Ann. Inst. Fourier, Grenoble
Article à paraître.

COHOMOLOGIE ℓ_p EN DEGRÉS SUPÉRIEURS ET DIMENSION CONFORME

par Marc BOURDON

RÉSUMÉ. — On donne une condition suffisante pour l'annulation de la cohomologie ℓ_p en degré supérieur à 2, des complexes simpliciaux hyperboliques uniformément contractiles. Comme application, on obtient une minoration de la dimension conforme du bord à l'infini de certains groupes hyperboliques.

ABSTRACT. — We establish a sufficient condition for vanishing of the ℓ_p-cohomology of hyperbolic uniformly contractible simplicial complexes, in degree at least 2. As an application, a geometric lower bound for the conformal dimension of the boundary at infinity of some hyperbolic groups, is obtained.

Introduction

Dans ce papier nous établissons des liens entre plusieurs invariants de quasi-isométries des complexes simpliciaux hyperboliques au sens de M. Gromov.

Les complexes simpliciaux X considérés ici sont munis d'une métrique de longueur, telle que

(i) il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que tout simplexe de X soit de diamètre inférieur à C,

(ii) il existe une fonction $N : [0, +\infty) \to \mathbb{N}$ telle que toute boule de rayon r contienne au plus $N(r)$ simplexes de X.

Un tel complexe sera dit *à géométrie bornée*. Pour $p \in (1, +\infty)$, on désigne par $\ell_p H^\bullet(X)$ (resp. $\ell_p \overline{H^\bullet}(X)$) les espaces de cohomologie ℓ_p (resp. espaces de cohomologie ℓ_p réduits) de X ; voir la section 1.1 pour leur définition.

Mots-clés : cohomologie ℓ_p, dimension conforme, espaces hyperboliques.
Classification math. : 20F65, 20F67, 30L10.

Tous les espaces hyperboliques X considérés ici sont géodésiques et propres. En général on supposera aussi que X est *non dégénéré*, c'est-à-dire que qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que tout point $x \in X$ se situe à distance inférieure à C des trois côtés d'un triangle idéal Δ_x.

On désigne par $\partial_\infty X$ le bord à l'infini d'un espace hyperbolique X, et on note respectivement $\mathrm{Topdim}(\partial_\infty X)$ et $\mathrm{Confdim}(\partial_\infty X)$ la dimension topologique et la dimension conforme Ahlfors régulière de $\partial_\infty X$. Voir la section 1.6 pour la définition de cette dernière.

Cohomologie ℓ_p et dimension conforme

En degré 1 les liens entre cohomologie ℓ_p et dimension conforme sont bien étudiés [27, 21, 17, 11, 10]. En particulier, si X est un complexe simplicial à géométrie bornée, simplement connexe, hyperbolique non dégénéré, alors d'après un théorème de Gromov [21], le $\ell_p H^1(X)$ est non trivial pour tout $p > \mathrm{Confdim}(\partial_\infty X)$, et il est réduit pour tout $p > 1$.

En degrés supérieurs on dispose des théorèmes d'annulation de Donnelli-Xavier [16] et P. Pansu [29], qui donnent une condition suffisante d'annulation de la cohomologie ℓ_p des variétés riemanniennes à courbure négative, en fonction du pincement de la courbure.

Le résultat principal de ce papier établit une condition suffisante d'annulation de la cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux hyperboliques, en fonction de la dimension conforme de leur bord :

Théorème A. — *Soit X un complexe simplicial à géométrie bornée, uniformément contractile, hyperbolique et non dégénéré. Alors, $\ell_p H^k(X) = 0$ pour $k \geqslant 2$ et $p > \frac{\mathrm{Confdim}(\partial_\infty X)}{k-1}$.*

Dans le cas des variétés, la dualité de Poincaré entraine que :

Corollaire B. — *Soit M une variété riemannienne, sans bord, complète, de dimension $n \geqslant 2$, à géométrie bornée, uniformément contractile, hyperbolique (au sens de Gromov) et non dégénérée. Ecrivons $Q_{\mathrm{top}} := \mathrm{Topdim}(\partial_\infty M)$ et $Q_{\mathrm{conf}} := \mathrm{Confdim}(\partial_\infty M)$ pour simplifier. Alors $Q_{\mathrm{top}} = n-1$, et on a :*

(a) $\ell_p H^k(M) = 0$ pour $2 \leqslant k \leqslant n-2$ et $p \in (1, \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{k+Q_{\mathrm{conf}}-Q_{\mathrm{top}}}) \cup (\frac{Q_{\mathrm{conf}}}{k-1}, +\infty)$.

(b) $\ell_p H^k(M) = \ell_p \overline{H^k}(M)$ pour $2 \leqslant k \leqslant n-1$ et $p \in (1, \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{k-1+Q_{\mathrm{conf}}-Q_{\mathrm{top}}})$.

(c) $\ell_p H^1(M) = 0$ pour $p \in (1, \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{1+Q_{\mathrm{conf}}-Q_{\mathrm{top}}})$, et $\ell_p H^1(M) = \ell_p \overline{H^1}(M)$ pour tout $p > 1$.

(d) $\ell_p H^{n-1}(M) = 0$ *pour* $p \in (\frac{Q_{\mathrm{conf}}}{n-2}, +\infty)$, *et* $\ell_p H^{n-1}(M) = \ell_p \overline{H^{n-1}}(M)$ *pour* $p \in (1, \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{Q_{\mathrm{conf}}-1})$.

De plus, pour de telles variétés M on a aussi $\ell_p H^0(M) = \ell_p H^n(M) = 0$ pour tout $p > 1$ ([21], [29]).

Exemples.

(a) Si $M = \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ est l'espace hyperbolique réel, on a $Q_{\mathrm{conf}} = Q_{\mathrm{top}} = n-1$, et une description de sa cohomologie ℓ_p se trouve dans [26]. On observe que les intervalles ouverts sur lesquels les espaces $\ell_p H^\bullet(\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}})$ sont nuls (resp. réduits) sont précisément ceux du corollaire B.

(b) En général les intervalles donnés par le corollaire ne sont pas optimaux. Par exemple si $M = \mathbb{H}^m_{\mathbb{C}}$ est l'espace hyperbolique complexe de dimension réelle $2m$, on a $Q_{\mathrm{conf}} = Q_{\mathrm{top}} + 1 = 2m$, et une description partielle de sa cohomologie ℓ_p se trouve dans [26]. On constate que $\ell_p H^1(\mathbb{H}^m_{\mathbb{C}}) = 0$ si et seulement si $p \in (1, 2m]$, qui est un intervalle d'intérieur strictement plus grand que celui du corollaire B. Toutefois pour certains degrés k, les intervalles ouverts sur lesquels les espaces $\ell_p H^k(\mathbb{H}^m_{\mathbb{C}})$ sont nuls sont ceux du corollaire B. C'est le cas par exemple pour $k = 2$ et $M = \mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}$.

Dimension conforme et dimension topologique

Les résultats présentés plus haut suggèrent d'étudier les circonstances pour lesquelles les dimensions conforme et topologique du bord sont égales.

Pour les groupes hyperboliques G dont le bord est de dimension topologique 1, ce problème a été étudié par J. Mackay : si $\mathrm{Confdim}(\partial_\infty G) = 1$, alors G se scinde en produit amalgamé ou HNN extension au dessus d'un groupe cyclique [23]. Inversement, M. Carrasco donne dans [13] une condition suffisante pour que la dimension conforme soit égale à 1.

En dimension plus grande, on dispose d'un théorème de M. Bonk et B. Kleiner [5] : si le bord d'un groupe hyperbolique G est quasi-Moebius homéomorphe à un espace métrique Ahlfors n-régulier de dimension topologique n, alors G est virtuellement un réseau cocompact de $\mathrm{SO}(n+1, 1)$.

Le résultat suivant donne une condition suffisante pour que la dimension conforme du bord d'un groupe hyperbolique soit strictement supérieure à la dimension topologique.

Théorème C. — *Soit M une variété compacte, lisse, acyclique, de dimension $n \geqslant 3$, à bord non vide. Notons $\{N_i\}_{i=1}^m$ l'ensemble des composantes connexes du bord de M. On désigne par G le groupe fondamental* *de M. On suppose que*

(i) G est hyperbolique.

(ii) Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, le morphisme $\pi_1(N_i) \to G$, induit par l'inclusion de N_i dans M, a pour image un sous-groupe infini, propre, quasi-convexe, noté H_i.

(iii) La famille $\{H_i\}_{i=1}^m$ est malnormale dans G, autrement dit pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$ et pour tout $g \in G$:

$$|gH_ig^{-1} \cap H_j| = +\infty \implies i = j \text{ et } g \in H_i.$$

Alors $\mathrm{Confdim}(\partial_\infty G) > n - 2 = \mathrm{Topdim}(\partial_\infty G)$.

Voici une version quantitative de ce résultat. Certaines des notions apparaissant dans l'énoncé sont définies aux sections 1.6 et 1.7.

