Cohomologie ℓ_p et espaces de Besov *

Marc Bourdon
Laboratoire d'Arithmétique, Géométrie,
Analyse, Topologie UMR CNRS 8524
Université de Lille I
F-59655 Villeneuve d'Ascq, France
e-mail : bourdon@agat.univ-lille1.fr

Hervé Pajot
Département de Mathématiques
Université de Cergy-Pontoise
2, av. A. Chauvin,
Pontoise BP 222
F-95302 Cergy Pontoise Cedex, France
e-mail : herve.pajot@math.u-cergy.fr

Abstract

Let Z be a compact metric space. Under some natural assumptions, we define the ℓ_p-cohomology of the conformal gauge J of Z, denoted by $\ell_p H^\bullet(J)$. When Z is the boundary of a Gromov-hyperbolic group Γ, the ℓ_p-cohomology of Z is the same as the classical ℓ_p-cohomology of Γ. We show that for any Ahlfors-regular metric d in J, the $\ell_p H^1(J)$ is canonically isomorphic to the p-Besov space of (Z, d). As an application, when J contains a Loewner metric (in the sense of Heinonen-Koskela), then the critical ℓ_p-dimension of J is equal to the conformal dimension of J. We deduce from this result, that in general, the conformal gauge of a hyperbolic group doesn't contain any Loewner metric.

Résumé

Soit Z un espace métrique compact. Sous quelques hypothèses naturelles sur Z, on définit la cohomologie ℓ_p de la jauge conforme J de Z, notée $\ell_p H^\bullet(J)$. Lorsque Z est le bord d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ, la cohomologie ℓ_p de J se confond avec la cohomologie ℓ_p classique de Γ. On montre que pour toute métrique Ahlfors-régulière d dans J, le $\ell_p H^1(J)$ est canoniquement isomorphe au p-espace de Besov de (Z, d). Comme application, on obtient que si J contient une métrique de Loewner (au sens d'Heinonen-Koskela), alors la dimension ℓ_p critique de J est égale à la dimension conforme de J. On en déduit, qu'en général, la jauge conforme du bord d'un groupe hyperbolique ne possède pas de métrique de Loewner.

*Preprint

A.M.S. Classification : 20F69, 30C65.
Key words : ℓ_p-cohomology, Besov spaces, Quasi-symmetric maps, Hyperbolic spaces.

0 Introduction

Soit (Z, d_0) un espace métrique compact. On suppose dans la suite qu'il possède les propriétés suivantes:

(i) (Z, d_0) est *uniformément parfait*, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C > 1$ telle que pour toute boule $B(z, r)$ de (Z, d_0) avec $r \leq \operatorname{diam}(Z, d_0)$, on ait
$$B(z, r) \setminus B(z, r/C) \neq \emptyset \ ;$$

(ii) (Z, d_0) porte une *une mesure doublante*, c'est-à-dire une mesure borélienne μ telle que pour toute boule $B(z, r)$ de (Z, d_0), on ait
$$0 < \mu(B(z, 2r) \leq C\mu(B(z, r)) < +\infty,$$
où C ne dépend que de μ et de d_0.

Par exemple, le bord d'un groupe Gromov-hyperbolique non élémentaire, muni d'une métrique visuelle, satisfait à ces propriétés (voir [9], 7.4).

Dans ce papier, on introduit et on étudie des nouveaux invariants de quasi-symétrie de (Z, d_0), qui sont de nature cohomologique. Afin de présenter les principaux résultats, rappelons quelques définitions (voir [18] pour plus de détails). Un homéomorphisme $f : (Z_1, d_1) \to (Z_2, d_2)$ entre deux espaces métriques quelconques est dit *quasi-symétrique*, s'il existe un homéomorphisme croissant $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tel que :
$$d_1(\xi, \eta) \leq td_1(\xi, \zeta) \Rightarrow d_2(f(\xi), f(\eta)) \leq \phi(t)d_2(f(\xi), f(\zeta)),$$
pour tout $\xi, \eta, \zeta \in Z_1$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$. Deux métriques d_1 et d_2 sur Z sont dites quasi-symétriques si l'application identité $(Z, d_1) \to (Z, d_2)$ est quasi-symétrique. La relation "d_1 et d_2 sont quasi-symétriques" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des métriques de Z. Suivant J. Heinonen ([18], §15), appelons *jauge conforme* de (Z, d_0) la classe d'équivalence (aussi appelée classe quasi-conforme):
$$J = \{d \text{ métrique sur } Z \ ; \ d \text{ quasi-symétrique à } d_0\}.$$

La jauge J est un invariant complet de quasi-symétrie de (Z, d_0). Les propriétés (i) et (ii) décrites ci-dessus sont invariantes par quasi-symétrie, donc partagées par toutes les métriques d de J. Lorsque (Z, d_0) est le bord d'un groupe hyperbolique Γ muni d'une métrique visuelle, la jauge J est également un invariant complet de quasi-isométrie de Γ (voir [1], [27] et le §2.2).

Soit à présent $p \in [1, +\infty]$. On définit ici les groupes de cohomologie ℓ_p, notés $\ell_p H^\bullet(J)$, de la jauge conforme J de (Z, d_0). Ce sont des invariants de quasi-symétrie de (Z, d_0). Lorsque (Z, d_0) est le bord d'un groupe hyperbolique non élémentaire Γ, ils se confondent aux groupes de cohomologie ℓ_p classiques d'un complexe de Rips contractile quelconque de Γ (voir [16] §8 et le chapitre 1 de ce papier pour la cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux). Si de plus Γ est sans torsion, les groupes $\ell_p H^\bullet(J)$ s'identifient naturellement aux groupes $H^\bullet(\Gamma, \ell_p(\Gamma))$ (voir [8] pour la cohomologie de Γ à coefficients dans une représentation).

Décrivons nos principaux résultats. Ils portent essentiellement sur le $\ell_p H^1(J)$, avec $p \in [1, +\infty[$.

0.1 $\ell_p H^1(J)$ et espaces de Besov.

En s'inspirant des travaux de P. Pansu sur les espaces homogènes à courbure strictement négative ([22], [24], [25], voir aussi [28]), on montre que pour chaque métrique Ahlfors-régulière d dans J, le $\ell_p H^1(J)$ s'identifie au p-espace de Besov de (Z, d). Voici les définitions nécessaires. Une métrique d sur Z est dite *Ahlfors-régulière* si sa dimension de Hausdorff Q et sa Q-mesure de Hausdorff $\mathcal{H}$ satisfont

$$C^{-1} r^Q \leq \mathcal{H}(B(r)) \leq C r^Q,$$

pour toute boule $B(r)$ de (Z, d) de rayon $r \leq \mathrm{diam}(Z, d)$, avec $C > 0$ constante indépendante de r. Les propriétés (i) et (ii) de (Z, d_0) garantissent l'existence de nombreuses métriques Ahlfors-régulières dans J. En effet, un résultat de S. Semmes montre que toute mesure doublante sur (Z, d_0) est essentiellement la mesure de Hausdorff d'une métrique Ahlfors-régulière de J (voir [18], 14.14). De plus, si X est un espace Gromov-hyperbolique qui possède un sous-groupe d'isométries proprement discontinu et cocompact, alors toute métrique visuelle au bord de X est Ahlfors-régulière (voir [9], 7.4). Soit $p \in [1, +\infty[$, et soit $d \in J$ une métrique Ahlfors-régulière de dimension Q et de mesure de Hausdorff $\mathcal{H}$; pour toute fonction mesurable u de $(Z, \mathcal{H})$, posons :

$$\|u\|_{p,d} = \Big(\int_{Z \times Z} \frac{|u(\xi) - u(\eta)|^p}{d(\xi, \eta)^{2Q}} d\mathcal{H}(\xi) d\mathcal{H}(\eta) \Big)^{1/p},$$

et définissons

$$B_p(d) = \{u : Z \to \mathbb{R}, \text{ mesurables} ; \|u\|_{p,d} < +\infty\} / \sim,$$

où $u \sim v$ si $u - v$ est $\mathcal{H}$-presque partout constante sur Z. On appellera l'espace vectoriel normé $(B_p(d), \| \cdot \|_{p,d})$, le *$p$-espace de Besov* de (Z, d). Lorsque (Z, d) est la n-sphère euclidienne et $p > n$, l'espace $B_p(d)$ est égal à l'espace de Besov classique $B^{\frac{n}{p}}_{p,p}$ de l'analyse fonctionnelle (voir [32]).

Théorème 0.1 *Pour $p \in [1, +\infty[$ et toute métrique Ahlfors-régulière d dans J, il existe un isomorphisme canonique d'espaces de Banach entre $\ell_p H^1(J)$ et $B_p(d)$.*

En particulier lorsque d et d' sont deux métriques Ahlfors-régulières de J, les espaces de Besov $B_p(d)$ et $B_p(d')$ sont canoniquement isomorphes. L'existence d'un tel isomorphisme est non triviale, car les mesures de Hausdorff de d et d' sont généralement étrangères.

Il est facile de voir que les fonctions lipschitziennes de (Z,d) appartiennent à $B_p(d)$ pour $p \in]Q,+\infty[$. Par suite, on obtient le résultat suivant précédemment observé par P. Pansu [22], M. Gromov [16] et par G. Elek [12] dans des cas particuliers.

Corollaire 0.2 *Soit Q la dimension de Hausdorff d'une métrique Ahlfors-régulière de J, alors $\ell_p H^1(J) \neq 0$ pour $p \in]Q,+\infty[$.* $\square$

0.2 $\ell_p H^1(J)$ des espaces de Loewner.

