $G \setminus \tilde{a}$ possède deux composantes connexes non bornées. Soit $f : G_0 \to \{0,1\}$ la fonction qui vaut 0 sur les sommets de l'une, et 1 sur ceux de l'autre. Sa différentielle est supportée par $\tilde{a}$, donc $df \in \ell_p(G_1)$. De plus $[f] \neq 0$ dans $\ell_p H^1(\Gamma)$ car f n'est pas asymptote à une fonction constante. $\square$

Le résultat suivant est une sorte d'extension à la cohomologie ℓ_p d'un théorème de W. Lueck [37] dont l'énoncé est rappelé plus bas. Il est tiré de [7].

Proposition 1.12 *([7] Prop.2). Soit $N < H < \Gamma$ une chaîne de groupes, avec H et Γ de type fini, et avec N infini et distingué dans Γ. On suppose que pour un certain $p \in [1, +\infty)$ on a $\ell_p H^1(H) = 0$, alors $\ell_p H^1(\Gamma) = 0$.*

Preuve : On reprend les idées de la preuve de [7] Prop.2, en les adaptant à l'approche développée dans cette note. Soit G un graphe de Cayley de Γ et soit $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ avec $df \in \ell_p(G_1)$. Considérons la restriction de f à une classe gH ($g \in \Gamma$), et notons-la $f_{|gH}$. Par hypothèse il existe une fonction $u_{gH} \in \ell_p(gH)$ telle que $f_{|gH} - u_{gH}$ soit constante sur gH. Puisque les classes gH forment une partition de Γ on obtient une fonction u de Γ telle que $f - u$ soit constante sur chaque classe gH.

Montrons que $u \in \ell_p(\Gamma)$. L'hypothèse d'annulation de cohomologie et le Th.1.5 impliquent que H est non moyennable. La première partie de la preuve de ce même théorème montre l'existence d'une constante $C \geq 1$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \ell_p(H)$ on ait :

$$\|\varphi\|_p \leq C \|d\varphi\|_p.$$

En ayant pris soin de choisir le système de générateurs S de Γ contenant un système de générateurs de H, on a alors :

$$\|u\|_p^p \leq C^p \sum_{gH \in \Gamma/H} \|d(u_{|gH})\|_p^p = C^p \sum_{gH \in \Gamma/H} \|d(f_{|gH})\|_p^p \leq C^p \|df\|_p^p.$$

Ainsi u appartient à $\ell_p(\Gamma)$ et donc $[f] = [f - u]$.

On montre à présent que $f - u$ est une fonction constante. Pour $s \in S$ et $g \in \Gamma$, considérons les classes gH et gsH. Puisque N est distingué dans Γ, pour tout $n \in N$ l'élément gns appartient à gsN. Donc $gn \in gH$ est lié par une arête de G à un élément de gsH. Comme N est un groupe infini, le graphe G contient une infinité d'arêtes dont une extrémité appartient à gH et l'autre à gsH. Puisque $f - u$ est constante sur gH et sur gsH, sa différentielle en ces arêtes est constante égale à la différence des valeurs de $f - u$ sur gH et gsH.

Comme $d(f-u) \in \ell_p(G_1)$ les valeurs de $f-u$ sur gH et sur gsH sont les mêmes. Les éléments $g \in \Gamma$ et $s \in S$ étant arbitraires, on obtient que $f-u$ est constante sur Γ. $\square$

La proposition précédente permet d'obtenir une preuve simple du théorème suivant de W. Lueck dans le cas particulier où N est non moyennable. Le théorème résout une conjecture de M. Gromov énoncée dans [31] p.235.

Théorème 1.13 *([37] Th.4.1). Soit Γ un groupe de type fini. On suppose qu'il possède un sous-groupe distingué N infini de type fini, et que le quotient Γ/N contienne un élément d'ordre infini. Alors $\ell_2\overline{H^1}(\Gamma) = 0$.*

Réduction du théorème 1.13 à la proposition 1.12 : Supposons N non moyennable (dans le cas moyennable le théorème découle d'un théorème antérieur de Cheeger-Gromov, voir [15] Th.0.3). Soit $\mathbb{Z}$ un sous-groupe cyclique infini de Γ/N . Désignons par π l'application quotient de Γ sur Γ/H, et posons $H = \pi^{-1}(\mathbb{Z})$. En utilisant les propriétés des nombres de Betti ℓ_2 et le fait que H est un produit semi-direct de N avec $\mathbb{Z}$, W. Lueck obtient par un argument élégant que $\ell_2\overline{H^1}(H) = 0$ (voir [37] preuve du Th.2.1).