Théorème D. — *Pour tout $\alpha \in (0, 1)$, $\delta \geqslant 0$, $C \geqslant 0$, $a_0 > 1$, $\lambda_0 \geqslant 1$, il existe $L \geqslant 0$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites.*

Soit $Q > 0$, et soit M, $\{N_i\}_{i=1}^m$,G, comme au théorème précédent. Supposons que M admette une métrique de longueur, telle que le revêtement universel $\tilde{M}$ de M soit δ-hyperbolique, que les relevés des N_i à $\tilde{M}$ soient C-quasi-convexes, et que $\partial_\infty \tilde{M}$ possède une métrique visuelle Ahlfors Q-régulière dont les paramètres a et λ satisfont $a \geqslant a_0$ et $\lambda \leqslant \lambda_0$. Si, de plus, les distances dans $\tilde{M}$ entre les relevés distincts des N_i sont supérieures à L, alors on a

$$\mathrm{Confdim}(\partial_\infty G) \geqslant (n - 2)\frac{Q}{Q - \alpha}.$$

Exemples. — A la section 3.4, on utilise le théorème D pour donner des exemples de variétés compactes, de dimension $n \geqslant 3$, à courbure -1, à bord (non vide) totalement géodésique, dont la dimension conforme du bord à l'infini du groupe fondamental est arbitrairement proche de $n - 1$.

Remarques.

(1) L'hypothèse (iii) au théorème C est nécessaire comme le montre l'exemple suivant dû à P. Pansu. Soit S une surface hyperbolique fermée et soit $\gamma \subset S$ une géodésique simple fermée. Le groupe fondamental de $X := S \cup_\gamma S$ est hyperbolique, égal au produit amalgamé $G = \pi_1(S) \star_{\pi_1(\gamma)} \pi_1(S)$. Le revêtement universel $\tilde{X}$ de X est constitué de copies de $\mathbb{H}^2$ recollées le long des relevés de γ. Si l'on déforme X en pinçant γ de manière à ce que sa longueur tende vers 0, alors les distances dans $\tilde{X}$ entre les relevés distincts de γ tendent vers $+\infty$. On peut montrer que cela entraine que la dimension de Hausdorff de $\partial_\infty \tilde{X}$ tend vers 1. On a donc $\mathrm{Confdim}(\partial_\infty G) = \mathrm{Topdim}(\partial_\infty G) = 1$. (Voir [13] pour une autre preuve).

Par ailleurs, un théorème de combinaison de Maskit [25] montre que G se réalise comme sous-groupe convexe cocompact de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$. Donc G est le groupe fondamental de la variété à bord $M := \mathbb{H}^3 \cup \Omega(G)/G$, où $\Omega(G) \subset S^2$ désigne l'ensemble de discontinuité de G. L'hypothèse (iii) n'est pas satisfaite car les groupes fondamentaux des composantes de bord de M contiennent tous $\pi_1(\gamma)$.

(2) En général, l'inégalité stricte $\mathrm{Confdim}(\partial_\infty H) < \mathrm{Confdim}(\partial_\infty G)$ n'est pas satisfaite par les sous-groupes quasi-convexes propres malnormaux H des groupes hyperboliques G. Le corollaire 10.4 de [9] décrit toute une classe de contre-exemples parmi les groupes de Coxeter.

Remerciements

Je remercie Andreas Thom dont les questions sont à l'origine du théorème A. Merci également à Mario Bonk et Fédéric Haglund pour les nombreuses discussions. Je remercie Gilles Courtois pour la définition de la fonction f_ϵ dans la preuve de la proposition 2.3. Je suis reconnaissant au rapporteur pour ses suggestions d'amélioration du texte. Ce travail a été inspiré et motivé par les papiers [26], [29] de Pierre Pansu, je l'en remercie vivement. Il s'est déroulé en partie pendant le trimestre "Random walks and asymptotic geometry of groups" à l'IHP début 2014, je remercie ses organisateurs Indira Chatterji, Anna Erschler, Vadim Kaimanovich et Laurent Saloff-Coste. Il a aussi bénéficié d'une aide du projet ANR GdSous et du Labex Cempi.

Conventions et notations

Etant donné $p \in [1, +\infty)$ et un ensemble dénombrable E, on désignera indifféramment par $\ell_p(E)$ l'espace de Banach des suites réelles $(a_i)_{i\in E}$ ou des fonctions $u : E \to \mathbb{R}$, qui sont p-sommables. Deux fonctions réelles f, g définies sur un même ensemble sont dites *comparables*, et on écrit $f \asymp g$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1} f \leqslant g \leqslant Cf$. On écrit $f \lesssim g$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que $f \leqslant Cg$. Un sous-ensemble E d'un ensemble F est dit *propre* si $E \subsetneq F$.

1. Preliminaires

Dans ce chapitre nous discutons les objets, notions et résultats intermédiaires qui seront utiles pour la suite. Les sections 1.1 à 1.4 sont consacrées à des définitions et résultats standards de la cohomologie ℓ_p simpliciale ; aucun n'est original, ils se trouvent par exemple dans [21, Chap. 8]. La section 1.5 porte sur les formes différentielles de Whitney qui permettent de représenter les cochaines simpliciales par des formes différentielles. Aux sections 1.6 et 1.7 sont définies la dimension conforme, les métriques visuelles, et les notions et objets qui leur sont attachés.

1.1. Cohomologie ℓ_p des complexes simpliciaux

Soit X un complexe simplicial à géométrie borné (comme défini dans l'introduction). On note $|\cdot - \cdot|$ sa métrique de longueur. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit X_k l'ensemble des k-simplexes de X, chacun muni d'une orientation choisie arbitrairement une fois pour toutes. Pour $p \in (1, +\infty)$ on pose :

$$C_{p,k}(X) := \{\Sigma_{\sigma \in X_k} a_\sigma \sigma \ ; \ (a_\sigma)_{\sigma \in X_k} \in \ell_p(X_k)\},$$

$$C_p^k(X) := \{u : X_k \to \mathbb{R} \ ; \ u \in \ell_p(X_k)\}.$$

L'opérateur bord standard induit des opérateurs bornés (grâce à la propriété (ii) des complexes à géométrie bornée, voir l'introduction) :

$$\partial_k : C_{p,k}(X) \to C_{p,k-1}(X) \ , \ \delta_k : C_p^k(X) \to C_p^{k+1}(X),$$

qui satisfont pour tout $u \in C_p^k(X)$ et tout $\sigma \in X_{k+1}$: $(\delta_k u)(\sigma) = u(\partial_{k+1}\sigma)$.

Le k-ième groupe d' homologie ℓ_p de X (resp. d'homologie ℓ_p réduite) est

$$\ell_p H_k(X) = \ker \partial_k / \mathrm{Im}\ \partial_{k+1} \quad (\text{resp.} \ell_p \overline{H_k}(X) = \ker \partial_k / \overline{\mathrm{Im}\ \partial_{k+1}}),$$

où $\overline{\mathrm{Im}\ \partial_{k+1}}$ désigne l'adhérence pour la topologie ℓ_p).

De même le k-ième groupe de cohomologie ℓ_p de X (resp. de cohomologie ℓ_p réduite) est

$$\ell_p H^k(X) = \ker \delta_k / \mathrm{Im}\ \delta_{k-1} \quad (\text{resp.} \ell_p \overline{H^k}(X) = \ker \delta_k / \overline{\mathrm{Im}\ \delta_{k-1}}).$$

On munit ces espaces vectoriels de la topologie quotient provenant de la topologie ℓ_p. Les groupes de cohomologie réduite sont alors des espaces de Banach.

1.2. Invariance par quasi-isométrie

Lorsque X est un complexe simplicial fini, ses homologies et cohomologies ℓ_p se confondent avec les homologies et cohomologies ordinaires à coefficients réels. A l'opposé, lorsque X est un complexe simplicial à géométrie bornée uniformément contractile, ses homologies et cohomologies

ℓ_p sont des invariants de quasi-isométrie. Ce résultat, dû à M. Gromov, est l'objet du théorème 1.1 ci-dessous. Rappelons d'abord les définitions nécessaires à son énoncé.

Un complexe à géométrie bornée X est dit *uniformément contractile* s'il est contractile et s'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que toute boule $B(x,r)$ soit contractile dans $B(x,\phi(r))$.

Une application quelconque $F : X \to Y$ entre deux espaces métriques est dite *quasi-Lipschitz* s'il existe des constantes C, D positives telles que pour tout $x, x' \in X$:

$$|F(x) - F(x')| \leqslant C|x - x'| + D.$$

C'est un *plongement uniforme* si elle est quasi-Lipschitz et s'il existe une fonction $\Psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ avec $\lim_{t\to+\infty} \Psi(t) = +\infty$ telle que pour tout $x, x' \in X$

$$\Psi(|x - x'|) \leqslant |F(x) - F(x')|.$$

C'est une *quasi-isométrie* si elle est quasi-Lipschitz, et s'il existe une application quasi-Lipschitz $G : Y \to X$, telle que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient à distance bornée de l'identité.

Théorème 1.1 ([21, p. 219]). — *Soit X et Y deux complexes simpliciaux à géométrie bornée uniformément contractiles, et soit $p \in [1, +\infty)$.*

(a) Tout plongement uniforme $F : X \to Y$ induit canoniquement des morphismes continus $F^\bullet : \ell_pH^\bullet(Y) \to \ell_pH^\bullet(X)$.

(b) Si F_i, $i = 1, 2$, sont comme en a) et sont à distance bornée, alors $F_1^\bullet = F_2^\bullet$.

(c) Si $F : X \to Y$ est une quasi-isométrie alors les $F^\bullet$ sont des isomorphismes d'espaces vectoriels topologiques.