Récemment J. Heinonen et P. Koskela ont défini et étudié une classe importante d'espaces métriques appelés espaces de Loewner ([18], [19], voir aussi le §4.3 de ce papier). Sur ces espaces plusieurs outils et résultats classiques de la géométrie quasi-conforme des sphères euclidiennes subsistent. Ils sont responsables de nombreux phénomènes de rigidité en géométrie Gromov-hyperbolique (voir [6] pour un survol, [2]). Parmi les exemples d'espaces de Loewner, on trouve les espaces euclidiens, les groupes de Carnot munis de leurs métriques de Carnot-Carathéodory (voir [17], Théorème 11.17), dont les bords des espaces symétriques de rang 1 non compacts sont des cas particuliers, et les bords des immeubles fuchsiens munis de leurs métriques combinatoires ([3], [4], [5], voir aussi [21] pour d'autres exemples). En utilisant la description du $\ell_p H^1$ en termes d'espaces de Besov, on obtient le

Théorème 0.3 *Soit $p \in [1,+\infty[$. Supposons que J contienne une métrique d Ahlfors-régulière de dimension Q, telle que (Z,d) soit un espace de Loewner. Alors $\ell_p H^1(J) \neq 0$ si et seulement si $p \in]Q,+\infty[$.*

Ce théorème découle d'un résultat plus général (Théorème 4.2) qui porte sur l'espace de Besov $B_p(d)$ lorsque p est égal à la dimension de Hausdorff de (Z,d). Dans le cas particulier des groupes de Carnot, le théorème 0.3 est dû à P. Pansu [22].

Décrivons un corollaire du théorème 0.3. A la jauge conforme J, P. Pansu attache deux invariants numériques. Le premier est sa *dimension conforme* :

$$\mathrm{Cdim}(J) = \inf\{\mathrm{Hdim}(Z,d) \ ; \ d \in J\},$$

où Hdim désigne la dimension de Hausdorff ; le second est sa *dimension ℓ_p critique* :

$$p(J) = \inf\{p \in [1,+\infty[\ ; \ \ell_p H^1(J) \neq 0\},$$

(pour $p \leq q$ on a $\ell_p H^1(J) \subset \ell_q H^1(J)$, voir 3.1). Lorsque la dimension topologique de Z est au moins égale à 1, le corollaire 0.2 montre que

$$p(J) \leq \inf\{\mathrm{Hdim}(Z,d) \ ; \ d \in J, \ d \text{ Ahlfors-régulière}\}.$$

Par contre, on ignore si l'inégalité $p(J) \leq \mathrm{Cdim}(J)$ est encore vraie. Dans [33], J. Tyson établit le résultat suivant (voir aussi [18], Théorème 15.10): si J possède une métrique d telle que (Z, d) soit un espace de Loewner, alors

$$\mathrm{Cdim}(J) = \mathrm{Hdim}(Z, d).$$

Son théorème combiné au théorème 0.3 donne le

Corollaire 0.4 *Si J contient une métrique d Ahlfors-régulière telle que (Z, d) soit de Loewner, alors $p(J) = \mathrm{Cdim}(J)$.* □

Ce corollaire permet de répondre à la question suivante posée dans [2] et [6]. Elle est motivée par la conjecture de Cannon, qui est une étape importante dans la conjecture d'hyperbolisation de Thurston.

Question 0.5 *Soit Γ un groupe hyperbolique qui n'est pas virtuellement un produit amalgamé ou une HNN extension au-dessus d'un groupe virtuellement cyclique. Existe-t-il une métrique d dans la jauge conforme de son bord $\partial\Gamma$, qui soit Ahlfors-régulière et telle que $(\partial\Gamma, d)$ soit de Loewner ?*

Au paragraphe 5.1.c), on décrit des exemples de groupes hyperboliques qui vérifient les hypothèses de la question, mais dont la jauge J du bord satisfait $p(J) < \mathrm{Cdim}(J)$. Donc grâce au corollaire 0.4, la réponse à la question ci-dessus est NON.

Organisation du papier. Au premier chapitre, on rappelle la définition de la cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux, et ses propriétés d'invariance par quasi-isométrie. Le second chapitre est consacré à la définition de la cohomologie ℓ_p des jauges conformes. Le théorème 0.1 est démontré au chapitre 3. Au chapitre 4, on exhibe quelques propriétés géométriques de l'espace $B_p(d)$, le théorème 0.3 en découle. Les contre-exemples à la question 0.5 sont décrits au chapitre 5.

Conventions et notations. Tous les espaces hyperboliques (au sens de M. Gromov) considérés ici sont supposés propres et géodésiques (voir [1], [7], [10], [14], [15] pour leurs définition et propriétés).

Deux fonctions f et g d'un même espace X sont dites *comparables*, et on écrit alors $f \asymp g$, s'il existe une constante $C \geq 1$ telle que pour tout $x \in X$, on ait $C^{-1}g(x) \leq f(x) \leq Cg(x)$. Deux applications $F, G : X \to Y$, entre deux espaces métriques, sont à *distance bornée* si

$$\sup\{d(F(x), G(x))\ ;\ x \in X\} < +\infty.$$

Soit $(X, \mathcal{H})$ un espace mesuré, pour $B \subset X$ mesurable avec $\mathcal{H}(B) > 0$ et pour $f : X \to R$ intégrable, on désigne par $⨍_B f d\mathcal{H}$ la moyenne $\frac{1}{\mathcal{H}(B)} \int_B f d\mathcal{H}$.

Remerciements. Nous remercions Pierre Pansu pour les discussions fructueuses, nous lui devons, entre autres choses, l'idée de comparer la Q-norme de Besov au Q-module. Merci également à Frédéric Haglund pour son intérêt et ses encouragements, et à Damien Gaboriau pour ses remarques et questions qui ont améliorées ce texte.

1 Cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux, invariance par quasi-isométrie.

On ne considérera ici que des complexes simpliciaux X munis d'une métrique de longueur notée $|\cdot - \cdot|$, telle que

(i) il existe une constante $C \geq 0$ telle que tout simplexe de X soit de diamètre inférieur à C,

(ii) il existe une fonction $N : [0, +\infty[\to \mathbb{N}$ telle que toute boule de rayon r contienne au plus $N(r)$ simplexes de X.

Un tel complexe sera dit *géométrique*. Suivant [16] §8, on définit leur cohomologie ℓ_p ($p \in [1, +\infty]$), et on discute quelques propriétés d'invariance.

Soit $\ell_p C^k(X)$ l'espace de Banach constitué des cochaines de degré k qui sont p-sommables (c'est-à-dire les fonctions réelles ℓ_p de l'ensemble des k-simplexes de X). L'opérateur cobord

$$d_k : \ell_p C^k(X) \to \ell_p C^{k+1}(X)$$

défini pour $\tau \in \ell_p C^k(X)$ et tout $(k+1)$-simplexe σ par $(d_k \tau)(\sigma) = \tau(\partial\sigma)$, est un opérateur borné (grâce à la propriété (ii) ci-dessus). Le k-ième groupe de cohomologie ℓ_p de X (resp. de cohomologie ℓ_p réduite) est

$$\ell_p H^k(X) = \ker d_k / \mathrm{Im}\ d_{k-1},$$

(resp. $\ell_p \bar{H}^k(X) = \ker d_k / \overline{\mathrm{Im}\ d_{k-1}}$, où $\overline{\mathrm{Im}\ d_{k-1}}$ désigne l'adhérence pour la topologie ℓ_p). Lorsque X est contractile et admet un groupe Γ qui agit librement, par automorphismes simpliciaux, et de manière cocompacte, le groupe $\ell_p H^k(X)$ s'identifie canoniquement à $H^k(\Gamma, \ell_p(\Gamma))$ (voir [8] pour la cohomologie des groupes).

Passons à l'invariance par isométrie. On dira que X est *uniformément contractile* s'il est contractile et s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que toute boule $B(x, r)$ soit contractile dans $B(x, \phi(r))$.

Rappelons qu'une application quelconque $F : X \to Y$ entre deux espaces métriques est *quasi-Lipschitz* s'il existe des constantes C, D positives telles que

$$\forall x, x' \in X,\ |F(x) - F(x')| \leq C|x - x'| + D.$$

Elle est *uniformément propre* s'il existe une fonction $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que pour toute boule $B(y, r)$ de Y, on ait : $\mathrm{diam}\left(F^{-1}(B(y, r))\right) \leq \Psi(r)$.

C'est une *quasi-isométrie* si elle est quasi-Lipschitz, et s'il existe une application quasi-Lipschitz $G : Y \to X$, telle que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient à distance bornée de l'identité.

Le théorème suivant est dû à M. Gromov, sa preuve est seulement esquissée dans [16] p. 219, nous la complétons pour le confort du lecteur. Dans [23], P. Pansu démontre sensiblement le même résultat de manière plus indirecte. De plus, lorsque X est une variété riemannienne, il relie la cohomologie ℓ_p simpliciale de X à la cohomologie L^p de ses formes différentielles.

Théorème 1.1 *([16], p. 219). Soit X et Y deux complexes simpliciaux géométriques uniformément contractiles.*

a) Toute application quasi-Lipschitz uniformément propre $F : X \to Y$ induit canoniquement des morphismes continus $F^\bullet : \ell_p H^\bullet(Y) \to \ell_p H^\bullet(X)$.

b) Si F_i, $i = 1, 2$, sont comme en a) et sont à distance bornée, alors $F_1^\bullet = F_2^\bullet$.

c) Si $F : X \to Y$ est une quasi-isométrie alors les $F^\bullet$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques.

De plus, les mêmes résultats subsistent en cohomologie ℓ_p réduite.

Voici des exemples de telles situations. Un complexe simplicial géométrique et contractile qui possède un groupe d'isométries cocompact est uniformément contractile. Supposons qu'un groupe Γ agisse par isométries de manière proprement discontinue sur deux complexes simpliciaux géométriques X et Y, soit $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$. Si l'action de Γ sur X est cocompacte alors l'application de $\Gamma \cdot x_0$ dans Y, $g \cdot x_0 \mapsto g \cdot y_0$, se prolonge en une application quasi-Lipschitz uniformément propre F, de X dans Y. Si de plus Γ agit de manière cocompacte sur Y, alors F est une quasi-isométrie de X sur Y.

Preuve du théorème : a) On note X_k l'ensemble des k-simplexes de X et $C_k(X)$ l'espace vectoriel des chaînes de degré k de X (c'est-à-dire les combinaisons linéaires finies à coefficients réels d'éléments de X_k). La *longueur* d'une chaîne $c = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i$ de $C_k(X)$ est l'entier n, on la note $\ell(c)$, sa *norme infinie* est $\|c\|_\infty = \max_i |\lambda_i|$.