Puisque N est non moyennable, H l'est également, et donc avec le théorème 1.5 on obtient que $\ell_2 H^1(H) = 0$. La proposition 1.12 conclut. $\square$

1.6 Compléments et questions

1) Pour simplifier l'exposé, nous nous sommes restreint à la cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux géométriques et à celle des groupes qui leurs sont attachés (à l'exception toutefois du degré 1, voir la section 1.4). Il y a plusieurs façons de définir la cohomologie ℓ_p d'un groupe de type fini quelconque en tout degré. Cheeger-Gromov [15] définissent la cohomologie ℓ_2 singulière de n'importe quel groupe dénombrable. Dans [41], P. Pansu introduit la cohomologie L_p asymtotique d'un espace métrique mesuré quelconque. G. Elek [24] définit la cohomologie ℓ_p grossière de tout groupe de type fini. Toutes ces cohomologies coïncident pour les groupes qui possèdent un espace $K(\pi, 1)$ fini (voir [24]).

Une autre façon naturelle de procéder est d'utiliser la proposition 1.4, et de définir la cohomologie ℓ_p d'un groupe Γ comme la cohomologie de Γ à valeurs dans la représentation régulière droite de Γ sur $\ell_p(\Gamma)$. Notons que cette définition ne nécessite pas que Γ soit finiment engendré. De plus elle suggère d'étudier la cohomologie de Γ pour d'autres représentations L^p (par exemple celles qui proviennent d'actions de Γ préservant une mesure).

2) Rappelons que deux groupes dénombrables Γ et Φ sont dits mesurablement équivalents, s'il existe un espace mesuré standard (X, μ), et des actions mesurables libres de Γ et Φ sur X, qui commutent, qui présevent la mesure μ, et qui possèdent chacunes un domaine fondamental de mesure finie non nulle.

D. Gaboriau [25] a démontré que les nombres de Betti ℓ_2 de deux groupes mesurablement équivalents sont proportionnels, avec pour facteur de proportionnalité le rapport des mesures des domaines fondamentaux. En particulier on a en tout degré :

$$\ell_2\overline{H^k}(\Gamma) = 0 \iff \ell_2\overline{H^k}(\Phi) = 0.$$

Une question naturelle est de déterminer si ce dernier phénomème subsiste en cohomologie ℓ_p pour $p \neq 2$.

Avec Damien Gaboriau nous avons exhibé un contre-exemple pour $p = 1$: soit Γ le groupe fondamental d'une surface fermée de genre au moins 2, et soit Φ le groupe libre à 2 générateurs. Ils sont mesurablement équivalents car ce sont des réseaux de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Mais $\ell_1\overline{H^1}(\Gamma) = 0$ (voir [8] Th.0.1 et Th.4.2), alors que $\ell_1\overline{H^1}(\Phi) \neq 0$ d'après la proposition 1.11.

3) Pour tout groupe Γ moyennable infini, Cheeger-Gromov [15] ont montré que $\ell_2\overline{H^\bullet}(\Gamma) = 0$. Dans [31] p.226, M. Gromov remarque que ce résultat devrait subsister en cohomologie ℓ_p pour $p \in (1, +\infty)$.

A part les groupes nilpotents, dont traite le corollaire 1.10, il y a une autre classe de groupes moyennables pour laquelle un résultat d'annulation de cohomologie ℓ_p est connu. Dans [53] R. Tessera démontre l'annulation de la 1-cohomologie ℓ_p réduite des groupes moyennables qui possèdent une suite de Fölner "controlée", c'est-à-dire une suite $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de Γ pour laquelle il existe un système fini de générateurs S de Γ avec $F_n \subset S^n$ et

$$\max_{s\in S} \frac{|sF_n \triangle F_n|}{|F_n|} = O(1/n).$$

La classe des groupes possédant cette propriété comprend les groupes polycycliques, les Baumslag-Solitar, les groupes d'allumeurs de réverbères, et plus généralement les réseaux des groupes résolubles algébriques sur un corps local [54].

4) D. Gaboriau [25] a amélioré le théorème 1.13 en affaiblissant l'hypothèse Γ/N possède un sous-groupe cyclique infini, par l'hypothèse Γ/N est infini.

Le théorème 1.13 n'a pas d'analogue pour $p > 2$. En effet, soit Γ le groupe fondamental d'une 3-variété fermée M, à courbures sectionnelles constantes égales à -1, et qui fibre sur le cercle. Sa fibre est une surface fermée de genre au moins 2 dont le groupe fondamemental N est normal de type fini dans Γ. Le quotient Γ/N est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Par invariance quasi-isométrique la cohomologie ℓ_p de Γ est la même que celle du revêtement universel de M, c'est-à-dire $\mathbb{H}^3$ l'espace hyperbolique standard. D'après les calculs de cohomologie ℓ_p effectués par P. Pansu [40] on a :

$$\ell_p H^1(\Gamma) = 0 \iff p \in [1, 2].$$

5) La cohomologie ℓ_p des espaces homogènes est étudiée dans [42, 43, 44, 45, 53]. Toutefois le cas des espaces symétriques de rang supérieur a été peu considéré jusqu'à présent. Il est conjecturé dans [31] que la cohomologie ℓ_p des espaces symétriques, sans facteur compact ni euclidien, de rang $k \geq 2$, est nulle en degrés strictement inférieurs à k. Des éléments de preuve se trouvent dans [31] et

[29]. Signalons aussi l'article [22] qui traite de la cohomologie ℓ_p des immeubles.