De plus, ces résultats persistent en cohomologie ℓ_p réduite.

Sa preuve est seulement esquissée dans [21], nous renvoyons à [11, Th. 1.1], pour une preuve détaillée. Voir aussi [19, 18]

1.3. Cohomologie ℓ_p relative

Soit à nouveau X un complexe simplicial à géométrie bornée, et soit $Y \subset X$ un sous-complexe. Pour $k \in \mathbb{N}$, les espaces des k-chaines et des k-cochaines ℓ_p relatives sont respectivement définis par

$$C_{p,k}(X,Y) = C_{p,k}(X)/C_{p,k}(Y) \text{ et } C_p^k(X,Y) = \{u \in C_p^k(X) : u|_{Y_k} \equiv 0\}.$$

On les munit des normes induites, ce sont des espaces de Banach tous les deux canoniquement isomorphes à $\ell_p(X_k \setminus Y_k)$.

Les opérateurs bords $\partial_k : C_{p,k}(X,Y) \to C_{p,k-1}(X,Y)$ et cobords $\delta_k : C_p^k(X,Y) \to C_p^{k+1}(X,Y)$ sont bornés. On note par $\ell_pH_k(X,Y)$ et $\ell_pH^k(X,Y)$ les groupes d'homologies et cohomologies ℓ_p relatives, définis de la même manière qu'à la section 1.1. On désigne aussi par $\ell_p\overline{H_k}(X,Y)$ et $\ell_p\overline{H^k}(X,Y)$ les groupes réduits. Ces derniers sont des espaces de Banach.

Lorsque Y est réduit à l'ensemble vide, on retrouve les groupes d'homologie et de cohomologie de X définis à la section 1.1.

Proposition 1.2. — *Pour $p,q \in (1,+\infty)$ avec $p^{-1}+q^{-1}=1$ et $k \in \mathbb{N}$, l'espace $\ell_p\overline{H^k}(X,Y)$ est canoniquement isomorphe au dual de $\ell_q\overline{H_k}(X,Y)$. De même $\ell_q\overline{H_k}(X,Y)$ est canoniquement isomorphe au dual de $\ell_p\overline{H^k}(X,Y)$.*

Démonstration. — Pour $p,q \in (1,+\infty)$ avec $p^{-1}+q^{-1}=1$ et $k \in \mathbb{N}$, considérons l'accouplement

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C_p^k(X,Y) \times C_{q,k}(X,Y) \to \mathbb{R},$$

défini pour tout $u \in C_p^k(X,Y)$ et tout $\tau = \Sigma_{\sigma\in X_k} a_\sigma \sigma \in C_{q,k}(X,Y)$, par :

$$\langle u,\tau\rangle = \sum_{\sigma\in X_k} a_\sigma u(\sigma).$$

Il satisfait pour $u \in C_p^k(X,Y)$ et $\tau \in C_{q,k+1}(X,Y)$: $\langle u,\partial\tau\rangle = \langle\delta u,\tau\rangle$. Désignons respectivement les espaces $\ker\partial_k$, $\ker\delta_k$, $\mathrm{Im}\partial_{k+1}$, $\mathrm{Im}\delta_{k-1}$ par Z_k, Z^k, B_k, B^k. D'après la relation ci-dessus on a $\langle Z^k,\overline{B_k}\rangle = \langle\overline{B^k},Z_k\rangle = 0$. Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induit un accouplement entre $\ell_p\overline{H^k}(X,Y)$ et $\ell_q\overline{H_k}(X,Y)$.

Montrons que l'application

$$\ell_p\overline{H^k}(X,Y) \to \ell_q\overline{H_k}(X,Y)^* \ ,\ [u] \mapsto \langle u,\cdot\rangle,$$

est surjective. Soit $f \in \ell_q\overline{H_k}(X,Y)^*$, elle se relève en une forme linéaire continue de Z_k, puis se prolonge en une forme linéaire continue de $C_{q,k}(X,Y)$ grâce au théorème de Hahn-Banach. Notons la $\tilde{f}$. Puisque $C_p^k(X,Y)$ et $C_{q,k}(X,Y)$ sont respectivement canoniquement isomorphes à $\ell_p(X_k\setminus Y_k)$ et à $\ell_q(X_k\setminus Y_k) \simeq \ell_p(X_k\setminus Y_k)^*$, il existe $u \in C_p^k(X,Y)$ avec $\tilde{f} = \langle u,\cdot\rangle$. Par définition de $\tilde{f}$ on a $\tilde{f}(B_k)=0$, donc pour tout $\tau \in C_{q,k+1}(X,Y)$ on obtient :

$$\langle\delta u,\tau\rangle = \langle u,\partial\tau\rangle = \tilde{f}(\partial\tau) = 0.$$

Par suite $\delta u = 0$ et donc $u \in Z^k$, ce qui montre la surjectivité.

Etablissons à présent l'injectivité. On sait d'après ci-dessus (en échangeant les rôles de $\ell_p\overline{H^k}(X,Y)$ et $\ell_q\overline{H_k}(X,Y)$) que toute forme linéaire de $\ell_p\overline{H^k}(X,Y)$ s'écrit $\langle\cdot,\tau\rangle$ pour un certain $[\tau] \in \ell_q\overline{H_k}(X,Y)$. D'après Hahn-Banach, pour tout élément non nul $[u] \in \ell_p\overline{H^k}(X,Y)$, il existe une forme linéaire de $\ell_p\overline{H^k}(X,Y)$ qui ne s'annule pas en $[u]$. Ainsi il existe $[\tau] \in \ell_q\overline{H_k}(X,Y)$ tel que $\langle u, \tau\rangle \neq 0$. D'où l'injectivité. □

Remarque. — En général il est plus difficile de comparer les cohomologies et homologies non réduites. Par exemple, si X est connexe et infini, alors pour tout $p \in (1, +\infty)$, sa cohomologie ℓ_p en degré 0 est nulle. Par contre son homologie ℓ_p en degré 0 est nulle, si et seulement si il satisfait un inégalité isopérimétrique linéaire (voir [28, Prop. 10], [8, Th. 1.5], pour ce dernier résultat).

1.4. Dualité de Poincaré-Lefchetz

Soit M une variété riemannienne complète connexe orientée de dimension n, éventuellement à bord. On la suppose équipée d'une triangulation lisse telle que le complexe simplicial associé soit à géométrie bornée. Soit $b(M)$ le bord de M. On notera abusivement par M la variété et le complexe simplicial associé à la triangulation.

Théorème 1.3. — *Pour $p \in (1, +\infty)$ et pour $k \in \{0, \dots, n\}$ les espaces vectoriels topologiques $\ell_pH^k(M)$ et $\ell_pH_{n-k}(M, b(M))$ sont canoniquement isomorphes. De même, $\ell_pH_k(M)$ et $\ell_pH^{n-k}(M, b(M))$ sont canoniquement isomorphes. De plus, ces résultats subsistent en cohomologie et homologie réduites.*

Démonstration. — La propriété est bien connue en homologie et cohomologie ordinaires, voir par exemple [19]. L'argument élémentaire qui suit, adapte au cadre ℓ_p une preuve classique.

Montrons que $\ell_pH^k(M)$ et $\ell_pH_{n-k}(M, b(M))$ sont isomorphes. Pour cela, notons $\mathcal{T}$ la subdivision barycentrique de la triangulation initiale de M. Regroupons les simplexes de $\mathcal{T}$ pour former une décomposition cellulaire de M comme suit :

— A tout k-simplexe $\sigma \in M_k$, on associe la réunion c_σ des $(n-k)$-simplexes de $\mathcal{T}$, qui rencontrent σ exactement en son barycentre.
— A tout k-simplexe $\tau \in M_k$, tel que $\tau \subset b(M)$, on associe la réunion d_τ des $(n-k-1)$-simplexes de $\mathcal{T}$ contenus dans $b(M)$, qui rencontrent τ exactement en son barycentre.

La collection $\{c_\sigma : \sigma \subset M\} \sqcup \{d_\tau : \tau \subset b(M)\}$ est une décomposition cellulaire de M. La collection $\{d_\tau : \tau \subset b(M)\}$ en est une de $b(M)$. Les cellules c_σ et d_τ sont respectivement transverses aux simplexes σ dans M et τ dans $b(M)$. On les oriente par transversalité en utilisant les orientations de σ, τ, M et $b(M)$. Associés à la décomposition cellulaire de M, soit $\tilde{C}_{p,k}(M, b(M))$ l'espace des k-chaines cellulaires ℓ_p relatives, et soit $\tilde{\partial}_k$ l'opérateur bord. D'après la discussion ci-dessus, $\tilde{C}_{p,k}(M, b(M))$ est canoniquement isomorphe à $\ell_p(\{c_\sigma : \sigma \in M_k\})$.