On montre d'abord que F induit des applications

$$\begin{array}{ccc} X_k & \to & C_k(Y) \\ \sigma & \mapsto & c(\sigma) \end{array}$$

qui commutent aux opérateurs bords (*i.e.* $\partial c(\sigma) = c(\partial\sigma)$), et qui satisfont en plus $\ell(c(\sigma)) \leq L_k$ et $\|c(\sigma)\|_\infty \leq N_k$, où L_k et N_k sont des constantes qui ne dépendent que de k et des données géométriques de X, Y, F.

On définit ces applications par récurrence sur k. Lorsque $k = 0$ et $x \in X_0$, on choisit pour $c(x)$ un élément de Y_0 uniformément proche de $F(x)$, (d'après la propriété (i) des complexes géométriques, on a $\sup\{\mathrm{dist}(y, Y_0); y \in Y\} < +\infty$).

Passons au degré 1. Pour une arête a de X_1, notons a_- et a_+ ses extrémités dans X_0. Puisque F est quasi-Lipschitz et que X est géométrique, on a

$$\sup\{|c(a_+) - c(a_-)| \ ; \ a \in X_1\} < +\infty.$$

Puisque Y est géométrique, on peut trouver une chaîne d'arêtes $c(a)$ dans $C_1(Y)$ avec $\partial c(a) = c(a_+) - c(a_-)$, de longueur majorée en fonction de $|c(a_+) - c(a_-)|$, et qui vérifie $\|c(a)\|_\infty = 1$.

Supposons l'application c construite jusqu'au degré $k-1$ ($k \geq 2$), construisons-la en degré k. Soit $\sigma \in X_k$. En degré inférieur à $k-1$ l'application c commute aux opérateurs bords, donc $c(\partial\sigma)$ est un cycle dans Y. Il est contenu dans une boule de Y dont le rayon r est majoré en fonction de L_{k-1}. Puisque Y est uniformément contractile, $c(\partial\sigma)$ est le bord d'une chaîne de degré k contenue dans une boule B de rayon $\phi(r)$. Sa longueur est majorée par le nombre de simplexes contenus dans B. Soit $c(\sigma)$ une chaîne de degré k, contenue dans B, de bord $c(\partial\sigma)$, et de norme infinie minimale. Puisque Y est géométrique, à automorphisme simplicial près, il n'y a qu'un nombre fini de boules de rayon $\phi(r)$. La norme infinie de $c(\partial\sigma)$ étant majorée par $(k+1)N_{k-1}$, on en déduit que $\|c(\sigma)\|_\infty$ est majorée indépendamment de $\sigma \in X_k$.

Pour $\tau \in \ell_p C^k(Y)$, définissons à présent $F^*(\tau) : X_k \to \mathbb{R}$ par

$$F^*(\tau)(\sigma) = \tau(c(\sigma)), \text{ où } \sigma \in X_k.$$

La chaîne $c(\sigma)$ est contenue dans une boule centrée sur $F(\sigma)$ et de rayon majoré indépendamment de σ, de plus elle satisfait $\|c(\sigma)\|_\infty \leq N_k$. Ces propriétés combinées à l'uniforme propreté de F montrent que $F^*(\tau)$ appartient à $\ell_p C^k(X)$ et que $F^* : \ell_p C^k(Y) \to \ell_p C^k(X)$ est un opérateur borné. Il commmute aux opérateurs cobords (car $\partial c(\sigma) = c(\partial\sigma)$), et donc induit des morphismes continus en cohomologie ℓ_p et cohomologie ℓ_p réduite.

b) Pour $i = 1, 2$, notons $c_i : X_k \to C_k(Y)$ les applications induites par F_i définies en a). On va construire une homotopie $K : X_k \to C_{k+1}(Y)$ entre c_1 et c_2, c'est-à-dire des applications telles que

– pour $\sigma \in X_0$, $\partial K(\sigma) = c_2(\sigma) - c_1(\sigma)$,

– pour $\sigma \in X_k$, $k \geq 1$, $\partial K(\sigma) + K(\partial\sigma) = c_2(\sigma) - c_1(\sigma)$.

De plus, comme précédemment, $\ell(K(\sigma))$ et $\|K(\sigma)\|_\infty$ seront uniformément majorées sur X_k.

Puisque F_1 et F_2 sont à distance bornée, on a

$$\sup\{\text{diam}\left(|c_1(\sigma)| \cup |c_2(\sigma)|\right) \; ; \; \sigma \in X_k\} < +\infty,$$

où $|c_i(\sigma)|$ désigne le support de la chaîne $c_i(\sigma)$. En degré 0, l'application K est défini comme suit. Pour $\sigma \in X_0$, on choisit une chaîne d'arêtes $K(\sigma) \in C_1(Y)$ avec $\partial K(\sigma) = c_2(\sigma) - c_1(\sigma)$, de longueur majorée en fonction de $|c_1(\sigma) - c_2(\sigma)|$ et vérifiant $\|K(\sigma)\|_\infty = 1$.

Supposons K construite jusqu'au degré $k-1$ ($k \geq 1$), construisons-la en degré k. Soit $\sigma \in X_k$. Puisque c_i commute aux opérateurs bords, on a

$$\partial\big(c_2(\sigma) - c_1(\sigma) - K(\partial\sigma)\big) = 0.$$

Donc $c_2(\sigma) - c_1(\sigma) - K(\partial\sigma)$ est un cycle de degré k, il est contenu dans une boule de Y de rayon majoré indépendamment de $\sigma \in X_k$. Comme en a), on peut trouver $K(\sigma) \in C_{k+1}(Y)$ de bord $c_2(\sigma) - c_1(\sigma) - K(\partial\sigma)$, de longueur et de norme infinie majorée indépendamment de $\sigma \in X_k$.

Pour $\sigma \in X_k$, la $(k+1)$-chaîne $K(\sigma)$ est contenue dans une boule de rayon indépendant de σ, centrée sur $F_1(\sigma)$. Par suite, pour les mêmes raisons qu'en a), les applications

$$\begin{array}{ccc} \ell_p C^{k+1} & \to & \ell_p C^k \\ \tau & \mapsto & K^*(\tau) \end{array}$$

définies par $K^*(\tau)(\sigma) = \tau(K(\sigma))$, pour $\sigma \in X_k$, sont des opérateurs bornés. Ils définissent une homotopie entre F_1^* et F_2^*, donc $F_1^\bullet = F_2^\bullet$ en cohomologie ℓ_p réduite ou non.

c) Soit $G : Y \to X$ une application quasi-Lipschitz, avec $F \circ G$ et $G \circ F$ à distance bornée de l'identité. D'après le b), on a $F^\bullet \circ G^\bullet = (F \circ G)^\bullet = id^\bullet$, de même $G^\bullet \circ F^\bullet = id^\bullet$. Donc les applications $F^\bullet$ sont des isomorphismes. $\square$

2 Cohomologie ℓ_p des jauges conformes.

Soit (Z, d_0) un espace métrique compact. On suppose qu'il porte une mesure doublante et qu'il est uniformément parfait (voir l'introduction pour les définitions). Le but du chapitre est d'utiliser la cohomologie ℓ_p pour définir des nouveaux invariants de quasi-symétrie de (Z, d_0). Plus précisément, on veut définir la cohomologie ℓ_p ($p \in [1, +\infty]$) de la jauge conforme J de (Z, d_0) (J est définie à l'introduction).

Le procédé est le suivant. A chaque métrique $d \in J$, on va associer canoniquement un complexe simplicial géométrique uniformément contractile noté X_d. Pour deux métriques d et d' dans J, on exhibera une quasi-isométrie canonique de X_d sur $X_{d'}$ et donc un isomorphisme canonique de $\ell_p H^\bullet(X_{d'})$ sur $\ell_p H^\bullet(X_d)$, grâce au théorème 1.1.c).

Par suite, à isomorphisme canonique près, les groupes $\ell_p H^\bullet(X_d)$ seront indépendants de $d \in J$. On les notera $\ell_p H^\bullet(J)$. De même sera définie la cohomologie ℓ_p réduite de J, notée $\ell_p \bar{H}^\bullet(J)$.

Soit d une métrique quelconque de la jauge conforme J. On commence par construire un graphe hyperbolique G_d qui reflète la combinatoire des boules de d. En prenant son n-ième complexe de Rips (n assez grand), on obtiendra le complexe simplicial X_d cherché. Les graphes G_d joueront également un rôle essentiel dans la preuve du théorème 0.1.

2.1 Construction des graphes G_d.

Elle est inspirée de [12] §3 (voir aussi [2] pour des constructions voisines). Normalisons la métrique d de manière à ce que $\mathrm{diam}(Z, d) = 1/2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, choisissons une collection de points $z_n^1, \cdots, z_n^{k(n)}$ de Z telle que :

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, k(n)\},\ i \neq j, \text{ on ait } d(z_n^i, z_n^j) \geq e^{-n},$$

et telle que les boules $B(z_n^i, e^{-n}),\ i \in \{1, \cdots, k(n)\}$, recouvrent (Z, d). Notons B_n^i la boule $B(z_n^i, e^{-n})$ et S_n le recouvrement $\{B_n^i;\ i \in \{1, \cdots, k(n)\}\}$.

Remarquons que la normalisation sur le diamètre de d impose à S_0 d'être réduite à un singleton $\{B_0^1\}$. On définit G_d comme suit. Ses sommets sont les boules B_n^i, $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \cdots, k(n)\}$; deux sommets distincts B et B' sont liés par une arête si

- B et B' appartiennent à un même S_n et $B \cap B' \neq \emptyset$, ou si
- l'un appartient à S_n, l'autre à S_{n+1} et $B \cap B' \neq \emptyset$.

On munit G_d de la métrique de longueur obtenue en identifiant chacune de ses arêtes au segment euclidien de longueur 1. Désignons par O le sommet B_0^1, et remarquons que S_n est la sphère de centre O et de rayon n de G_d. Les sommets d'un rayon géodésiques de G_d issu de O déterminent une suite de boules $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $B_n \in S_n$, $B_n \cap B_{n+1} \neq \emptyset$ et $\mathrm{rayon}(B_n) = e^{-n}$.