6) La cohomologie ℓ_p en degré 1 des groupes (Gromov) hyperboliques est étudiée dans [40, 45, 31, 23, 50, 8, 4, 5, 6]. Quelques éléments sont repris aux paragraphes 2.2, 2.4.1, 2.4.2 et 2.4.4 du prochain chapitre.

2 Actions isométriques propres sur les espaces L_p

Dans ce chapitre nous démontrons le théorème 0.1 de l'introduction. Sa démonstration sera l'occasion de discuter des liens entre la 1-cohomologie ℓ_p d'un groupe hyperbolique et son bord à l'infini. Au paragraphe 2.1 nous rappelons brièvement les quelques propriétés du bord d'un groupe hyperboliques qui nous seront utiles. Au paragraphe 2.2 est présenté un procédé de construction de 1-classes de cohomologie ℓ_p en utilisant le bord. Cette construction est dûe à Elek [23]. Le théorème 0.1 est démontré au paragraphe 2.3. On termine le chapitre par un survol de quelques résultats complémentaires et par des questions.

Afin de donner l'idée de la preuve du théorème, rappelons que toute action affine de Γ sur un espace vectoriel V s'écrit sous la forme

$$\forall g \in \Gamma, \forall v \in V : \; g \cdot v = \pi(g)v + c(g),$$

où $\pi : \Gamma \to \mathrm{GL}(V)$ est une représentation linéaire, et où $c : \Gamma \to V$ est un cocycle c'est-à-dire qu'il satisfait

$$\forall g, g' \in \Gamma : \; c(gg') = c(g) + \pi(g)c(g').$$

L'action possède un point fixe global si et seulement si le cocycle c est un cobord c'est-à-dire s'il s'écrit $c(g) = \pi(g)v - v$ pour un certain $v \in V$. L'espace des cocycles modulo les cobords est isomorphe à la 1-cohomologie de Γ à valeurs dans la représentation π (voir [10] p.19). Lorsque V est un espace vectoriel normé et l'action isométrique, elle est propre si et seulement si $\|c(g)\| \to \infty$ quand $|g| \to \infty$.

L'idée de la démonstration du théorème consiste à se souvenir que la 1-cohomologie ℓ_p de Γ est isomorphe à la 1-cohomologie à valeurs dans la représentation régulière droite de Γ sur $\ell_p(\Gamma)$ notée ρ (voir Prop.1.4). Elle décrit donc toutes les actions isométriques de Γ sur $\ell_p(\Gamma)$ dont la partie linéaire est ρ.

2.1 Bord d'un groupe hyperbolique, dimension conforme

Soit Γ un groupe hyperbolique non élémentaire et soit $\partial\Gamma$ son bord à l'infini (voir par exemple [30, 28, 21, 9, 2] pour ces notions standards). Soit G le graphe de Cayley de Γ associé à un système de générateurs S. Une métrique d sur $\partial\Gamma$ est dite *visuelle (relativement à G)* s'il existe des constantes $a > 1$ et $C \geq 1$ telles que pour tout $\xi, \eta \in \partial\Gamma$ on ait :

$$C^{-1}a^{-L} \leq d(\xi, \eta) \leq Ca^{-L},$$

où L est la distance dans G entre 1 (l'élément neutre de Γ) et la géodésique $(\xi\eta) \subset G$. Pour a suffisamment proche de 1 une telle métrique existe d'après un théorème de Gromov. De plus en vertu d'un théorème de M. Coornaert [20] elle est *Alhfors régulière*, en d'autres termes il existe des constantes $C \geq 1$ et $Q > 0$ et une mesure μ sur $\partial\Gamma$, telles que pour toute boule $B(r) \subset (\partial\Gamma, d)$ de rayon $r < \mathrm{diam}(\partial\Gamma)$ on ait

$$C^{-1}r^{Q} \leq \mu(B(r)) \leq Cr^{Q}.$$

Cette relation entraine que Q est égale à la dimension de Hausdorff de $(\partial\Gamma, d)$ et que μ est équivalente à la mesure de Haudorff de $(\partial\Gamma, d)$ (voir par exemple [33] §8).

Les métriques visuelles font partie d'une famille de métriques appelée la *jauge conforme Ahlfors régulière* de $\partial\Gamma$, et notée $\mathcal{J}(\partial\Gamma)$. Afin de la définir rappellons que l'*ombre* d'une boule $B(x, R) \subset G$ est le sous-ensemble suivant de $\partial\Gamma$

$$O(x, R) = \{\xi \in \partial\Gamma \ ; \ [1, \xi) \cap B(x, R) \neq \emptyset\}.$$

La jauge $\mathcal{J}(\partial\Gamma)$ est constituée des métriques Ahlfors régulières sur $\partial\Gamma$ dont les boules ressemblent aux ombres. Formellement :

Définition 2.1 *Une métrique d appartient à $\mathcal{J}(\partial\Gamma)$ si elle est Ahlfors régulière et si elle satisfait aux deux conditions suivantes pour tout $R > 0$ fixé assez grand:*