Pour $\sigma \in M_k$, notons u_σ la k-cochaine simpliciale définie par $u_\sigma(s) = 1$ si $s = \sigma$, et par $u_\sigma(s) = 0$ sinon. D'après ce qui précède l'application $u_\sigma \mapsto c_\sigma$ se prolonge par linéarité en un isomorphisme d'espaces de Banach

$$\psi_k : C_p^k(M) \to \tilde{C}_{p,n-k}(M, b(M)).$$

Montrons qu'il satisfait

$$\psi_{k+1} \circ \delta_k = \tilde{\partial}_{n-k} \circ \psi_k. \tag{1.1}$$

Pour cela, on interprète géométriquement l'application ψ_k. Soit $\frown$ la forme bilinéaire intersection définie sur $C_k(M) \times \tilde{C}_{n-k}(M, b(M))$. Sa matrice dans les bases $\{\sigma : \sigma \in M_k\}$ et $\{c_\sigma : \sigma \in M_k\}$ est l'identité. Par suite, pour tout $u \in C_p^k(M)$, la chaine $\psi_k(u)$ est l'unique élément de $\tilde{C}_{p,n-k}(M, b(M))$, tel que pour tout $\sigma \in M_k$ on ait : $u(\sigma) = \sigma \frown \psi_k(u)$. On peut vérifier que pour tout $\sigma^k \in M_k$ et tout $\sigma^{k+1} \in M_{k+1}$, on a :

$$\sigma^{k+1} \frown \tilde{\partial} c_{\sigma^k} = \partial \sigma^{k+1} \frown c_{\sigma^k}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \delta u_{\sigma^k}(\sigma^{k+1}) = u_{\sigma^k}(\partial \sigma^{k+1}) &= \partial \sigma^{k+1} \frown \psi_k(u_{\sigma^k}) = \partial \sigma^{k+1} \frown c_{\sigma^k} \\ &= \sigma^{k+1} \frown \tilde{\partial} c_{\sigma^k} = \sigma^{k+1} \frown \tilde{\partial} \psi_k(u_{\sigma^k}). \end{aligned}$$

Donc $\psi_{k+1}(\delta u_{\sigma^k}) = \tilde{\partial} \psi_k(u_{\sigma^k})$, et (1.1) en découle.

Dès lors, $\psi_\bullet$ est un isomorphisme décroissant entre les complexes $(C_p^\bullet(M), \delta_\bullet)$ et $(\tilde{C}_{p,\bullet}(M, b(M)), \tilde{\partial}_\bullet)$. Comme l'homologie de ce dernier est isomorphe à $\ell_p H_\bullet(M, b(M))$, on obtient l'isomorphisme cherché. $\square$

1.5. Formes différentielles de Whitney

Soit M une variété riemannienne complète connexe orientée de dimension n, éventuellement à bord. On la suppose équipée d'une triangulation lisse telle que le complexe simplicial associé soit à géométrie bornée. On notera abusivement par M la variété et le complexe simplicial associé à la triangulation.

On décrit dans ce paragraphe la construction de Whitney qui permet de représenter les cochaines simpliciales par des formes différentielles lisses. Les formes de Whitney en liaison avec la cohomologie L_2 apparaissent dans J. Dodziuk [15]. Nous les utiliserons pour démontrer le théorème A.

Dans la suite, $\Omega^k(M)$ désigne, pour $k \in \mathbb{N}$, l'espace des k-formes différentielles lisses sur M. L'opérateur de différentiation extérieure est noté $d_k : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$. Pour toute k-forme ω on désigne par $|\omega(m)|$ la norme de $\omega(m)$ dans la fibre $\wedge^k T_m^* M$ en $m \in M$.

Décrivons à présent la construction de Whitney. Pour tout sommet $v \in M_0$, notons U_v l'étoile ouverte de v dans le complexe M, c'est-à-dire l'intérieur de la réunion des n-simplexes qui contiennent v. On considère une partition de l'unité lisse $\{\varphi_v\}_{v\in M_0}$ subordonnée au recouvrement $\{U_v\}_{v\in M_0}$. Pour chaque simplexe $\sigma \in M_k$, on choisit un ordre $(v_0, v_1, \dots, v_k)$ sur ses sommets compatible avec son orientation. On note u_σ la k-cochaine simpliciale définie par $u_\sigma(\tau) = 1$ si $\tau = \sigma$, et par $u_\sigma(\tau) = 0$ sinon. On définit alors une k-forme différentielle $W(u_\sigma) \in \Omega^k(M)$, par $W(u_\sigma) = \varphi_{v_0}$ si $k = 0$, et par

$$W(u_\sigma) = k! \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \varphi_{v_i} d\varphi_{v_0} \wedge \dots \wedge d\varphi_{v_{i-1}} \wedge d\varphi_{v_{i+1}} \wedge \dots \wedge d\varphi_{v_k}, \text{ si } k > 0.$$

Son support est contenu dans l'étoile du simplexe σ (c'est-à-dire dans l'union des n-simplexes qui contiennent σ). Par suite W s'étend par linéarité en une application

$$W : C_p^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M),$$

appelée *application de Whitney* associée à la variété triangulée M et à la partition de l'unité $\{\varphi_v\}_{v\in M_0}$. Elle jouit des propriétés suivantes.

Proposition 1.4.

(i) W commute à la différentielle : pour tout $u \in C_p^k(M)$ on a $W(\delta_k u) = d_{k+1}W(u)$.

(ii) En notant A l'évaluation :

$$A : \Omega^\bullet(M) \to \mathbb{R}^{M_\bullet},\ \omega \mapsto (\sigma \mapsto \int_\sigma \omega),$$

la composée $A \circ W$ est égale à l'identité de $C_p^\bullet(M)$.

(iii) Supposons de plus que la partition de l'unité $\{\varphi_v\}_{v\in M_0}$ soit telle que $|d\varphi_v(m)|$ soit majoré indépendamment de $v \in M_0$ et de $m \in M$. Alors il existe une constante $C \geqslant 1$, telle que pour tout $u \in C_p^k(M)$ et tout $m \in M$

$$|W(u)(m)| \leqslant C \sup\{|u(\sigma)| : \sigma \in M_k, m \in U_\sigma\},$$

où U_σ désigne l'étoile ouverte de σ.

Démonstration. — Voir [32, p. 139] pour les deux premières propriétés. La dernière propriété découle de la définition de W et du fait que le complexe simplicial M est à géométrie bornée. ☐

1.6. Dimension conforme

Un espace métrique Z est appelé *doublant* s'il existe une constante $N \in \mathbb{N}$ telle que toute boule $B(z,r)$ peut être recouverte par au plus N boules de rayon $\frac{r}{2}$.

Un espace Z est *uniformément parfait*, s'il existe une constante $0 < \lambda < 1$ telle que pour toute boule $B(z,r)$ de Z avec $0 < r \leqslant \mathrm{diam}(Z)$, on ait $B(z,r) \setminus B(z,\lambda r) \neq \emptyset$.

Soit $Q \in (0,+\infty)$. Un espace Z est dit *Ahlfors Q-régulier* (ou simplement *Q-régulier*), s'il existe une mesure μ sur Z, telle que pour toute boule $B \subset Z$ de rayon $0 < r \leqslant \mathrm{diam}(Z)$ on ait $\mu(B) \asymp r^Q$.

Pour tout quadruplet (z_1, z_2, z_3, z_4) de points deux à deux distincts d'un espace Z, leur *birapport* est

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{d(z_1, z_3)d(z_2, z_4)}{d(z_1, z_4)d(z_2, z_3)}.$$

Un homéomorphisme $f : Z \to Z'$ est dit *quasi-Moebius*, s'il existe un homéomorphisme croissant $\eta : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, tel que pour tout quadruplet (z_1, z_2, z_3, z_4) de points deux à deux distincts de Z, on ait

$$[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] \leqslant \eta([z_1, z_2, z_3, z_4]).$$

Tout espace métrique compact, doublant, uniformément parfait, est quasi-Moebius homéomorphe à un espace Ahlfors régulier (voir [22, 24]). Cela justifie la définition suivante (due à P. Pansu) :

Définition 1.5. — *Soit Z un espace métrique compact, doublant, uniformément parfait. La* dimension conforme Ahlfors régulière *de Z est l'infimum des dimensions de Hausdorff des espaces métriques Ahlfors réguliers quasi-Moebius homéomorphes à Z. On la note* $\mathrm{Confdim}(Z)$.

Puisque la dimension de Hausdorff est supérieure à la dimension topologique, on a toujours $\mathrm{Confdim}(Z) \geqslant \mathrm{Topdim}(Z)$. Comme les propriétés d'être doublant ou uniformément parfait sont préservées par les homéomorphismes quasi-Moebius entre espaces métriques compacts, $\mathrm{Confdim}(Z)$ est un invariant numérique d'homéomorphisme quasi-Moebius de Z.

1.7. Espaces hyperboliques

Soit X un espace hyperbolique, géodésique et propre. Son bord à l'infini $\partial_\infty X$ admet une *métrique visuelle*, c'est-à-dire une métrique d pour laquelle il existe des constantes $a > 1$, $\lambda \geqslant 1$, telles que pour tout $z, z' \in \partial_\infty X$ on ait :

$$\lambda^{-1} a^{-L} \leqslant d(z, z') \leqslant \lambda a^{-L}, \tag{1.2}$$

où L désigne la distance de x_0 (une origine dans X) à une géodésique $(z, z') \subset X$. Les constantes a, λ s'appellent les *paramètres* de la métrique visuelle d.

De plus $X \cup \partial_\infty X$ est naturellement une complétion métrique de X. Il existe une métrique d sur $X \cup \partial_\infty X$ qui satisfait la propriété suivante. Pour tout $x, x' \in X \cup \partial_\infty X$, on a

$$d(x, x') \asymp a^{-L} \min\{1, |x - x'|\},$$

où a est le paramètre exponentiel dans (1.2), et où L désigne la distance dans X entre l'origine x_0 et une géodésique d'extrémités x et x'. Voir [20, 4] pour plus de détails.