Une telle suite de boules possède une unique valeur d'adhérence dans Z, donc tout rayon géodésique de G_d issu de O possède une extrémité bien définie dans Z. De plus on voit facilement que deux rayons géodésiques issus de O, ont même extrémité dans Z si et seulement si ils sont à distance bornée.

Proposition 2.1 *a) Le graphe G_d est un graphe hyperbolique (au sens de M. Gromov), de valence bornée.*

b) Son bord s'identifie à Z (via l'identification décrite ci-dessus). La métrique d est une métrique visuelle de paramètre e pour G_d. En d'autres termes pour $\xi, \eta \in Z$, on a

$$d(\xi, \eta) \asymp e^{-(\xi|\eta)},$$

où $(\ |\ )$ désigne le produit de Gromov de G_d basé en O.

Sa preuve repose sur le lemme suivant. Observons que les boules d'un espace uniformément parfait sont de diamètres comparables à leurs rayons.

Lemme 2.2 *Soit x, y deux sommets de G_d et soit A et B les boules correspondantes dans (Z, d). Alors*

$$e^{-(x|y)} \asymp \mathrm{diam}(A \cup B).$$

Preuve du lemme : Choisissons un sommet z de G_d tel que la boule correspondante, notée C, contienne A et B, soit de rayon comparable à $\mathrm{diam}(A \cup B)$, et satisfasse $\mathrm{rayon}(C) \geq \max\{\mathrm{rayon}(A), \mathrm{rayon}(B)\}$. Ceci est possible car (Z, d) est uniformément parfait. Alors z appartient à des segments géodésiques $[Ox]$ et $[Oy]$. Par suite $(x|y) \geq |O - z|$, et on obtient

$$e^{-(x|y)} \leq e^{-|O-z|} = \mathrm{rayon}(C) \asymp \mathrm{diam}(A \cup B).$$

Montrons l'autre inégalité. Notons les distances $|x-y|$, $|O-x|$ et $|O-y|$ par ℓ, m, n. Les sommets d'un segment géodésique $[xy]$ forment une suite de boules $B_0 = A, B_1, \cdots, B_{\ell-1}, B_\ell = B$, telles que $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ et

$$e^{-1}\ \mathrm{rayon}(B_i) \leq \mathrm{rayon}(B_{i+1}) \leq e\ \mathrm{rayon}(B_i).$$

Donc pour tout $k \in \{0, \cdots, \ell\}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(A \cup B) &\leq \sum_{i=0}^{\ell} \mathrm{diam}(B_i) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{diam}(B_i) + \sum_{j=0}^{\ell-k-1} \mathrm{diam}(B_{\ell-j}) \\
&\leq 2\sum_{i=0}^{k} e^{-m+i} + 2\sum_{j=0}^{\ell-k-1} e^{-n+j} \\
&= \frac{2}{e-1}\big(e^{-m+k+1} - e^{-m} + e^{-n+\ell-k} - e^{-n}\big) \\
&\leq \frac{2e}{e-1}\big(e^{-m+k} + e^{-n+\ell-k}\big).
\end{aligned}$$

Prenons $k = \frac{1}{2}(\ell + m - n)$, on obtient

$$\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \frac{4e}{e-1}\ e^{\frac{1}{2}(\ell-m-n)} = \frac{4e}{e-1}\ e^{-(x|y)}. \qquad \square$$

Preuve de la proposition : a) Montrons l'hyperbolicité. Il s'agit de trouver $\delta \geq 0$, tel que pour tout x, y, z dans G_d, on ait

$$(x|y) \geq \min\{(x|z), (z|y)\} - \delta.$$

Soit A, B, C les boules qui correspondent aux sommets x, y, z. Remarquons que $\mathrm{diam}(A \cup B) \leq \mathrm{diam}(A \cup C) + \mathrm{diam}(C \cup B)$, donc d'après le lemme il existe une constante $D \geq 1$ telle que

$$\begin{aligned} e^{-(x|y)} &\leq D(e^{-(x|z)} + e^{-(z|y)}) \\ &\leq 2D \max\{e^{-(x|z)}, e^{-(z|y)}\}. \end{aligned}$$

En prenant le logarithme, on obtient l'inégalité cherchée avec $\delta = \log 2D$.

Le graphe G_d est à valence bornée car J possède une mesure doublante (voir [29], 7.3). Notons que, jusqu'à présent, on n'avait pas utilisé cette propriété de doublement de la mesure.

b) Il découle immédiatement du lemme précédent. □

2.2 Equivalence quasi-isométrique.

On va voir que les graphes G_d sont indépendants de la métrique d de J, à quasi-isométrie près. Rappelons le théorème suivant de M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela [1], qui généralise un théorème de F. Paulin [27].

Théorème 2.3 *Pour $i = 1, 2$, soit Y_i un espace hyperbolique dont le bord Z_i est uniformément parfait. On suppose aussi qu'il existe un point $O_i \in Y_i$ et une constante $E_i \geq 0$, tels que tout élément de Y_i soit à distance inférieure à E_i d'un rayon géodésique issu de O_i. Alors tout homéomorphisme quasi-symétrique $f : Z_1 \to Z_2$ est l'extension aux bords d'une quasi-isométrie $F : Y_1 \to Y_2$. De plus, si F et F' sont deux telles quasi-isométries, elles sont à distance bornée.*

On en déduit le :

Corollaire 2.4 *a) Soit d_1 et d_2 deux métriques de J et G_1, G_2 les graphes associés. Il existe une quasi-isométrie F de G_1 sur G_2 qui se prolonge au bord Z en l'identité. De plus, à distance bornée près, F est unique.*

b) Soit Y un espace hyperbolique qui satisfait aux hypothèses du théorème 2.3. Soit Z son bord et d une métrique de sa jauge conforme. Alors il existe une quasi-isométrie F de Y sur G_d, qui se prolonge par l'identité sur Z. De plus, à distance bornée près, elle est unique.

Remarques. a) L'existence de la mesure doublante μ est inutile au 2.4. En effet, μ sert uniquement à assurer que G_d est à valence bornée (elle servira aussi pour garantir que les complexes X_d sont géométriques). Sinon l'hyperbolicité de G_d et la proposition 2.1.b) sont vraies sans cette hypothèse.

b) Le lecteur intéressé démontrera directement le corollaire 2.4 sans utiliser le théorème 2.3. La définition de F en a) est à peu près évidente, celle en b) également en prenant pour d une métrique visuelle sur Z et en utilisant 2.1.b). Notons que le corollaire 2.4 implique le théorème 2.3. Ce schéma de preuve du théorème 2.3 est différent de celui de [1] et de [27].

2.3 Définition des complexes X_d et de $\ell_p H^\bullet(J)$.

Définissons à présent les complexes simpliciaux X_d, pour $d \in J$. Rappelons que le n-ième complexe de Rips ($n \in \mathbb{N}$) d'un graphe G est le complexe simplicial dont les k-simplexes ($k \leq n$), sont les ensembles de sommets $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ de G avec $|x_i - x_j| \leq n$, $\forall i, j \in \{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$, ($G$ est muni de la métrique de longueur qui donne à ses arêtes la longueur 1). Notons le $R_n G$ et équipons le de la métrique de longueur obtenue en identifiant ses simplexes aux simplexes euclidiens réguliers de diamètre 1. Lorsque le graphe G est hyperbolique, le complexe $R_n G$ est uniformément contractile pour n assez grand devant l'hyperbolicité de G. Ce théorème, dû à E. Rips, est démontré dans [7], § 3, 3.23.

Pour $d \in J$, choisissons $n \in \mathbb{N}$ de manière à ce que $R_n G_d$ soit uniformément contractile (G_d est hyperbolique d'après 2.1.a), et posons $X_d = R_n G_d$. Puisque G_d est à valence bornée (voir 2.1.a), le complexe simplicial X_d est géométrique. De plus, l'inclusion de G_d dans X_d est une quasi-isométrie, donc le corollaire 2.4 est satisfait en remplaçant G_d par X_d dans l'énoncé. Dès lors le théorème 1.1 permet de définir sans ambiguïté la cohomologie ℓ_p de J et sa cohomologie ℓ_p réduite.

Remarquons que si Y est un complexe simplicial géométrique qui satisfait aux hypothèses du théorème 2.3, et si son bord porte une mesure doublante, alors (d'après le corollaire 2.4.b) la cohomologie ℓ_p de Y (réduite ou non) se confond avec celle de la jauge conforme de son bord.

3 $\ell_p H^1(J)$ et espaces de Besov.

L'objet du chapitre est la démonstration du théorème 0.1 de l'introduction. La preuve comporte deux parties. On montre d'abord que tout élément de $\ell_p H^1(J)$ ($p \in [1, +\infty[$) s'étend au bord (Z, d) et que l'application linéaire ainsi obtenue

$$\mathcal{E} : \ell_p H^1(J) \to L^p(Z, \mathcal{H})/\mathbb{R},$$

est continue et injective (théorème 3.1). Ce résultat est une version discrète d'un théorème de R. Strichartz ([31] 5.6, [22]). Dans la seconde partie, on identifie l'image de $\mathcal{E}$ à l'espace de Besov $B_p(d)$, (théorème 3.4).

Notations : Tout au long du chapitre, p appartient à $[1, +\infty[$ et d est une métrique Ahlfors-régulière de dimension Q de J. Sa mesure de Hausdorff est notée $\mathcal{H}$. Le graphe G_d et le complexe simplicial X_d définis en 2.1 et 2.3 sont notés plus simplement G et X. On désigne par $V(G)$, $E(G)$, (resp. $V(X), E(X)$) l'ensemble des sommets et des arêtes (orientées) de G, (resp. de X). La distance dans G entre x et O est notée $|x|$. Pour $x \in V(G)$, on désigne par $B(x)$ la boule de (Z, d) correspondante (voir 2.1). Remarquons que par Ahlfors-régularité,

$$\mathcal{H}(B(x)) \asymp e^{Q|x|}.$$

On pose $a = e^Q$, de sorte que $\mathcal{H}(B(x)) \asymp a^{|x|}$.