(i) Il existe une fonction croissante $\varphi : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ telle que pour toute paire de boules $B_1 \subset B_2$ de rayons r_1, r_2, on puisse trouver deux ombres $O(x_1, R)$ et $O(x_2, R)$ avec $O(x_1, R) \subset B_1 \subset B_2 \subset O(x_2, R)$ et $|x_1 - x_2| \leq \varphi(\frac{r_2}{r_1})$;

(ii) Il existe une fonction croissante $\psi : [0, +\infty) \to [1, +\infty)$ telle que pour toute paire d'ombres $O(x_1, R) \subset O(x_2, R)$ on puisse trouver des boules B_1, B_2 de rayons r_1, r_2, avec $B_1 \subset O(x_1, R) \subset O(x_2, R) \subset B_2$ et $\frac{r_2}{r_1} \leq \psi(|x_1 - x_2|)$.

La jauge est un invariant complet de quasi-isométrie de Γ. Plus précisément, toute quasi-isométrie $F : \Gamma \to \Phi$ entre deux groupes hyperboliques se prolonge canoniquement en un homéomorphisme $\partial F : \partial\Gamma \to \partial\Phi$, et l'application qui à une métrique d sur $\partial\Phi$ associe la métrique $d(\partial F(\cdot), \partial F(\cdot))$ sur $\partial\Gamma$ est une bijection de $\mathcal{J}(\partial\Phi)$ sur $\mathcal{J}(\partial\Gamma)$. Réciproquement, tout homéomorphisme de $\partial\Gamma$ sur $\partial\Phi$ qui possède cette dernière propriété est l'extension aux bords d'une quasi-isométrie de Γ sur Φ. (Voir [30, 47, 2] pour ces derniers résultats.)

Définition 2.2 *La dimension conforme (Ahlfors régulière) de $\partial\Gamma$ est*

$$\mathrm{Confdim}(\partial\Gamma) = \inf\{\mathrm{Hdim}(\partial\Gamma, d) \ ; \ d \in \mathcal{J}(\partial\Gamma)\},$$

où Hdim *désigne la dimension de Hausdorff.*

C'est un invariant numérique de quasi-isométrie de Γ qui a été introduit par P. Pansu (voir [38] pour plus de détails sur la dimension conforme, voir aussi la remarque 2 à la fin du chapitre).

2.2 Une construction de G. Elek

On imite une construction de G. Elek [23] qui permet d'exhiber de nombreux éléments du $\ell_p H^1(\Gamma)$. Soit $d \in \mathcal{J}(\partial\Gamma)$ et soit $u : (\partial\Gamma, d) \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitz. On lui associe une fonction $f_u : \Gamma \to \mathbb{R}$ comme suit. Soit $R > 0$ fixé assez grand. Pour tout $g \in \Gamma$ on choisit $\xi_g \in O(g, R)$ et on pose

$$f_u(g) = u(\xi_g).$$

La proposition suivante est implicite dans [23]. La définition de la 1-cohomologie ℓ_p utilisée dans l'énoncé est celle du paragraphe 1.4.

Proposition 2.3 *Pour $p >$ Hdim$(\partial\Gamma, d)$ on a $df_u \in \ell_p(G_1)$. De plus si u est non constante alors $[f_u] \neq 0$ dans $\ell_p H^1(\Gamma)$.*

Preuve : Puisque les boules de d sont semblables aux ombres, notons $r(g)$ le rayon minimal d'une boule de $(\partial\Gamma, d)$ qui contient $O(g, 2R)$. Soit $[g_- g_+]$ une arête de G. Les ombres $O(g_-, 2R)$ et $O(g_+, 2R)$ s'intersectent, donc ξ_{g_-} et ξ_{g_+} sont à distance inférieure ou égale à $2(r(g_-) + r(g_+))$. Si λ désigne la constante de Lipschitz de u on obtient :

$$|df_u([g_- g_+])| \leq 2\lambda(r(g_-) + r(g_+)).$$

Par suite il existe une constante $C_1 \geq 1$ telle que

$$\|df_u\|_p^p \leq C_1 \sum_{g \in \Gamma} r(g)^p \leq C_1 \sum_{n \in \mathbb{N}} \big(\sup_{|g|=n} r(g)^{p-Q} \big) \sum_{|g|=n} r(g)^Q. \tag{5}$$

La famille d'ombres $\{O(g, 2R) \ ; \ |g| = n\}$ est un recouvrement uniformément localement fini de $\partial\Gamma$. De plus d est Ahlfors régulière par hypothèse. En notant Q sa dimension de Hausdorff et μ sa mesure de Haudorff, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{|g|=n} r(g)^Q \leq C_2 \sum_{|g|=n} \mu(O(g, 2R)) \leq C_3 \mu(\partial\Gamma), \tag{6}$$

où C_2, C_3 sont des constantes indépendantes de n. Deux métriques quelconques de $\mathcal{J}(\partial\Gamma)$ sont Hölder équivalentes (voir [33] Cor. 11.5). Donc d est Hölder équivalente à une métrique visuelle. Ainsi il existe $b > 1$ tel que l'on ait à une constante multiplicative près : $r(g) \leq b^{-|g|}$. En combinaison avec les inégalités (5), (6) on obtient que $\|df_u\|_p$ est finie. La fonction f_u étant asymptote à u, on a $[f_u] \neq 0$ lorsque u est non constante. $\square$