Si X est un complexe simplicial à géométrie borné, hyperbolique non dégénéré (comme défini dans l'introduction), alors $\partial_\infty X$ est un espace métrique compact, doublant, uniformément parfait. Puisque toute quasi-isométrie de X sur Y se prolonge en un homéomorphisme quasi-Moebius de $\partial_\infty X$ sur $\partial_\infty Y$, $\mathrm{Confdim}(\partial_\infty X)$ est un invariant de quasi-isométrie de X.

2. Annulation en cohomologie ℓ_p

Dans ce chapitre nous démontrons le théorème A et le corollaire B de l'introduction. L'idée de la preuve du théorème est la suivante. D'après un théorème de M. Bonk et O. Schramm [3], X est quasi-isométrique à une sous-variété convexe à bord d'un espace hyperbolique à courbure -1. Puisque la cohomologie ℓ_p est invariante par quasi-isométrie (théorème 1.1), il suffit de démontrer le théorème dans le cas particulier de ces sous-variétés. Pour cela on représente les cochaines simpliciales par des formes différentielles de Whitney, puis on les intègre en utilisant la construction de Poincaré. Le contrôle des normes ℓ_p s'effectue par une méthode inspirée de P. Pansu [29].

2.1. Un cas particulier

Proposition 2.1. — *Soit M une variété riemanienne complète, connexe, simplement connexe, éventuellement à bord. On suppose de plus :*

(1) M est à courbure sectionnelle inférieure ou égale à -1.

(2) Si M est à bord non vide, noté $b(M)$, l'ouvert $M \setminus b(M)$ est géodésiquement convexe dans M.

(3) Pour toute origine $m_0 \in M$, il existe une constante $D \geqslant 0$ telle que tout point $m \in M$ soit à distance inférieure ou égale à D d'un rayon géodésique complet issu de m_0.

(4) Le bord à l'infini de M, muni d'une métrique visuelle de paramètre e, est Ahlfors Q-régulier pour un certain $Q > 0$.

(5) M est équipée d'une triangulation lisse à géométrie bornée (au sens de l'introduction). On suppose aussi qu'il existe une partition de l'unité lisse $\{\varphi_v\}_{v \in M_0}$ subordonnée au recouvrement de M par les étoiles ouvertes de ses sommets, telle que $|d\varphi_v(m)|$ soit majoré indépendamment de $v \in M_0$ et de $m \in M$.

Alors, pour tout $k \geqslant 2$ et $p > \frac{Q}{k-1}$, on a $\ell_p H^k(M) = 0$.

Notons que les hypothèses (1) et (2), combinées à la simple connexité et la complétude de M, entrainent que M est un espace CAT(-1), en vertu d'un théorème d'Alexandrov. Il est donc hyperbolique au sens de Gromov et uniformément contractile. De plus, le bord à l'infini de tout espace CAT(-1) porte une métrique visuelle de paramètre e (voir [6, Th. 2.5.1]).

Démonstration. — Soit $k \geqslant 2$, $p > \frac{Q}{k-1}$ et $u \in C_p^k(M)$ un k-cocycle. On va montrer qu'il possède une primitive ℓ_p, c'est-à-dire une $(k-1)$-cochaine $v \in C_p^{k-1}(M)$ telle que $\delta v = u$. Pour cela on va combiner la construction de Poincaré et l'application de Whitney W définie en 1.5.

Soit $m_0 \in M \setminus b(M)$ une origine. Pour tout $(k-1)$-simplexe $\sigma \in M_{k-1}$, on considère le cône $C_\sigma := \cup_{m \in \sigma}[m_0, m]$. On oriente C_σ de manière à ce que l'orientation induite sur son bord coïncide avec celle de σ. On pose, pour tout $\sigma \in M_{k-1}$

$$v(\sigma) = \int_{C_\sigma} W(u).$$

Première étape : Montrons que $\delta v = u$. Soit $\tau \in M_k$ un k-simplexe. On note $\sigma_0, \dots, \sigma_k$ ses faces de codimension 1 affectées d'un signe $\pm$, de sorte que $\partial\tau = \sigma_0 + \dots + \sigma_k$. On a pour tout k-simplexe $\tau \in M_k$:

$$\delta v(\tau) = v(\partial\tau) = \sum_{i=0}^{k} v(\sigma_i) = \sum_{i=0}^{k} \int_{C_{\sigma_i}} W(u).$$

Puisque u est un cocycle, $W(u)$ est une forme différentielle fermée d'après la proposition 1.4(i). D'autre part, par le choix de l'orientation de C_τ, on a $\partial C_\tau = \tau - \sum_{i=0}^k C_{\sigma_i}$. Donc Stokes et la proposition 1.4(ii) entrainent que

$$\delta v(\tau) = \int_\tau W(u) - \int_{\partial C_\tau} W(u) = \int_\tau W(u) - \int_{C_\tau} dW(u) = u(\tau).$$

D'où l'égalité cherchée.

Seconde étape : Montrons que $v \in C_p^{k-1}(M)$. L'argument qui suit est inspiré de Pansu [29].

Pour $t \geqslant 0$, soit $\Phi_t : M \to M$, l'application qui associe à tout $m \in M$ le point $\Phi_t(m) \in [m_0, m]$, dont la distance à m est égale à $\min(t, |m_0 - m|)$. Elle est constante égale à m_0 sur la boule fermée $B(m_0, t)$, et elle est lisse sur l'ouvert $M \setminus B(m_0, t)$ (cela découle des hypothèses (1) et (2)). Soit aussi $\mathfrak{X}$ le champ de vecteurs unitaire radial dirigé vers m_0 (et nul en m_0), dont le semi-groupe $(\Phi_t)_{t \geqslant 0}$ est le flot.

Posons $\omega = W(u)$ pour simplifier. Par définition et changement de variable, on a pour tout $\sigma \in M_{k-1}$:

$$v(\sigma) = \int_{C_\sigma} \omega = \int_0^{+\infty} \Big(\int_\sigma \Phi_t^*(\iota_{\mathfrak{X}} \omega) \Big)\, dt.$$

De sorte que $v = \int_0^{+\infty} v_t \, dt$, où $v_t : M_{k-1} \to \mathbb{R}$ est définie par $v_t(\sigma) = \int_\sigma \Phi_t^*(\iota_{\mathfrak{X}} \omega)$.

On majore à présent la norme ℓ_p de v_t et de v. On a pour tout $\sigma \in M_{k-1}$:

$$|v_t(\sigma)| \leqslant \mathrm{vol}_{k-1}(\sigma) \sup_{m \in \sigma} |\Phi_t^*(\iota_{\mathfrak{X}} \omega)(m)|,$$

où vol_{k-1} désigne le $(k-1)$-volume riemannien. Avec les hypothèses (1) et (2), et puisque les simplexes de la triangulation sont de diamètres majorés, on a

$$|v_t(\sigma)| \lesssim e^{-(k-1)t} \sup_{m \in \Phi_t(\sigma)} |\omega(m)|,$$

et on obtient :

$$\|v_t\|_p^p = \sum_{\sigma \in M_{k-1}} |v_t(\sigma)|^p \lesssim e^{-(k-1)pt} \sum_{\sigma \in M_{k-1}} \sup_{m \in \Phi_t(\sigma)} |\omega(m)|^p.$$

Avec l'hypothèse (5) et la proposition 1.4(iii), il vient :

$$\|v_t\|_p^p \lesssim e^{-(k-1)pt} \sum_{\sigma \in M_{k-1}} \sup\{|u(\tau)|^p : \tau \in M_k,\ \Phi_t(\sigma) \cap U_\tau \neq \emptyset\}.$$

En écrivant

$$\sum_{\sigma\in M_{k-1}} \sup\{|u(\tau)|^p : \tau\in M_k,\ \Phi_t(\sigma)\cap U_\tau\neq\emptyset\}$$
$$\leqslant \sum_{\sigma\in M_{k-1}} \sum_{\Phi_t(\sigma)\cap U_\tau\neq\emptyset} |u(\tau)|^p$$
$$= \sum_{\tau\in M_k} |\{\sigma\in M_{k-1} :\ \Phi_t(\sigma)\cap U_\tau\neq\emptyset\}|\cdot|u(\tau)|^p,$$

on obtient

$$\|v_t\|_p^p \lesssim e^{-(k-1)pt} \sum_{\tau\in M_k} |\{\sigma\in M_{k-1} : \Phi_t(\sigma)\cap U_\tau\neq\emptyset\}|\cdot|u(\tau)|^p.$$

On utilise maintenant le lemme :

Lemme 2.2. — *Pour tout $t\geqslant 0$ et tout $\tau\in M_k$, on a*

$$|\{\sigma\in M_{k-1} : \Phi_t(\sigma)\cap U_\tau\neq\emptyset\}| \lesssim e^{Qt}.$$

Avant de le démontrer, achevons la preuve de la proposition. Le lemme combiné à l'inégalité précédente donne :

$$\|v_t\|_p \lesssim \|u\|_p \exp\Big(\frac{-(k-1)p+Q}{p}t\Big).$$

Puisque par hypothèse $p>\frac{Q}{k-1}$, on obtient

$$\|v\|_p = \|\int_0^{+\infty} v_t\ dt\|_p \leqslant \int_0^{+\infty} \|v_t\|_p\ dt \lesssim \|u\|_p.$$

Par hypothèse $u\in C_p^k(M)$, donc $v\in C_p^{k-1}(M)$. □

Démonstration du lemme. — Soit d une métrique visuelle de paramètre e sur $\partial_\infty M$. D'après l'hypothèse (4) l'espace métrique $(\partial_\infty M, d)$ est Q-régulier, soit μ la mesure associée.