Donnons à présent une expression du $\ell_p H^1(J)$ avec laquelle on travaillera dans la suite. Par définition, $\ell_p H^1(J)$ est isomorphe à

$$\{\tau \in \ell_p(E(X)) \ ; \ d\tau = 0\}/d\ell_p(V(X)),$$

ou encore, puisque X est contractile, à

$$\{f : V(X) \to \mathbb{R} \ ; \ df \in \ell_p(E(X))\}/\ell_p(V(X)) + \mathbb{R},$$

où $\mathbb{R}$ désigne les fonctions constantes de $V(X)$. Remarquons que $V(X) = V(G)$ et que $E(G) \subset E(X)$; observons aussi que pour $f : V(X) \to \mathbb{R}$, la p-norme de $df : E(X) \to \mathbb{R}$ est comparable à celle de sa restriction à $E(G)$ (car G est à valence bornée et X est un complexe de Rips de G). Donc finalement, on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques

$$\ell_p H^1(J) \simeq \{f : V(G) \to \mathbb{R} \ ; \ df \in \ell_p(E(G))\}/\ell_p(V(G)) + \mathbb{R},$$

où l'espace de droite est muni de la topologie induite par la p-norme de df.

3.1 Extension au bord.

Soit $f : V(G) \to \mathbb{R}$ avec $df \in \ell_p(E(G))$. Pour $\xi \in Z$, posons (si elle existe)

$$f_\infty(\xi) = \lim_{n \to +\infty} f(r(n)),$$

où r est un rayon géodésique de G issu de O et d'extrémité ξ. Lorsque cette limite existe, elle est indépendante du rayon r car $df \in \ell_p(E(G))$ et car deux rayons géodésiques de mêmes extrémités sont à distance uniformément bornée. De même la limite est inchangée, si au lieu du rayon géodésique r on prend un quasi-rayon géodésique d'extrémité ξ. Donc, à des identifications évidentes près, la fonction $\xi \mapsto f_\infty(\xi)$ ne dépend que de f et du type de quasi-isométrie de G.

Théorème 3.1 *a) Pour $\mathcal{H}$-presque tout ξ dans Z, la limite $f_\infty(\xi)$ existe et la fonction f_∞ appartient à $L^p(Z, \mathcal{H})$.*

b) L'application linéaire associée

$$\{f : V(G) \to \mathbb{R}\ ;\ df \in \ell_p(E(G))\}/\mathbb{R} \to L^p(Z, \mathcal{H})/\mathbb{R}$$

est continue, son noyau est précisément $\ell_p(V(G)) + \mathbb{R}$. Donc elle induit une injection linéaire continue

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{E} : \ell_p H^1(J) & \hookrightarrow & L^p(Z, H)/\mathbb{R} \\ {[f]} & \mapsto & f_\infty \mod (\mathbb{R}). \end{array}$$

En particulier, $\ell_p(V(G)) + \mathbb{R}$ est fermé dans le Banach

$$\{f : V(G) \to \mathbb{R}\ ;\ df \in \ell_p(E(G))\}/\mathbb{R}$$

muni de la p-norme de df. Donc la 1-cohomologie ℓ_p de J est réduite *i.e.* $\ell_p H^1(J) = \ell_p \bar{H}^1(J)$. Par suite $\ell_p H^1(J)$ est un Banach. Le théorème 3.1 montre aussi que

$$\ell_p H^1(J) \subset \ell_q H^1(J) \text{ pour } 1 \leq p < q < +\infty.$$

En effet, on a $\ell_p(E(G)) \subset \ell_q(E(G))$, de plus si $[f] \in \ell_p H^1(J)$ est nulle dans $\ell_q H^1(J)$, alors f_∞ est presque partout constante sur Z, donc $[f] = 0$ dans $\ell_p H^1(J)$ également.

La première partie du théorème découle du lemme suivant. Soit $\mathcal{R}$ l'ensemble des rayons géodésiques $r : [0, +\infty[\to G$ issus de O. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $[0, \infty[$, $\mathcal{R}$ est compact (homéomorphe à un Cantor) ; il se surjecte continuement sur Z, via $r \mapsto \lim_{t\to\infty} r(t)$. Soit $\xi \in Z \mapsto r_\xi \in \mathcal{R}$ une section mesurable de cette application (voir [26] pour l'existence). Notons $r_\xi(n)$ la n-ième arête du rayon r_ξ.

Lemme 3.2 *Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $f : V(G) \to \mathbb{R}$, on ait :*

$$\int_Z \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |df(r_\xi(n))|^p a^n\Big) d\mathcal{H}(\xi) \leq C \|df\|_p^p.$$

Avec Hölder, on déduit immédiatement du lemme que si df appartient à $\ell_p(E(G))$, alors $\sum_{n=1}^{\infty} df(r_\xi(n))$ converge pour $\mathcal{H}$-presque tout $\xi \in Z$, et que si de plus $f(O) = 0$, alors

$$\|f_\infty\|_p \leq D \|df\|_p,$$

où D est une constante qui ne dépend que de C, a et p. Donc le lemme implique la partie a) du théorème ainsi que la continuité de l'application linéaire associée.

Preuve du lemme : Le terme de gauche de l'inégalité est égal à

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_Z |df(r_\xi(n))|^p a^n d\mathcal{H}(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{e\in E_n}\int_{\{\xi;\ r_\xi(n)=e\}} |df(e)|^p a^n d\mathcal{H}(\xi),$$

où E_n désigne l'ensemble des arêtes de G qui relient la sphère $\{|x| = n-1\}$ à la sphère $\{|x| = n\}$. Notons $t(e)$ l'extrémité de $e \in E_n$ qui appartient à $\{|x| = n\}$. En remarquant que l'extrémité $\xi \in Z$, d'un rayon géodésique issu de O passant par $v \in V(G)$, appartient à $3B(x)$, ($3B$ désigne la boule qui a même centre que B et qui est de rayon triple), on majore les sommes ci-dessus par

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{e\in E_n} |df(e)|^p a^n \mathcal{H}\big(3B(t(e))\big) \leq C\|df\|_p^p,$$

car $\mathcal{H}\big(3B(t(e))\big) \asymp a^{-|t(e)|} = a^{-n}$. □

Pour étudier le noyau de l'application linéaire de la partie b) du théorème, on utilise l'inégalité suivante "à la Strichartz" (comparer avec [31] 5.6).

Lemme 3.3 *Il existe une constante $D \geq 0$ telle que pour tout $(v_n) \in \ell_1(\mathbb{N})$, on ait*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{k\geq n} v_k|^p a^n \leq D\sum_{n=0}^{\infty} |v_n|^p a^n.$$

Avant de la démontrer, terminons la preuve du théorème 3.1. Clairement lorsque f appartient à $\ell_p(V(G))+\mathbb{R}$, la fonction f_∞ est constante partout sur Z. Inversement, supposons que $f_\infty = 0$ $\mathcal{H}$-presque partout. Considérons à nouveau les rayons r_ξ définis précédemment, et appliquons le lemme 3.3 à la suite $v_n = df(r_\xi(n))$. On obtient pour presque tout $\xi \in Z$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |f(r_\xi(n))|^p a^n \leq D\sum_{n=1}^{\infty} |df(r_\xi(n))|^p a^n,$$

(dans le membre de gauche $r_\xi(n)$ désigne le n-ième sommet de r_ξ, dans celui de droite sa n-ième arête). En intégrant ξ sur Z et en appliquant le lemme 3.2, on obtient

$$\int_Z \sum_{n=0}^{\infty} |f(r_\xi(n))|^p a^n d\mathcal{H}(\xi) \leq CD\|df\|_p^p. \tag{1}$$

On compare à présent le membre de gauche de (1) à $\|f\|_p^p$. Il s'écrit encore

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_Z |f(r_\xi(n))|^p a^n d\mathcal{H}(\xi).$$

Puisque les boules $\frac{1}{2}B(x),\ x \in \{|x| = n\}$, sont deux à deux disjointes on a

$$\int_Z |f(r_\xi(n))|^p a^n d\mathcal{H}(\xi) \geq E \sum_{|x|=n} \fint_{\frac{1}{2}B(x)} |f(r_\xi(n))|^p d\mathcal{H}(\xi),$$

où E ne dépend que des constantes d'Ahlfors-régularité de $\mathcal{H}$. Pour $\xi \in \frac{1}{2}B(x)$, la distance de x à $r_\xi(n)$ est majorée par une constante R qui est fonction de l'hyperbolicité de G. Par suite, grâce à Hölder, il existe une constante F qui ne dépend que de R et de p, avec pour tout $\xi \in \frac{1}{2}B(x)$,

$$|f(x)|^p \leq F\big(|f(r_\xi(n))|^p + \|df\chi_{B(x,R)}\|_p^p\big).$$

Dès lors, le membre de gauche de l'inégalité (1) est minoré linéairement en fonction de $\|f\|_p^p$ et de $\|df\|_p^p$. Donc f appartient à $\ell_p(V(G))$ et le théorème est prouvé. $\square$

Preuve du lemme 3.3 : Tout d'abord si $p = 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{k\geq n} v_k| a^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\geq n} |v_k| a^n = \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \sum_{n\leq k} a^n = \sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \frac{a^{k+1}-1}{a-1}.$$

Donc $D = \frac{a}{a-1}$ convient. Si maintenant $p > 1$, soit $b \in]1, a[$. On a, avec Hölder,

$$\begin{aligned} |\sum_{k\geq n} v_k|^p &\leq \big(\sum_{k\geq n} |v_k| b^{k/p} b^{-k/p}\big)^p \leq \big(\sum_{k\geq n} |v_k|^p b^k\big)\big(\sum_{k\geq n} b^{-k/p-1}\big)^{p-1} \\ &= \big(\sum_{k\geq n} |v_k|^p b^k\big)\big(\frac{b^{-n/p-1}}{1-b^{-1/p-1}}\big)^{p-1} = C \sum_{k\geq n} |v_k|^p b^{k-n}, \end{aligned}$$

où $C = (1 - b^{-1/p-1})^{1-p}$. Par suite,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} |\sum_{k\geq n} v_k|^p a^n &\leq C \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\geq n} |v_k|^p b^{k-n} a^n \\ &= C \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^p \sum_{n\leq k} b^{k-n} a^n = C \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^p \frac{a^{k+1} - b^{k+1}}{a-b} \\ &\leq \frac{aC}{a-b} \sum_{k=0}^{\infty} |v_k|^p a^k. \end{aligned}$$

On prend $b = \frac{a+1}{2}$. $\square$

3.2 Détermination de l'image de $\mathcal{E}$.

Le théorème suivant précise l'énoncé du théorème 0.1.