2.3 Preuve du théorème 0.1

Soit $p > \mathrm{Confdim}(\partial\Gamma)$ et soit $d \in \mathcal{J}(\partial\Gamma)$ avec $\mathrm{Hdim}(\partial\Gamma, d) < p$. Considérons une fonction Lipschitz $u : \partial\Gamma \to \mathbb{R}$ et la fonction associée $f_u : \Gamma \to \mathbb{R}$ définie au paragraphe précédent. Notons ρ la représentation régulière droite de Γ sur $\ell_p(\Gamma)$, et définissons un cocycle $c : \Gamma \to \ell_p(\Gamma)$ par "$c(g) = \rho(g)f_u - f_u$" (cette écriture est abusive puisque $f_u \notin \ell_p(\Gamma)$). Autrement dit pour $g, \gamma \in \Gamma$: $c(g)(\gamma) = f_u(\gamma g) - f_u(\gamma)$.

Vérifions que $c(g) \in \ell_p(\Gamma)$. Soit $1 = g_0, g_1, ..., g_n = g$ les sommets successifs d'un rayon géodésique de G reliant 1 à g. On a

$$\|c(g)\|_p^p = \sum_{\gamma\in\Gamma} |f_u(\gamma g) - f_u(\gamma)|^p,$$

avec

$$|f_u(\gamma g) - f_u(\gamma)| \leq \sum_{i=1}^{|g|} |f_u(\gamma g_i) - f_u(\gamma g_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{|g|} |df_u([\gamma g_i, \gamma g_{i-1}])|.$$

Puisque Γ agit librement sur l'ensemble des arêtes orientées de G on obtient avec Hölder que

$$\|c(g)\|_p \leq |g| \cdot \|df_u\|_p.$$

Donc d'après la proposition précédente $c(g) \in \ell_p(\Gamma)$.

Etudions à présent la limite de $\|c(g)\|_p$ lorsque $|g| \to +\infty$. En notant à nouveau $1 = g_0, g_1, ..., g_n = g$ les sommets successifs d'un segment géodésique reliant 1 à g, on a

$$\begin{aligned}\|c(g)\|_p^p &\geq \sum_{k=1}^{|g|} |c(g)(g_k^{-1})|^p = \sum_{k=1}^{|g|} |f_u(g_k^{-1}g) - f_u(g_k^{-1})|^p \\ &= \sum_{k=1}^{|g|} |u(\xi_{g_k^{-1}g}) - u(\xi_{g_k^{-1}})|^p.\end{aligned}$$

Le segment géodésique $[g_k^{-1}, g_k^{-1}g]$ contient 1. Donc l'hyperbolicité de Γ entraîne l'existence de constantes $C \geq 0$, $k_0 \in \mathbb{N}$ indépendantes de g, telles que pour $k \in \{k_0, ..., |g| - k_0\}$ la géodésique $(\xi_{g_k^{-1}}\xi_{g_k^{-1}g})$ passe dans la boule $B(1, C)$. Convenons d'appeler deux points $\xi, \eta \in \partial\Gamma$ *C-diamétralement opposés* si $(\xi\eta)$ passe dans $B(1, C)$.

Si la fonction u est telle que pour toute paire de points C-diamétralement opposés on ait $|u(\xi) - u(\eta)| \geq 1$, alors on obtient

$$\|c(g)\|_p \geq (|g| - 2k_0)^{1/p},$$

et donc $\|c(g)\|_p \to +\infty$ lorsque $|g| \to +\infty$.

Si une telle fonction n'existe pas ([3]), on peut tout de même trouver une collection finie $u_1, ..., u_n$ de fonctions Lipschitz de $(\partial\Gamma, d)$, telle que pour toute paire de points C-diamétralement opposés $\xi, \eta \in \partial\Gamma$ il existe $i \in \{1, ..., n\}$ avec $|u_i(\xi) - u_i(\eta)| \geq 1$. On considère alors la représentation diagonale de Γ sur $\ell_p(\Gamma)^n = \ell_p(\sqcup_1^n \Gamma)$ et le cocycle $c = (c_1, ..., c_n)$, où c_i est associé à la fonction u_i comme précédamment. A nouveau $\|c(g)\|_p \geq (|g| - 2k_0)^{1/p}$, donc l'action induite de Γ sur $\ell_p(\sqcup_1^n \Gamma)$ est propre. □

2.4 Compléments et questions

1) L'idée de relier la cohomologie ℓ_p au bord à l'infini (idée sur laquelle repose la construction d'Elek décrite en 2.2) apparaît dans Pansu [40] et dans Gromov [31].