Pour un sous-ensemble $E\subset M$ appelons *ombre de E dans $\partial_\infty M$ depuis* m_0, le sous-ensemble

$$O(E) = \{z\in\partial_\infty M : [m_0, z)\cap E\neq\emptyset\}.$$

D'après l'hypothèse (3), pour $R>0$ fixé suffisamment grand et pour tout $m\in M$, l'ombre $O(B(m,R))$ est comparable à une boule de $\partial_\infty M$ de rayon $e^{-|m_0-m|}$. Plus précisément il existe des boules $B(z,r_1), B(z,r_2)\subset\partial_\infty M$, telles que

$$B(z,r_1)\subset O(B(m,R))\subset B(z,r_2),$$

avec

$$C^{-1}e^{-|m_0-m|}\leqslant r_1\leqslant r_2\leqslant Ce^{-|m_0-m|},$$

où C ne dépend que de R et de la constante D de l'hypothèse (3) (voir [6, Lem. 1.6.3]).

Soit $\tau \in M_k$ et soit $\Sigma_{\tau,t} = \{\sigma \in M_{k-1} : \Phi_t(\sigma) \cap U_\tau \neq \emptyset\}$. Choisissons $m_\tau \in \tau$, et $m_\sigma \in \sigma$ pour tout $\sigma \in \Sigma_{\tau,t}$. Puisque la triangulation est à géométrie bornée, le diamètre des étoiles des simplexes est uniformément borné. Donc pour $R > 0$ suffisamment grand, on a $\sigma \subset B(m_\sigma, R)$ et $U_\tau \subset B(m_\tau, R)$. Par suite, les hypothèses (1) et (2) et la définition de $\Sigma_{\tau,t}$ entrainent que

$$\cup\{O(B(m_\sigma, R)) : \sigma \in \Sigma_{\tau,t}\} \subset O(B(m_\tau, 3R)).$$

Posons $L := |m_0 - m_\tau|$, et remarquons que pour $\sigma \in \Sigma_{\tau,t}$ les points m_σ satisfont $|m_0 - m_\sigma| = L + t$, à $2R$ près. Combiné au fait que la triangulation est à géométrie bornée, cela entraine que la famille $\{O(B(m_\sigma, R)) : \sigma \in \Sigma_{\tau,t}\}$ est uniformément localement finie.

Avec ce qui précède il vient :

$$\begin{aligned} |\Sigma_{\tau,t}| e^{-Q(L+t)} &\lesssim \sum_{\sigma \in \Sigma_{\tau,t}} \mu(O(B(m_\sigma, R))) \lesssim \mu(\cup\{O(B(m_\sigma, R)) : \sigma \in \Sigma_{\tau,t}\}) \\ &\lesssim \mu(O(B(m_\tau, 3R))) \lesssim e^{-QL}. \end{aligned}$$

Le lemme en découle. □

2.2. Convexes hyperboliques

Pour un sous-ensemble E d'un espace métrique X, on note $U_r(E)$ le r-voisinage ouvert de E dans X. On désigne par $\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère euclidienne de dimension $(n-1)$, et par $\mathbb{H}^n$ l'espace hyperbolique de dimension $n \geqslant 2$ à courbure -1.

Proposition 2.3. — *Soit $\Lambda \subset \mathbb{S}^{n-1}$ un fermé propre de cardinal au moins 2. Soit $E \subset \mathbb{H}^n$ son enveloppe convexe. Pour tout $0 < r < 1$, il existe une sous-variété $M \subset \mathbb{H}^n$, fermée, lisse, géodésiquement convexe, à bord, telle que $U_{r/2}(E) \subset M \subset U_{2r}(E)$, et qui possède les propriétés suivantes :*

(a) *Pour toute origine $m_0 \in M$, il existe une constante $D \geqslant 0$ telle que tout point $m \in M$ soit à distance inférieure ou égale à D d'un rayon géodésique complet de M issu de m_0.*

(b) *Le bord à l'infini de M s'identifie canoniquement à Λ. La distance euclidienne restreinte à Λ est une métrique visuelle de paramètre e sur $\partial_\infty M$.*

(c) *Il existe sur M une triangulation lisse, à géométrie bornée (au sens de l'introduction), et il existe une partition de l'unité lisse $\{\varphi_v\}_{v\in M_0}$ subordonnée au recouvrement de M par les étoiles ouvertes de ses sommets, telle que $|d\varphi_v(m)|$ soit majoré indépendamment de $v \in M_0$ et de $m \in M$.*

Démonstration.

Première étape : Commençons par définir M. Soit $r > 0$. La fonction définie sur $\mathbb{H}^n$ par $f(x) = \mathrm{dist}(x, E)^2$ jouit des propriétés suivantes (voir [12] pour plus de détails). Puisque E est convexe, elle est de classe C^1 sur $\mathbb{H}^n$ et son gradient ∇f satisfait $\|\nabla_x f\| = 2\,\mathrm{dist}(x, E)$. Comme $\mathbb{H}^n$ est à courbure négative ou nulle, ∇f est Lipschitz sur $\mathbb{H}^n$. Par suite la hessienne de f, notée $\mathrm{Hess} f$, est mesurable définie presque partout sur $\mathbb{H}^n$. De plus il existe $0 < \delta_1 < \delta_2$ tels que pour tout $x \in U_{2r}(E) \setminus \overline{U_{r/2}(E)}$ et tout $v \in T_x\mathbb{H}^n$, on ait

$$\delta_1\|v\|^2 \leqslant (\mathrm{Hess}_x f)(v, v) \leqslant \delta_2\|v\|^2. \tag{2.1}$$

Par suite l'hypersurface de niveau $f(x) = r^2$ est une sous-variété C^1 uniformément strictement convexe. On va la modifier dans $U_{2r}(E) \setminus \overline{U_{r/2}(E)}$ en une sous-variété lisse strictement convexe. Pour cela, soit $\epsilon > 0$ et soit $h_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive, lisse, plate en 0, à support dans $(-\epsilon, \epsilon)$ et telle que pour tout $x \in \mathbb{H}^n$ on ait $\int_{\mathbb{H}^n} h_\epsilon(|x - y|)\, dy = 1$. On pose pour tout $x \in \mathbb{H}^n$

$$f_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{H}^n} f(y)h_\epsilon(|x - y|)\, d\mathrm{vol}(y).$$

La fonction f_ϵ est clairement lisse. Le fait que f soit contractante, et les propriétés de h_ϵ, entrainent que pour tout $x \in \mathbb{H}^n$:

$$|f_\epsilon(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{H}^n} |y - x|h_\epsilon(|x - y|)\, d\mathrm{vol}(y) \leqslant 2\epsilon. \tag{2.2}$$

Ainsi, pour $\epsilon < \frac{r}{4}$, l'ensemble de niveau $f_\epsilon(x) = r^2$ est contenu dans l'ouvert $U_{2r}(E) \setminus \overline{U_{r/2}(E)}$. On calcule à présent les dérivées premières et secondes de f_ϵ. Soit c une géodésique quelconque de $\mathbb{H}^n$. Soit $(g_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot à un paramètre d'éléments loxodromiques de $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, tel que pour tout $x \in c$, l'application $t \mapsto g_t(x)$ soit la paramétrisation par longueur d'arcs de c qui vaut x en $t = 0$. Pour $y \in \mathbb{H}^n$, désignons par c_y la courbe paramétrée $t \mapsto g_t(y)$. Puisque $g_t \in \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$, un changement de variable donne

$$f_\epsilon(g_t(x)) = \int_{\mathbb{H}^n} f(y)h_\epsilon(|x - g_t^{-1}(y)|)\, d\mathrm{vol}(y) = \int_{\mathbb{H}^n} f(g_t(y))h_\epsilon(|x - y|)\, d\mathrm{vol}(y).$$

Par suite :

$$\frac{d}{dt}(f_\epsilon \circ c_x) = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{d}{dt}(f \circ c_y) h_\epsilon(|x-y|)\; d\mathrm{vol}(y),$$

avec $\frac{d}{dt}(f \circ c_y) = \langle \nabla f \circ c_y, \dot{c}_y \rangle$. Comme ∇f est Lipschitz sur $\mathbb{H}^n$, un argument voisin de (2.2) montre qu'il existe une constante $L \geqslant 0$ telle pour tout $x \in U_{2r}(E) \setminus \overline{U_{r/2}(E)}$ on ait

$$\|\nabla_x f_\epsilon - \nabla_x f\| \leqslant \epsilon L. \tag{2.3}$$

On a aussi

$$\frac{d^2}{dt^2}(f_\epsilon \circ c_x) = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{d^2}{dt^2}(f \circ c_y) h_\epsilon(|x-y|)\; d\mathrm{vol}(y), \tag{2.4}$$

avec $\frac{d^2}{dt^2}(f \circ c_y) = \frac{d}{dt}\langle \nabla f \circ c_y, \dot{c}_y \rangle = \langle \nabla_{\dot{c}_y} \nabla f, \dot{c}_y \rangle + \langle \nabla f \circ c_y, \nabla_{\dot{c}_y} \dot{c}_y \rangle$. On en déduit

$$\frac{d^2}{dt^2}(f \circ c_y) \geqslant (\mathrm{Hess} f)(\dot{c}_y, \dot{c}_y) - \kappa(c_y)\|\dot{c}_y\|^2 \|\nabla f \circ c_y\|, \tag{2.5}$$

où κ désigne la courbure de la courbe (c'est-à-dire $\kappa(\gamma) = \|\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma\|$ lorsque γ est paramétrée par longueur d'arc). Puisque c_x est une géodésique, sa courbure est nulle. Plus généralement, la courbure de c_y est celle du bord du δ-voisinage d'une géodésique dans $\mathbb{H}^2$ avec $\delta = \mathrm{dist}(y, c)$. Elle est donc arbitrairement proche de 0 pour ϵ suffisamment petit. Par conséquent (2.1), (2.4), (2.5) entrainent que pour ϵ suffisamment petit devant r, la hessienne de f_ϵ est définie positive sur $U_{2r}(E) \setminus \overline{U_{r/2}(E)}$.