Théorème 3.4 *L'extension au bord $\mathcal{E}$ réalise un isomorphisme d'espaces de Banach de $\ell_p H^1(J)$ sur $B_p(d)$.*

Rappelons que pour $u : Z \to \mathbb{R}$ mesurable, on a posé

$$\|u\|_{p,d}^p = \int_{Z\times Z} \frac{|u(\xi) - u(\eta)|^p}{d(\xi,\eta)^{2Q}} d\mathcal{H}(\xi) d\mathcal{H}(\eta).$$

L'observation clé pour établir le théorème est

Lemme 3.5 *Soit e_- et e_+ les extrémités d'une arête e de $E(G)$. Pour tout $\xi, \eta \in Z$, on a*

$$\sum_{e\in E(G)} \frac{\chi_{B(e_-)}(\xi)\chi_{B(e_+)}(\eta)}{\mathcal{H}(B(e_-))\mathcal{H}(B(e_+))} \asymp \frac{1}{d(\xi,\eta)^{2Q}}.$$

Preuve du lemme : On approxime le triangle $(O\xi\eta)$ par un tripode $[xO] \cup [x\xi) \cup [x\eta)$. Les arêtes de $E(G)$ qui ont une contribution non nulle à la somme du lemme sont à une distance inférieure à C du segment $[0x]$, (où C ne dépend que de l'hyperbolicité de G). Puisque G est à valence bornée, la somme du lemme est comparable à

$$\sum_{n=0}^{|x|} \frac{1}{a^{-2n}} \asymp a^{2|x|} = e^{2Q|x|} \asymp e^{2Q(\xi|\eta)} \asymp \frac{1}{d(\xi,\eta)^{2Q}},$$

car d est une métrique visuelle de paramètre e pour G (voir 2.1.b). □

Preuve du théorème 3.4 : Compte tenu du lemme précédent la norme $\|\cdot\|_{p,d}$ satisfait

$$\|u\|_{p,d}^p \asymp \sum_{e\in E(G)} ⨍_{B(e_-)\times B(e_+)} |u(\xi) - u(\eta)|^p d\mathcal{H}(\xi) d\mathcal{H}(\eta). \tag{2}$$

Soit à présent u une fonction mesurable de Z avec $\|u\|_{p,d} < +\infty$. Montrons qu'il existe $[f] \in \ell_p H^1(J)$ avec $f_\infty = u$ $\mathcal{H}$-presque partout. Posons pour $x \in V(G)$,

$$f(x) := ⨍_{B(x)} u(\xi) \; d\mathcal{H}(\xi).$$

On a, avec Hölder

$$\begin{aligned} |df(e)|^p &= |f(e_+) - f(e_-)|^p \\ &= |⨍_{B(e_+)} u(\eta) d\mathcal{H}(\eta) - ⨍_{B(e_-)} u(\xi) d\mathcal{H}(\xi)|^p \\ &= |⨍_{B(e_-)\times B(e_+)} (u(\xi) - u(\eta)) d\mathcal{H}(\xi) d\mathcal{H}(\eta)|^p \\ &\le ⨍_{B(e_-)\times B(e_+)} |u(\xi) - u(\eta)|^p d\mathcal{H}(\xi) d\mathcal{H}(\eta). \end{aligned}$$

Avec la relation (2), on obtient :

$$\|df\|_p \le C_1 \|u\|_{p,d}, \tag{3}$$

où C_1 est indépendante de u. De plus, le théorème de différentiation de Lebesgue (voir [13], 2.9.8) montre que $f_\infty = u$ $\mathcal{H}$-presque partout.

Réciproquement soit $[f] \in \ell_p H^1(J)$, montrons que

$$\|f_\infty\|_{p,d} \leq C_2 \|df\|_p, \tag{4}$$

où C_2 est indépendante de f. Avec Hölder, on trouve une constante D qui ne dépend que de p, telle que pour tout $e \in E(G)$,

$$\fint_{B(e_-)\times B(e_+)} |f_\infty(\xi) - f_\infty(\eta)|^p d\mathcal{H}(\xi) d\mathcal{H}(\eta) \ \leq$$

$$\leq D\Big(\fint_{B(e_-)} |f_\infty(\xi) - f(e_-)|^p d\mathcal{H}(\xi) + |f(e_-) - f(e_+)|^p \ +$$

$$+ \fint_{B(e_+)} |f(e_+) - f(\eta)|^p d\mathcal{H}(\eta)\Big).$$

Aussi d'après (2), pour obtenir l'inégalité (4), il suffit de majorer linéairement

$$S(f) := \sum_{x \in V(G)} \fint_{B(x)} |f_\infty(\xi) - f(x)|^p d\mathcal{H}(\xi),$$

en fonction de $\|df\|_p^p$. Pour cela, considérons à nouveau les rayons géodésiques r_ξ, $\xi \in Z$, introduits au paragraphe 3.1. Comme à la fin de la preuve du théorème 3.1, on peut trouver une constante $R \geq 0$ qui ne dépend que de l'hyperbolicité de G, et une constante E qui ne dépend que de R et p, telles que pour tout $\xi \in B(x)$, on ait

$$|f_\infty(\xi) - f(x)|^p \leq E\big(|f_\infty(\xi) - f(r_\xi(|x|))|^p + \|df\chi_{B(x,R)}\|_p^p\big).$$

Par suite $S(f)$ est majorée linéairement en fonction de $\|df\|_p^p$ et de

$$\sum_{x \in V(G)} \fint_{B(x)} |\sum_{k \geq |x|} df(r_\xi(k))|^p d\mathcal{H}(\xi).$$

Les boules $B(x)$, $x \in \{|x| = n\}$, recouvrent Z sans trop se chevaucher (car G est à valence bornée). Donc la somme précédente est majorée linéairement par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_Z |\sum_{k \geq n} df(r_\xi(k))|^p a^n d\mathcal{H}(\xi).$$

En appliquant le lemme 3.3 à $v_n = df(r_\xi(n))$, puis le lemme 3.2, on voit que cette dernière somme est majorée linéairement en fonction de $\|df\|_p^p$. D'où l'inégalité (4).

On a montré que $\mathrm{Im}(\mathcal{E}) = B_p(d)$, de plus les inégalités (3) et (4) montrent que $\mathcal{E}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels normés de $\ell_p H^1(J)$ sur $B_p(d)$. $\square$

4 Quelques propriétés de l'espace $B_p(d)$.

Soit $d \in J$ une métrique Ahlfors-régulière de dimension Q et de mesure de Hausdorff $\mathcal{H}$. Dans un premier temps, on montre que les éléments de $B_p(d)$ satisfont une inégalité géométrique de type Sobolev-Hajlasz. Ensuite, on étudie $B_Q(d)$ en liaison avec le Q-module des familles de courbes de (Z, d) ; le théorème 0.3 en découle.

4.1 Une inégalité géométrique.

Pour $u \in B_p(d)$ et $r > 0$, posons

$$\rho_r(\xi) = \Big(\int_{B(\xi,r)} \frac{|u(\xi) - u(\eta)|^p}{d(\xi,\eta)^{2Q}} d\mathcal{H}(\eta)\Big)^{1/p}.$$

Proposition 4.1 *La fonction ρ_r appartient à $L^p(Z, \mathcal{H})$. De plus, pour tout $\xi, \eta \in Z$ avec $4d(\xi,\eta) \leq r$, on a*

$$|u(\xi) - u(\eta)| \leq C d(\xi,\eta)^{Q/p}(\rho_r(\xi) + \rho_r(\eta)),$$

où C est une constante qui ne dépend que de p et des constantes de régularité de $\mathcal{H}$.

Preuve : Puisque $u \in B_p(d)$, la fonction ρ_r appartient clairement à $L^p(Z, \mathcal{H})$. Choisissons une boule B, de rayon $2d(\xi,\eta)$, qui contient ξ et η et qui est contenue dans $B(\xi, r) \cap B(\eta, r)$. C'est possible car $r \geq 4d(\xi, \eta)$. Puisque $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
[\rho_r(\xi) + \rho_r(\eta)]^p &\geq \rho_r^p(\xi) + \rho_r^p(\eta) \\
&\geq \int_B \frac{|u(\xi) - u(\zeta)|^p}{d(\xi,\zeta)^{2Q}} + \frac{|u(\eta) - u(\zeta)|^p}{d(\eta,\zeta)^{2Q}} d\mathcal{H}(\zeta) \\
&\geq C_1 \int_B \frac{(|u(\xi) - u(\zeta)| + |u(\eta) - u(\zeta)|)^p}{[4d(\xi,\eta)]^{2Q}} d\mathcal{H}(\zeta) \\
&\geq C_1 \, [4d(\xi,\eta)]^{-2Q} |u(\xi) - u(\eta)|^p \mathcal{H}(B) \\
&\geq C_2 \; d(\xi,\eta)^{-Q} |u(\xi) - u(\eta)|^p,
\end{aligned}$$

où C_1 et C_2 ne dépendent que de Q et des constantes de régularité de $\mathcal{H}$. □

Remarques : Pour $p = Q$ la proposition 4.1 implique que $B_Q(d)$ est contenu dans le Q-espace de Sobolev-Hajlasz de (Z, d), (voir [17], [18] pour sa définition et ses propriétés). D'autre part, il est facile de voir que pour $p > Q$, le p-espace de Sobolev-Hajlasz de (Z, d) est contenu dans $B_p(d)$.

4.2 Espaces de Besov et modules de courbes.

A nouveau d est une métrique Ahlfors-régulière dans J, de dimension Q et de mesure de Hausdorff $\mathcal{H}$.