Dans [40] P. Pansu montre que la 1-cohomologie ℓ_p des espaces symétriques de rang 1 s'identifie à des espaces de Besov au bord. Ce phénomème se généralise aux espaces hyperboliques de Gromov, voir [8]. Pour les espaces homogènes à courbure négative, il se généralise en partie à la cohomologie de degré supérieur [42, 44, 45].

Dans l'esprit de [31] p.258, M. Puls [48] démontre que si Γ est un groupe de type fini, tel que pour un certain $a > 1$ le bord de Floyd de Γ associé à la fonction $\varphi : g \in \Gamma \mapsto a^{-|g|}$ possède au moins deux points distincts, alors $\ell_p\overline{H^1}(\Gamma) \neq 0$ pour les $p \geq 1$ tels que $\varphi \in \ell_p(\Gamma)$. Ce résultat, combiné aux travaux de V. Gerasimov [26] sur le bord de Floyd, implique la non-annulation de la 1-cohomologie ℓ_p réduite des groupes relativement hyperboliques (pour p assez grand). A ma connaissance c'est une question ouverte (due à Cornélia Drutu) de déterminer quels sont les groupes relativement hyperboliques qui possèdent une action isométrique propre sur un espace L_p.

Afin d'élargir la classe des groupes connus dont la 1-cohomologie ℓ_p réduite est non nulle, il serait intéressant de disposer de nouvelles constructions de classes de cohomologie ℓ_p. Dans [6] on décrit un procédé de construction basé sur la cohomologie relative et l'excision. Elle s'applique en particulier à certains groupes de Coxeter.

2) P. Pansu montre que, contrairement aux groupes discrets, la non-annulation de la 1-cohomologie ℓ_p réduite (p assez grand) caractérise l'hyperbolicité parmi les groupes de Lie [43]. C'est encore le cas pour les groupes algébriques sur les corps locaux de caractéristique nulle, voir [18].

3) Il y a une autre classe de groupes, introduite par Haglund-Paulin [32] et généralisée par Cherix-Martin-Valette [17], dont les actions isométriques propres sur les espaces L_p ont été abondamment étudiées, il s'agit des groupes agissant proprement sur les espaces à murs mesurés. Cette classe contient en particulier les groupes de Coxeter, les groupes moyennables, les réseaux de $\mathrm{SO}(n, 1)$ et de $\mathrm{SU}(n, 1)$. Il découle de [17, 13] que les propriétés suivantes sont équivalentes :

[3]Sur la sphère il n'existe pas de fonction u continue telle que $|u(x) - u(-x)| \geq 1$, car sinon la fonction $h(x) = u(x) - u(-x)$ serait impaire et partout non nulle.

- Γ est un groupe agissant proprement sur un espace à murs mesurés,
- Γ est a-T-menable (voir l'introduction pour la définition),
- Il existe $p \in [1, 2]$ telle que Γ admette une action isométrique propre sur un espace L_p,
- Pour tout $p \in [1, +\infty)$, Γ admet une action isométrique propre sur un espace L_p.

Les premiers exemples de groupes hyperboliques qui n'appartiennent pas à la classe ci-dessus sont les réseaux cocompacts de $\mathrm{Sp}(n, 1)$. Pour ceux-ci il est communément conjecturé que la borne du théorème 0.1 est optimale, c'est-à-dire qu'ils ne possèdent pas d'actions isométriques propres (ni même sans point fixe) sur L_p pour p inférieur ou égal à la dimension conforme.

4) Les groupes hyperboliques dont on connait précisement la dimension conforme de bord sont les réseaux cocompacts des groupes de Lie simples de rang un [46] et les réseaux des immeubles fuchsiens [3]. Pour les premiers la dimension conforme est égale à celle du bord de l'espace symétrique sous-jacent (grâce à l'invariance par quasi-isométrie), de plus on a :

$$\mathrm{Confdim}(\partial \mathbb{H}^n_K) = nk + k - 2, \text{ où } K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{C}a, \text{ et où } k = \dim_{\mathbb{R}} K.$$

Il est intéressant de noter que le théorème 0.1 combiné au Th.3.8 de [6] permet d'envisager que la dimension conforme soit caractérisée par la propriété suivante: $p > \mathrm{Confdim}(\partial\Gamma)$ *si et seulement si* Γ *possède une action isométrique propre sur* ℓ_p*, dont la partie linéaire est un multiple de la représentation régulière droite.*

5) Rappelons que tous les groupes dénombrables infinis Γ possèdent une action isométrique propre sur ℓ_∞. En effet étant donné $\gamma_0 \in \Gamma$ l'application $c : \Gamma \to \ell_\infty(\Gamma)$ définie par

$$\forall g, \gamma \in \Gamma \;:\; c(g)(\gamma) = |\gamma g - \gamma_0| - |\gamma - \gamma_0|,$$

est un cocycle propre pour la représentation régulière droite de Γ sur $\ell_\infty(\Gamma)$.