Par suite pour ϵ suffisamment petit, l'ensemble de niveau $f_\epsilon(x) = r^2$ est une sous-variété lisse convexe. On définit M par $M := \{f_\epsilon(x) \leqslant r^2\}$. C'est une sous-variété de $\mathbb{H}^n$, son bord est $b(M) = \{f_\epsilon(x) = r^2\}$. D'après (2.2), elle contient $\overline{U_{r-2\epsilon}(E)}$ et est contenue dans $U_{r+2\epsilon}(E)$. L'inégalité (2.3) montre que le flot de ∇f_ϵ parcouru dans le sens décroissant induit une rétraction de M sur le connexe $\overline{U_{r-2\epsilon}(E)}$. En particulier M est connexe. Finalement M est connexe à bord convexe, donc elle est géodésiquement convexe. De plus son bord $b(M)$ jouit des propriétés suivantes

(i) Sa seconde forme fondamentale est uniformément majorée (d'après (2.1), (2.4)).

(ii) Il existe $\rho_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \rho \leqslant \rho_0$ et pour tout $m \in b(M)$, le voisinage $B(m, \rho) \cap b(M)$ est difféomorphe à une boule de dimension $n-1$.

Seconde étape : On vérifie à présent que M définie ci-dessus possède les propriétés (a), (b), (c) de l'énoncé.

(a) Soit $m_0, m \in M$. Il existe $m' \in E$ avec $|m - m'| \leqslant 2r$. On peut supposer que m' est le centre du modèle en boule de $\mathbb{H}^n$. Soit $z_0 \in \Lambda$ et soit D le demi-hémisphère ouvert de $\mathbb{S}^{n-1}$ centré en z_0. Puisque m' appartient à l'enveloppe convexe de Λ, ce dernier rencontre l'hémisphère $\mathbb{S}^{n-1} \setminus D$. Soit z un point dans leur intersection. L'angle en m' entre entre z_0 et z est supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$. Donc la géodésique (z_0, z) passe à distance controlée de m' dans $\mathbb{H}^n$. L'hyperbolicité de $\mathbb{H}^n$ entraine que l'un des deux rayons géodésiques $[m_0, z_0), [m_0, z)$ de M, passe à distance controlée de m', et donc aussi de m.

(b) Le plongement isométrique totalement géodésique de M dans $\mathbb{H}^n$ se prolonge au bord en un plongement de $\partial_\infty M$ dans $\mathbb{S}^{n-1}$, dont (on voit facilement que) l'image est le fermé Λ. La métrique euclidienne sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est une métrique visuelle de paramètre e sur $\partial_\infty \mathbb{H}^n$. Comme M est convexe dans $\mathbb{H}^n$, sa restriction à Λ est une métrique visuelle de paramètre e sur $\partial_\infty M$.

(c) Etant donnée une triangulation $\mathcal{T}$ de M, on lui associe un complexe simplicial euclidien $K(\mathcal{T})$ défini comme suit : Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ et soit $K(\mathcal{T}) \subset \bigoplus_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{R}$ le complexe simplicial dont les sommets sont les éléments e_v de la base canonique de $\bigoplus_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{R}$, et dont les simplexes sont les simplexes affines $[e_{v_1}, \ldots, e_{v_k}]$ lorsque $[v_1, \ldots, v_k]$ est un simplexe de $\mathcal{T}$. On munit K de la métrique de longueur induite par la métrique euclidienne de ses simplexes. Notons que ses simplexes sont euclidiens réguliers de côtés de longueur $\sqrt{2}$.

Lemme 2.4. — *Il existe sur la variété M définie plus haut, une triangulation lisse $\mathcal{T}$, à géométrie bornée, et il existe un homéomorphisme bilipschitz $\psi : K(\mathcal{T}) \to M$, dont la restriction à chaque simplexe τ de $K(\mathcal{T})$ est un difféomorphisme lisse de τ sur le simplexe correspondant de $\mathcal{T}$, tel que $|d\psi(x)|$ soit minoré et majoré par des constantes strictement positives indépendantes de $x \in K(\mathcal{T})$.*

Admettons pour l'instant le lemme et terminons la preuve de la proposition. Soit $\mathcal{T}$ et ψ comme dans le lemme. Pour chaque sommet s de $K(\mathcal{T})$, définissons une fonction $\beta_s : K(\mathcal{T}) \to [0, 1]$ comme suit. Soit τ un simplexe de $K(\mathcal{T})$. Si $s \notin \tau$, on pose $\beta_s|_\tau = 0$; sinon $\beta_s|_\tau$ est la coordonnée barycentrique associée à s dans le simplexe euclidien τ. La fonction β_s est continue, affine par morceaux, et sa différentielle est bornée indépendamment du sommet s. Son support est l'étoile fermée de s. De plus la famille $\{\beta_s\}_{s\in K_0(\mathcal{T})}$ est une partition de l'unité de $K(\mathcal{T})$.

On considère alors la partition de l'unité $\{\beta_{\psi^{-1}(v)}\circ\psi^{-1}\}_{v\in M_0}$ de M. Par hypothèse la différentielle de ψ^{-1} est bornée. Donc les différentielles des fonctions $\beta_{\psi^{-1}(v)}\circ\psi^{-1}$ sont bornées indépendamment de $v\in M_0$. On peut alors lisser les $\beta_{\psi^{-1}(v)}\circ\psi^{-1}$ au voisinage de leurs supports, puis les normaliser, afin d'obtenir une partition de l'unité $\{\varphi_v\}_{v\in M_0}$ lisse et à différentielles bornées indépendamment de $v\in M_0$. Enfin, si au préalable on a modifié un peu les β_s afin d'en réduire les supports, le support de φ_v est contenu dans l'étoile ouverte de v. □

Démonstration du lemme. — Elle reprend la méthode développée dans [32] pour trianguler les sous-variétés lisses de $\mathbb{R}^n$. On renvoie à [32, §IV B] pour plus de détails.

Montrons d'abord qu'il existe une constante $C\geqslant 1$, telle que pour tout $\lambda\in(0,1)$, l'espace $\mathbb{H}^n$ admet une triangulation lisse $\mathcal{T}_\lambda$, à géométrie bornée, et un homéomorphisme bilipschitz $\psi_\lambda : K(\mathcal{T}_\lambda)\to\mathbb{H}^n$, dont la restriction à chaque simplexe τ de $K(\mathcal{T}_\lambda)$ est un difféomorphisme lisse de τ sur le simplexe correspondant de $\mathcal{T}_\lambda$, et tel que pour tout $x\in K(\mathcal{T}_\lambda)$, on ait :

$$C^{-1}\leqslant\frac{|d\psi_\lambda(x)|}{\lambda}\leqslant C. \tag{2.6}$$

Pour cela, on considère un groupe Γ agissant par isométries de manière proprement discontinue, libre et cocompacte sur $\mathbb{H}^n$. La variété $\mathbb{H}^n/\Gamma$ est compacte lisse. Pour les variétés compactes lisses, l'existence de triangulations avec les propriétés ci-dessus est connue [32]. En passant au revètement universel, on obtient les objets cherchés.

En utilisant les propriétés (i) et (ii) de $b(M)$, on peut modifier légèrement la triangulation $\mathcal{T}_\lambda$ au voisinage de $b(M)$, de manière à ce qu'en plus des propriétés ci-dessus, il existe une constante $\epsilon_0>0$, telle que pour tout $\lambda>0$ suffisamment petit et pour tout sommet s de $K(\mathcal{T}_\lambda)$, on ait

$$\operatorname{dist}\Big(s,\psi_\lambda^{-1}(b(M))\Big)\geqslant\epsilon_0.$$

Ensuite, on remarque que la propriété (i) et les inégalités (2.6) entrainent que dans chaque simplexe τ de $K(\mathcal{T}_\lambda)$, les courbures sectionnelles de $\psi_\lambda^{-1}(b(M))\cap\tau$ sont majorées en valeur absolue par une fonction linéaire de λ^2 indépendante de τ. En effet les inégalités (2.6) montrent que ψ_λ^{-1} est comparable à une homothétie de rapport λ^{-1}. Ainsi pour λ suffisament petit, $\psi_\lambda^{-1}(M)\cap\tau$ est approximativement un polyèdre convexe euclidien, obtenu en intersectant le simplexe τ (qui, rappelons-le, est euclidien, régulier, de longeur de côtés $\sqrt{2}$) avec un demi-espace dont le bord se situe à distance supérieure à ϵ_0 de ses sommets.