Théorème 4.2 *Soit u une fonction mesurable de Z qui appartient à $B_Q(d)$. Alors il existe un sous-ensemble négligeable N de Z tel que $u|_{Z\setminus N}$ soit constante le long de presque toute courbe rectifiable de (Z,d), (relativement au Q-module).*

Voici les définitions nécessaires à l'énoncé (voir [18] pour plus de détails). Soit $\mathcal{F}$ une famille de courbes de (Z,d). Son module (ou Q-module) est

$$\operatorname{mod}(\mathcal{F}) = \inf\{\int_Z \rho^Q d\mathcal{H}\},$$

où l'infimum porte sur toutes les fonctions mesurables $\rho : Z \to [0,+\infty]$ qui sont $\mathcal{F}$-*admissibles*, c'est-à-dire qui satisfont $\int_\gamma \rho\, d\ell \geq 1$ pour toute courbe rectifiable $\gamma \in \mathcal{F}$ paramétrée par longueur d'arc. Si aucune courbe de $\mathcal{F}$ n'est rectifiable, on pose $\operatorname{mod}(\mathcal{F}) = 0$. Le module possède les propriétés suivantes

(i) $\operatorname{mod}(\mathcal{F}_1) \leq \operatorname{mod}(\mathcal{F}_2)$, si $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$;

(ii) $\operatorname{mod}\big(\bigcup_{i=1}^\infty \mathcal{F}_i\big) \leq \sum_{i=1}^\infty \operatorname{mod}(\mathcal{F}_i)$.

L'énoncé du théorème signifie que $\operatorname{mod}(\mathcal{F}) = 0$, où $\mathcal{F}$ est la famille des courbes rectifiables γ de (Z,d) pour lesquelles $u|_{\gamma\setminus N}$ est non constante.

Preuve de 4.2 : Considérons les fonctions ρ_r, $r > 0$, définies paragraphe 4.1 avec $p = Q$. La famille de fonctions $\{\rho_r\}_{r>0}$ est décroissante lorsque r décroit vers 0. Soit $N = \rho_1^{-1}(+\infty)$, il est négligeable car $\rho_r \in L^Q(Z,\mathcal{H})$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, posons

$$\mathcal{F}_k = \{\gamma \text{ courbes rectifiables } ; \sup u|_{\gamma\setminus N} - \inf u|_{\gamma\setminus N} \geq \frac{1}{k}\}.$$

La réunion des $\mathcal{F}_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, est égale à $\mathcal{F}$, donc d'après la propriété (ii) du module, il suffit de montrer que $\operatorname{mod}(\mathcal{F}_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

A cette fin, remarquons que

$$\int_Z \rho_r^Q d\mathcal{H} = \int_{d(\xi,\eta)<r} \frac{|u(\xi)-u(\eta)|^Q}{d(\xi,\eta)^{2Q}} d\mathcal{H}(\xi) d\mathcal{H}(\eta),$$

donc $\lim_{r\to 0} \int_Z \rho_r^Q dH = 0$, puisque $\|u\|_{Q,d} < +\infty$. On va montrer qu'il existe une constante $D > 0$, qui ne dépend que des constantes de régularité de $\mathcal{H}$ et de Q, telle que la fonction $Dk\rho_r$ soit $\mathcal{F}_k$- admissible pour $r \leq 1$. On aura bien $\operatorname{mod}(\mathcal{F}_k) = 0$.

Soit $\gamma \in \mathcal{F}_k$, soit $\ell(\gamma)$ sa longueur, et soit $\gamma(t)$, $t \in [0,\ell(\gamma)]$, son paramétrage par longueur d'arc. Par définition, on a

$$\int_\gamma \rho_r d\ell = \int_0^{\ell(\gamma)} \rho_r(\gamma(t))dt.$$

Pour ϵ avec $0 < \epsilon < \min\{\frac{r}{4}, \ell(\gamma)\}$ et pour $t \in [0, \ell(\gamma) - \epsilon]$, la proposition 4.1 donne

$$\rho_r(\gamma(t)) + \rho_r(\gamma(t+\epsilon)) \geq C^{-1}\epsilon^{-1}|u(\gamma(t+\epsilon)) - u(\gamma(t))|. \tag{5}$$

Si $u \circ \gamma$ n'est pas intégrable sur $[0, \ell(\gamma)]$, on en déduit que $\int_\gamma \rho_r d\ell = +\infty \geq 1$. Supposons $u \circ \gamma$ intégrable, alors pour $0 \leq a < b < \ell(\gamma) - \epsilon$, on obtient

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\ell(\gamma)} \rho_r(\gamma(t))dt &\geq \int_a^b \rho_r(\gamma(t))dt + \int_a^b \rho_r(\gamma(t+\epsilon))dt \\
&\geq C^{-1}\epsilon^{-1} \int_a^b |u(\gamma(t+\epsilon)) - u(\gamma(t))|dt \\
&\geq C^{-1}\epsilon^{-1} \left| \int_{a+\epsilon}^{b+\epsilon} u(\gamma(t))dt - \int_a^b u(\gamma(t))dt \right| \\
&= C^{-1} \left| \frac{1}{\epsilon}\int_b^{b+\epsilon} u(\gamma(t))dt - \frac{1}{\epsilon}\int_a^{a+\epsilon} u(\gamma(t))dt \right|.
\end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, le théorème de différentiation de Lebesgue montre que pour presque tout $a, b \in [0, \ell(\gamma)]$,

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \rho_r(\gamma(t))dt \geq \frac{C^{-1}}{2}|u(\gamma(a)) - u(\gamma(b))|,$$

donc

$$\int_0^{\ell(\gamma)} \rho_r(\gamma(t))dt \geq \frac{C^{-1}}{2} \ (\operatorname{ess\,sup} u \circ \gamma - \operatorname{ess\,inf} u \circ \gamma).$$

Si cette dernière quantité est supérieure à $\frac{1}{2k}$, on obtient

$$\int_\gamma \rho_r d\ell \geq \frac{C^{-1}}{4k}.$$

Sinon on modifie l'argument précédent de la manière suivante. Choisissons c et d dans $[0, \ell(\gamma)]$ avec $c < d$, $\gamma(c) \notin N$, $\gamma(d) \notin N$, et $|u(\gamma(c)) - u(\gamma(d))| \geq \frac{1}{2k}$. Pour $s > 0$, on considère alors le paramétrage suivant de γ : $\gamma_s(t) = \gamma(t)$ pour $t \in [0, c]$, $\gamma_s(t) = \gamma(c)$ pour $t \in [c, c+s]$, $\gamma_s(t) = \gamma(t-s)$ pour $t \in [c+s, d+s]$, $\gamma_s(t) = \gamma(d)$ pour $t \in [d+s, d+2s]$, $\gamma_s(t) = \gamma(t-2s)$ pour $t \in [d+2s, \ell(\gamma)+2s]$.

L'inégalité (5) est encore satisfaite par γ_s. Par suite on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ell(\gamma)+2s} \rho_r(\gamma_s(t))dt &\geq \frac{C^{-1}}{2}\big(\operatorname{ess\,sup} u \circ \gamma_s - \operatorname{ess\,inf} u \circ \gamma_s\big) \\
&\geq \frac{C^{-1}}{2}|u(\gamma(c)) - u(\gamma(d))| \\
&\geq \frac{C^{-1}}{4k}.
\end{aligned}$$

Puisque $\gamma(c) \notin N$ et $\gamma(d) \notin N$, le membre de gauche ci-dessus tend vers $\int_\gamma \rho_r d\ell$ lorsque s tend vers 0. Ainsi, on obtient à nouveau

$$\int_\gamma \rho_r d\ell \geq \frac{C^{-1}}{4k},$$

ce qui montre que $4Ck\rho_r$ est $\mathcal{F}_k$-admissible. $\square$

4.3 Cas des espaces de Loewner.

On termine la preuve du théorème 0.3. Rappelons la définition des espaces de Loewner. Soit E et F deux continua disjoints non réduits à un point de (Z, d). Soit $\operatorname{mod}(E, F)$ le module de l'ensemble des courbes de Z qui relient E à F, et soit $\Delta(E, F)$ la quantité suivante :

$$\Delta(E, F) = \frac{\min\{\operatorname{diam} E, \operatorname{diam} F\}}{\operatorname{distance}(E, F)}.$$

L'espace métrique (Z, d) est un *espace de Loewner*, s'il existe un homéomorphisme croissant $\Psi :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$, tel que pour tous les E et F, on ait :

$$\operatorname{mod}(E, F) \geq \Psi(\Delta(E, F)).$$

La proposition suivante combinée au théorème 4.2, achève la preuve du théorème 0.3.

Proposition 4.3 *Supposons que (Z, d) soit un espace de Loewner. Soit u une fonction mesurable de Z et N un sous-ensemble négligeable de Z tel que $u|_{Z\setminus N}$ soit constante le long de presque toute courbe rectifiable de (Z, d). Alors u est essentiellement constante.*

Preuve : Un espace de Loewner de dimension Q vérifie la propriété Q-MEC "Main Equivalence Class" (voir [30]). Rappelons sa définition. Etant donnée une fonction Q-intégrable $\rho : Z \to [0, +\infty]$, considérons la relation d'équivalence suivante sur Z : $x \sim y$ si $x = y$, ou s'il existe une courbe rectifiable γ reliant x à y avec $\int_\gamma \rho \, d\ell < +\infty$.

On dit que Z vérifie la propriété Q-MEC si pour toute fonction Q-intégrable ρ, il existe une classe d'équivalence G relative à ρ, appelée classe principale, telle que $\mathcal{H}(Z \setminus G) = 0$.