Brown et Guentner [11] ont montré que tous les groupes infinis dénombrables possèdent une action isométrique propre sur un Banach strictement convexe. A l'opposé V. Lafforgue [36] a montré que les actions isométriques des réseaux de $\mathrm{SL}(3, \mathbb{Q}_p)$ sur les Banach uniformément convexes possèdent toutes un point fixe. (Un Banach V est *strictement convexe* si pour tout $x, y \in V, x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1$ on a $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$. Il est *uniformément convexe* si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $\|x\| = \|y\| = 1$ et $\|x - y\| \geq \epsilon$ entraînent que $\|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta$.)

Dans le même esprit, Bader-Furman-Gelander-Monod [1] ont établi que les actions isométriques des réseaux de rang supérieur sur les espaces L_p ($p \in (1, +\infty)$) ont toutes un point fixe. Ils conjecturent que cette propriété persiste pour les Banach uniformément convexes.

6) Soit π une représentation linéaire isométrique d'un groupe Γ sur un espace de Banach V. On dit qu'elle est c_0 si pour tout $f \in V^*$ et tout $v \in V$ on a $f(\pi(g)v) \to 0$ lorsque $|g| \to \infty$. Par exemple si Γ est infini alors la représentation régulière droite de Γ sur $\ell_p(\Gamma)$ est c_0.

De Cornulier, Tessera et Valette [19] ont introduit la notion suivante : un groupe Γ a la propriété (BP_0) si toute Γ-action isométrique sur un Banach, de partie linéaire c_0, est ou bien propre ou bien possède une orbite bornée. Ils démontrent dans [19] que les groupes résolubles, les groupes de Lie connexes, les groupes à centre infini ont cette propriété (Y. Shalom [52] l'avait auparavant établie pour les actions de $\mathrm{SO}(n,1)$ et $\mathrm{SU}(n,1)$ sur les espaces de Hilbert).

Références

[1] U. Bader, A. Furman, T. Gelander, N. Monod, *Property (T) and rigidity for actions on Banach spaces,* Acta Math. **198** (2007), no. 1, 57-105.

[2] M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces,* Astérisque **270**, 2001.

[3] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isométrie,* Ergodic theory and Dynamical Systems **20** (2000), 343-364.

[4] M. Bourdon, *Cohomologie ℓ_p et produits amalgamés,* Geometriae Dedicata **107** (2004), 85-98.

[5] M. Bourdon, B. Kleiner, *Combinatorial modulus, the combinatorial Loewner property, and Coxeter groups,* Groups Geom. Dyn. **7** (2013), 39-107.

[6] M. Bourdon, B. Kleiner, *Some applications of ℓ_p-cohomology to boundaries of Gromov hyperbolic spaces,* arXiv :1203.1233, Groups Geom. Dyn., to appear.

[7] M. Bourdon, F. Martin, A. Valette, *Vanishing and non-vanishing for the first L^p-cohomology of groups,* Comment. Math. Helv. **80** (2005), 377-389.

[8] M. Bourdon, H. Pajot, *Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov,* J. reine angew. Math. **558** (2003), 85-108.

[9] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature,* Grundlheren der Mathematischen Wissenschaften 319, Springer, 1999.

[10] K.S. Brown, *Cohomology of groups,* Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1982.

[11] N. Brown, E. Guentner, *Uniform embedding of bounded geometry spaces into reflexive Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), no.7, 2045-2050.

[12] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation functors and interpolation spaces, Vol. 1,* North-Holland Mathematical Library, **47** (1991).

[13] I. Chatterji, C. Drutu, F. Haglund, *Kazhdan and Haagerup properties from the median viewpoint,* Adv. Math. **225** (2010), no.2, 882-921.

[14] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities. Differential geometric and analytic perspectives,* Cambridge Tracts in Maths 145, 2001.

[15] J. Cheeger, M. Gromov, *L_2-cohomology and group cohomology,* Topology **25** (1986), p 189-215.

[16] P-A. Cherix, M. Cowling, P. Jolissaint, P. Julg, A. Valette, *Groups with the Haagerup property. Gromov's a-T-menability,* Progress in Mathematics **197**, Birkhäuser, 2001.

[17] P-A. Cherix, F. Martin, A. Valette, *Spaces with measured walls, the Haagerup property and property (T),* Ergod. Th. Dynam. Sys. (2004), **24**, 1895-1908.

[18] Y. De Cornulier, R. Tessera, *Contracting automorphisms and L_p-cohomology in degree one,* Arkiv for Matematiks **49**, no. 2, (2011), 295-324.

[19] Y. De Cornulier, R. Tessera, A. Valette, *Isometric group actions on Banach spaces and representations vanishing at infinity,* Transform. Groups **13** (2008), no. 1, 125-147.

[20] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov,* Pacific Journal of Mathematics **159** (1993), 241-270.

[21] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de M. Gromov,* Lecture Notes in Mathematics **1441**, Springer-Verlag, 1991.

[22] J. Dymara, T. Januszkiewicz, *Cohomology of buildings and their automorphism groups,* Invent. Math. **150** (2002), 579-627.