Soit $\mathcal{F}$ la famille des courbes rectifiables de (Z, d) le long desquelles $u|_{Z\setminus N}$ n'est pas constante. Le module de $\mathcal{F}$ est nul, donc il existe des fonctions mesurables $\rho_n : Z \to [0, +\infty]$, telles que

$$\forall \gamma \in \mathcal{F}, \int_\gamma \rho_n d\ell \geq 1 \ ; \ \text{et} \quad \Big(\int_Z \rho_n^Q d\mathcal{H}\Big)^{1/Q} \leq 2^{-n}.$$

Posons $\rho = \sum_n \rho_n$. Alors ρ est Q-intégrable et

$$\forall \gamma \in \mathcal{F}, \quad \int_\gamma \rho \, d\ell = +\infty.$$

Soit G la classe principale de la relation d'équivalence associée à ρ. Alors $\mathcal{H}(G \setminus N) = 0$. De plus si x et y sont deux points distincts de $G \setminus N$, il existe une courbe rectifiable γ reliant x à y, avec $\int_\gamma \rho d\ell < +\infty$. Donc $\gamma \notin \mathcal{F}$ et par suite $u(x) = u(y)$. $\square$

5 Exemples.

On présente des exemples de jauges conformes J qui satisfont l'inégalité $p(J) < \mathrm{Cdim}(J)$. D'après le corollaire 0.4, la jauge J ne possède pas de métrique de Loewner Ahlfors-régulière. Les contre-exemples à la question 0.5 sont décrits au paragraphe c).

a) Si Z n'est pas connexe, alors $\ell_p H^1(J) \neq 0$ pour tout $p \in [1, +\infty[$. En effet écrivons Z comme la réunion disjointe de deux fermés F_1 et F_2. La fonction caractéristique de F_1 appartient à $B_p(d)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Par exemple, le bord du produit libre de deux groupes hyperboliques non élémentaires n'est pas connexe.

b) Soit $(K, d_K, \mathcal{H}_K)$ un espace métrique Ahlfors-régulier de dimension Q_K et soit $Z = K \times [0,1]$ muni de la métrique

$$d((k,t),(k',t')) = d_K(k,k') + |t - t'|.$$

Il est Alhfors-régulier de dimension $Q = Q_K + 1$. Le module d'une famille de courbes de la forme $\{a \times [0,1]; a \in A\}$, où A est un borélien de K, est comparable à la $\mathcal{H}_K$-mesure de A. Donc la dimension conforme de la jauge conforme de (Z, d) est Q (voir [18], 15.10).

Prenons pour d_K une métrique de la forme $d_K = d_0^\alpha$, où d_0 est une métrique sur K et $\alpha \in]0,1[$. Alors pour tout k_0 dans K, la fonction $u(k,t) = d_0(k, k_0)$ appartient à $B_p(d)$ pour tout $p > \alpha Q$. Donc $p(J) \leq \alpha Q$.

c) Le corollaire 0.4 montre que l'égalité $p(J) = \mathrm{Cdim}(J)$ est nécessaire à l'existence d'une métrique Ahlfors-régulière de Loewner dans J. Il existe également des obstructions topologiques : un espace de Loewner de dimension $Q > 1$ est connexe, localement connexe, et sans point de coupure local *i.e.* tout ouvert connexe privé d'un point est encore connexe (voir [19]).

Lorsque Z est le bord d'un groupe hyperbolique, ces conditions topologiques sont équivalentes aux hypothèses de la question 0.5, grâce aux travaux de Bestvina-Mess, Bowditch et Swarup.

Donnons des exemples de groupes hyperboliques dont la jauge au bord satisfait $p(J) < \mathrm{Cdim}(J)$ et vérifie les propriétés topologiques ci-dessus. Si J est la jauge conforme du bord d'un groupe hyperbolique Γ, on désigne plus naturellement $\ell_p H^1(J)$, $p(J)$ et $\mathrm{Cdim}(J)$ par $\ell_p H^1(\Gamma)$, $p(\Gamma)$ et $\mathrm{Cdim}(\partial\Gamma)$.

Soit A, B, C trois groupes hyperboliques, on suppose que C est isomorphe à un sous-groupe quasi-convexe et malnormal de A et de B. D'après un théorème d'I. Kapovich [20], le produit amalgamé $\Gamma = A \underset{C}{*} B$ est hyperbolique. De plus A et B sont quasi-convexes dans Γ, par suite

$$\mathrm{Cdim}(\partial\Gamma) \geq \max\{\mathrm{Cdim}(\partial A), \mathrm{Cdim}(\partial B)\}. \tag{6}$$

Désignons par $b^i_{(2)}(\Gamma)$ les nombres de Betti ℓ_2 de Γ (voir [16], [11]). En utilisant la suite exacte de Mayer-Victoris en cohomologie ℓ_2, on obtient

$$b^1_{(2)}(\Gamma) \geq b^1_{(2)}(A) + b^1_{(2)}(B) - b^1_{(2)}(C). \tag{7}$$

Choisissons A, B, C de manière à ce que $\mathrm{Cdim}(\partial B) > 2$ et $b^1_{(2)}(A) > b^1_{(2)}(C)$. Alors l'inégalité (6) donne $\mathrm{Cdim}(\partial\Gamma) > 2$, et l'inégalité (7) montre que $b^1_{(2)}(\Gamma)$ est non nul, c'est à dire que $p(\Gamma) \leq 2$. On obtient finalement $p(\Gamma) < \mathrm{Cdim}(\partial\Gamma)$.

Par exemple, en prenant pour C un groupe libre à $n \geq 2$ générateurs (auquel cas $b^1_{(2)}(C) = n - 1$), et en choisissant A et B parmi les réseaux cocompacts d'immeubles fuchsiens (pour ces groupes la valeur de la dimension conforme est connue [3], et le $b^1_{(2)}$ est minoré par l'opposé de la caractéristique d'Euler), on exhibe des exemples de groupes Γ qui satisfont $p(\Gamma) < \mathrm{Cdim}(\partial\Gamma)$ et dont le bord est homéomorphe à l'éponge de Menger. Celle-ci est connexe, localement connexe et sans point de coupure local, donc on obtient des contre-exemples à la question 0.5.

Références

[1] M. Bonk, J. Heinonen, P. Koskela, *Uniformizing Gromov hyperbolic spaces,* Astérisque **270**, 2001.

[2] M. Bonk, B. Kleiner, *Quasisymmetric parametrizations of two-dimensional metric spheres,* Preprint, 2001.

[3] M. Bourdon, *Sur les immeubles fuchsiens et leur type de quasi-isométrie,* Ergodic theory and Dynamical Systems **20** (2000), 343-364.

[4] M. Bourdon, H. Pajot, *Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings,* Proceedings of the American Mathematical Society **127** (1999), 2315-2324.

[5] M. Bourdon, H. Pajot, *Rigidity of quasi-isometries for some hyperbolic buildings,* Commentarii Mathematici Helvetici **75** (2000), 701-736.

[6] M. Bourdon, H. Pajot, *Quasi-conformal geometry and hyperbolic geometry,* in Rigidity in dynamics and geometry, Eds M. Burger and A. Iozzi, Springer, 2002, 1-15.

[7] M. Bridson, A. Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature,* Grundlheren der Mathematischen Wissenschaften 319, Springer, 1999.

[8] K.S. Brown, *Cohomology of groups,* Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1982.

[9] M. Coornaert, *Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de M. Gromov,* Pacific Journal of Mathematics **159** (1993), 241-270.

[10] M. Coornaert, T. Delzant, A. Papadopoulos, *Géométrie et théorie des groupes, les groupes hyperboliques de M. Gromov,* Lecture Notes in Mathematics **1441**, Springer-Verlag, 1991.

[11] B. Eckmann, *Introduction to ℓ_2-methods in topology : reduced ℓ_2-cohomology, harmonic chains, ℓ_2-Betti numbers,* Israel Journal of Mathematics, **117** (2000), 183-219.

[12] G. Elek, *The ℓ_p-cohomology and the conformal dimension of hyperbolic cones,* Geometriae Dedicata **68** (1997), 263-279.

[13] H. Federer, *Geometric measure theory,* Springer-Verlag, 1969.

[14] E. Ghys, P. De La Harpe, (Eds), *Sur les groupes hyperboliques, d'après Gromov,* Progress in Mathematics **83**, Birkhäuser, 1990.

[15] M. Gromov, *Hyperbolic groups, Essays in Group theory,* Ed. S.M. Gersten, Springer 1987, 72-263.

[16] M. Gromov, *Asymptotic invariants for infinite groups,* London Mathematical Society Lecture Note Series 182, Eds G.A. Niblo and M.A. Roller, 1993.

[17] P. Hajlasz, P. Koskela, *Sobolev met Poincaré,* Memoirs of the American Mathematical Society **145**, 2000.

[18] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces,* Universitext, Springer, 2001.

[19] J. Heinonen, P. Koskela, *Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry*, Acta Matematica **181** (1998), p 1-61.

[20] I. Kapovich, *Quasiconvexity and amalgams,* International Journal of Algebra and Computation **7** (1997), 771-811.

[21] T.Laasko, *Ahlfors Q-regular spaces with arbitrary $Q > 1$ admitting weak Poincaré inequality*, Geometric and Functional Analysis, **10** (2000), 111-123.

[22] P. Pansu, *Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré un,* PDE and Geometry 1988, Rend. Sem. Mat. Torino, Fasc. Spez. (1989), 95-120.

[23] P. Pansu, *Cohomologie L^p : invariance sous quasiisométries*, Preprint Université Paris-Sud (1995).

[24] P. Pansu, *Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement,* Preprint Université Paris-Sud (1998).

[25] P. Pansu, *L^p-cohomology and pinching,* in Rigidity in dynamics and geometry, Eds M. Burger and A. Iozzi, Springer, 2002, 377-386.

[26] K.R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces,* Academic Press, New York, 1967.

[27] F. Paulin, *Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord,* Journal of the London Math. Soc. **54** (1996), 50-74.

[28] A.Reznikov, *Analytic Topology of Groups, Actions, Strings and Varieties*, Preprint (1999).

[29] S. Semmes, *Metric spaces and mappings seen at many scales (appendix)*, in *Metric structures for Riemannian and Non-Riemannian spaces*, M. Gromov, Progress in Mathematics, Birkhaüser, 1999.

[30] N. Shanmugalingam, *Newtonian spaces : an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces,* Revista Matematica Iberoamericana **16** (2000), 243-279.

[31] R.S. Strichartz, *Analysis of the Laplacian on the Complete Riemannian Manifold,* Journal of Functional Analysis **52** (1983), 48-79.

[32] H. Triebel, *Theory of Function Spaces,* Monographs in Math., Birkaüser, 1983.

[33] J. Tyson, *Quasiconformality and quasisymmetry in metric measure spaces*, Annales Academiae Scientiarium Fennicae (Mathematica) **23** (1998), p 525-548.

Juin 2002