[23] G. Elek, *The ℓ_p-cohomology and the conformal dimension of hyperbolic cones,* Geometriae Dedicata **68** (1997), 263-279.

[24] G. Elek, *Coarse cohomology and ℓ_p-cohomology,* K-Theory **13** (1998), no. 1, 1-22.

[25] D. Gaboriau, *Invariants ℓ^2 de relations d'équivalence et de groupes,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **95** (2002), 93-150.

[26] V. Gerasimov, *Floyd maps for relatively hyperbolic groups,* Geom. Funct. Anal. **22** (2012), no. 5, 1361-1399.

[27] S. M. Gersten, *Isoperimetric functions of groups and exotic cohomology,* In : Combinatorial and Geometric Group Theory, Edinburgh 1993, London Math. Soc. Lecture Notes Ser. 204, Cambridge Univ. Press, 1995, 87-104.

[28] E. Ghys, P. De La Harpe, (Eds), *Sur les groupes hyperboliques, d'après Gromov,* Progress in Mathematics **83**, Birkhäuser, 1990.

[29] V. Goldstein, V. Kuzminov, I. Shvedov, *The Kuenneth formula for L_p cohomology of warped products,* Sib. Math. J. **32** (1991), 749-760.

[30] M. Gromov, *Hyperbolic groups, Essays in Group theory,* Ed. S.M. Gersten, Springer 1987, 72-263.

[31] M. Gromov, *Asymptotic invariants for infinite groups,* London Mathematical Society Lecture Note Series 182, Eds G.A. Niblo and M.A. Roller, 1993.

[32] F. Haglund, F. Paulin, *Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative,* Geom. Topol. Monograph **1** (1998), 181-248.

[33] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces,* Universitext, Springer, 2001.

[34] G. Kasparov, G. Yu, *The coarse geometric Novikov conjecture and uniform convexity*, Adv. Math. 206 (2006), no. 1, 1-56.

[35] H. Kesten, *Full Banach mean values on countable groups,* Math. Scand. **7**, (1959), 146-156.

[36] V. Lafforgue, *Propriété (T) renforcée banachique et transformation de Fourier rapide,* J. Topol. Anal. **1** (2009), no. 3, 191-206.

[37] W. Lueck, *L^2-Betti numbers of mapping tori and groups*, Topology, **33** (1994), 203-214.

[38] J. Mackay, J. Tyson, *Conformal dimension. Theory and application,* University Lecture Series, **54**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[39] B. Nica, *Proper isometric actions of hyperbolic groups on L^p-spaces,* Compos. Math. **149** (2013), no. 5, 773-792.

[40] P. Pansu, *Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré un,* PDE and Geometry 1988, Rend. Sem. Mat. Torino, Fasc. Spez. (1989), 95-120.

[41] P. Pansu, *Cohomologie L^p : invariance sous quasiisométries*, Preprint Université Paris-Sud (1995).

[42] P. Pansu, *Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement,* Preprint Université Paris-Sud (1999).

[43] P. Pansu, *Cohomologie L^p en degré* 1 *des espaces homogènes,* Potential Anal. **27**, (2007), 151-165.

[44] P. Pansu, *Cohomologie L^p et pincement,* Comment. Math. Helv. **83** (2008), no.2, 327-357.

[45] P. Pansu, *L^p-cohomology of symmetric spaces,* Geometry, analysis and discrete groups, 305-326, Adv. Lect. Math. (ALM), 6, (2008).

[46] P. Pansu, *Dimension conforme et sphère à l'infini des variétés à courbure négative,* Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A.I. Mathematica **14** (1990), 177-212.

[47] F. Paulin, *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord,* Journal of the London Math. Soc. **54** (1996), 50-74.

[48] M. Puls, *The first L^p-cohomology of some groups with one end,* Arch. Math. (Basel) **88** (2007), no. 6, 500-506.

[49] M.S. Raghunathan , *Discrete subgroups of Lie groups,* Ergebnisse der mathematik und ihrer Grenzgebiete **68**, Springer-Verlag, 1972.

[50] A.Reznikov, *Analytic Topology of Groups, Actions, Strings and Varieties*, Geometry and dynamics of groups and spaces, 3-93, Prog. Math., **265**, Birkauser, Basel, 2008.

[51] W. Rudin, *Functional Analysis,* McGraw-Hill, 1973.

[52] Y. Shalom, *Rigidity, unitary representations of semisimple groups, and fondamental groups of manifolds with rank one transformation group,* Ann. of Math. (2) **152** (2000), 113-182.

[53] R. Tessera, *Vanishing of the first reduced cohomology with values in an L^p representation,* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **59**, no.2, 851-876.

[54] R. Tessera, *Isoperimetric profile and random walks on locally compact solvable groups,* Rev. Mat. Iberoam., to appear.

[55] G. Yu, *Hyperbolic groups admit proper affine isometric actions on l_p-spaces*, GAFA, **15** (2005), 1144-1151.

Université Lille 1, Département Mathématiques, Bat. M2,
59655 Villeneuve d'Ascq, France, bourdon@math.univ-lille1.fr