Pour λ fixé suffisamment petit, on subdivise barycentriquement les cellules $\psi_\lambda^{-1}(M)\cap\tau$. On obtient une triangulation de $\psi_\lambda^{-1}(M)$. Son image par ψ_λ est la triangulation $\mathcal{T}$ cherchée de M. L'application ψ est la composée de ψ_λ avec l'application naturelle de $K(\mathcal{T})$ sur $\psi_\lambda^{-1}(M)$ qui provient de la subdivision barycentrique de ce dernier. $\square$

2.3. Preuve du théorème A

En plus des deux propositions précédentes, la preuve du théorème A s'appuie sur les deux théorèmes suivants. Le premier est dû à P. Assouad et le second à M. Bonk et O. Schramm (voir aussi [30] pour un cas particulier).

Théorème 2.5 ([1]). — *Soit (Z,d) un espace métrique compact doublant. Pour tout $\alpha\in(0,1)$, il existe $n\in\mathbb{N}$ et un plongement bilipschitz de (Z,d^α) dans $\mathbb{S}^{n-1}$.*

Théorème 2.6 ([3]). — *Soit X et Y deux espaces hyperboliques non dégénérés. Tout homéomorphisme quasi-Moebius de $\partial_\infty X$ sur $\partial_\infty Y$ se prolonge en une quasi-isométrie de X sur Y.*

Démontrons maintenant le théorème A. Soit X un complexe simplicial à géométrie bornée, uniformément contractile, hyperbolique et non dégénéré. Soit $Q>\mathrm{Confdim}(\partial_\infty X)$ et soit $\alpha\in(0,1)$. Par définition de la dimension conforme, il existe un espace métrique (Z,d) qui soit Q-régulier et quasi-Moebius à $\partial_\infty X$.

Puisque Z est Q-régulier, il est doublant. D'après le théorème 2.5, il existe $n\in\mathbb{N}$ et un plongement bilipchitz de (Z,d^α) dans $\mathbb{S}^{n-1}$. Soit $\Lambda\subset\mathbb{S}^{n-1}$ son image. Soit $M\subset\mathbb{H}^n$ la sous-variété à bord donnée par la proposition 2.3. La métrique euclidienne sur Λ est une métrique visuelle de paramètre e sur $\partial_\infty M$. Elle est $\frac{Q}{\alpha}$-régulière, car bilipschitz à d^α. Comme, de plus, M satisfait aux conclusions de la proposition 2.3, les hypothèses de la proposition 2.1 sont satisfaites. Donc $\ell_pH^k(M)=0$ pour $k\geqslant 2$ et $p>\frac{Q}{\alpha(k-1)}$.

Par ailleurs $\partial_\infty M$ est quasi-Moebius à Z et donc à $\partial_\infty X$. Comme il est régulier de dimension non nulle, il est uniformément parfait. Par suite M est non dégénérée (cela découle d'un argument similaire à celui utilisé pour démontrer la première assertion de la proposition 2.3). Le théorème 2.6 entraine que X et M sont quasi-isométriques. La cohomologie ℓ_p étant invariante par quasi-isométrie (théorème 1.1), il découle de ce qui précède que $\ell_p H^k(X) = 0$ pour $k \geqslant 2$ et $p > \frac{Q}{\alpha(k-1)}$. On fait à présent tendre α vers 1 et Q vers $\mathrm{Confdim}(\partial_\infty X)$. □

2.4. Preuve du corollaire B

L'égalité $Q_{\mathrm{top}} = n-1$ découle de [2]. Le corollaire B se déduit du théorème A par des arguments standards (comparer avec [29, Cor. 14]).

Montrons d'abord le (b). Soit $k \geqslant 2$, $p > \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{k-1}$ et soit q le conjugué de p. Le théorème A montre que $\ell_p H^k(M) = 0$. Par suite l'image de $\delta_{k-1} : C_p^{k-1}(M) \to C_p^k(M)$ est égale à $\mathrm{Ker}(\delta_k)$, elle est donc fermée. En passant au dual, on obtient que l'image de $\partial_k = \delta_{k-1}^* : C_{q,k}(M) \to C_{q,k-1}(M)$ est fermée (voir [31, Th. 4.14]). En d'autres termes l'espace $\ell_q H_{k-1}(M)$ est réduit. Le théorème 1.3 de dualité de Poincaré entraine que $\ell_q H^{n-k+1}(M)$ est également réduit. Posons $r = n-k+1$. On a $r \leqslant n-1$. Puisque

$$p > \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{k-1} \iff q < \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{Q_{\mathrm{conf}} - k + 1} = \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{r - 1 + Q_{\mathrm{conf}} - Q_{\mathrm{top}}},$$

on obtient que $\ell_q H^r(M)$ est réduit pour $q \in (1, \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{r-1+Q_{\mathrm{conf}}-Q_{\mathrm{top}}})$. D'où le (b).

Pour obtenir le (a) on considère à nouveau $k \geqslant 2$, $p > \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{k-1}$ et q le conjugué de p. La nullité de $\ell_p H^k(M)$ et la dualité de Poincaré entraine que $\ell_p H_{n-k}(M) = 0$. La proposition 1.2 implique que $\ell_q \overline{H^{n-k}}(M) = 0$. Posons $s = n-k$. On a $s \leqslant n-2$. Comme

$$p > \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{k-1} \iff q < \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{Q_{\mathrm{conf}} - k + 1} = \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{s + Q_{\mathrm{conf}} - Q_{\mathrm{top}}},$$

on obtient que $\ell_q \overline{H^s}(M) = 0$ pour $q \in (1, \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{s+Q_{\mathrm{conf}}-Q_{\mathrm{top}}})$. Par ailleurs, le (b) entraine que $\ell_q H^s(M)$ est réduit pour $q \in (1, \frac{Q_{\mathrm{conf}}}{s+Q_{\mathrm{conf}}-Q_{\mathrm{top}}})$. Il est donc nul, et le (a) en résulte.

Pour démontrer l'annulation dans le (c) on applique l'argument ci-dessus au cas particulier $k = n-1$. Comme M satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire, le $\ell_p H^1(M)$ est réduit pour tout $p > 1$ (voir [28, Prop. 10], [8, Th. 1.5]). Enfin, le (d) découle du théorème A et du (b). □

3. Minoration de la dimension conforme

On démontre dans ce chapitre les théorèmes C et D de l'introduction. L'idée de leurs preuves repose sur les deux observations suivantes. D'une part le théorème A entraine que $\ell_p H^{n-1}(\tilde{M}) = 0$ pour $p > \frac{\mathrm{Confdim}\partial_\infty(\tilde{M})}{n-2}$. D'autre part la dualité de Poincaré-Lefchetz et la proposition 1.2 permettent de relier $\ell_p H^{n-1}(\tilde{M})$ et $\ell_q H^1(\tilde{M}, b(\tilde{M}))$, où q est le conjugué de p. Or, pour ce dernier, on dispose de critères géométriques de non-annulation [10].

3.1. Cohomologie ℓ_p en degré 1

Soit X un complexe simplicial connexe, simplement connexe, à géométrie bornée. On le suppose hyperbolique au sens de Gromov. Soit $Y \subset X$ un sous-complexe. On note $\partial_\infty Y$ son *ensemble limite* dans $\partial_\infty X$, c'est-à-dire $\partial_\infty Y = \overline{Y}^{X \cup \partial_\infty X} \cap \partial_\infty X$. On s'intéresse ici à l'espace $\ell_p H^1(X, Y)$ en liaison avec la géométrie de X, Y, $\partial_\infty X$ et $\partial_\infty Y$.

Puisque X est connexe et simplement connexe, tout cocycle $u \in C_p^1(X, Y)$ s'écrit $u = \delta f$, avec $f : X_0 \to \mathbb{R}$ unique à une constante additive près. Par suite on obtient des isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned} &\ell_p H^1(X) \simeq \{f : X_0 \to \mathbb{R} \ ; \ \delta f \in \ell_p(X_0)\}/\ell_p(X_0) + \mathbb{R}, \\ &\ell_p H^1(X, Y) \simeq \{f : X_0 \to \mathbb{R} \ ; \ \delta f \in \ell_p(X_0) \text{ et } f|_{E_0} \text{ est constante} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{sur chaque composante connexe } E \text{ de } Y\}/\sim, \end{aligned}$$

où $f \sim g$ si et seulement si $f - g$ appartient à $\ell_p(X_0) + \mathbb{R}$ et $(f - g)|_{Y_0}$ est constante. On observe que l'application naturelle $\ell_p H^1(X, Y) \to \ell_p H^1(X)$ est injective lorsque les composantes connexes de Y sont toutes non bornées.

On désigne par $\ell_p H^1_{\mathrm{cont}}(X)$ et $\ell_p H^1_{\mathrm{cont}}(X, Y)$ les sous-espaces de $\ell_p H^1(X)$ et $\ell_p H^1(X, Y)$, respectivement constitués des classes des fonctions f qui se prolongent par continuité à $X_0 \cup \partial_\infty X$. A une constante additive près, le prolongement de f à $\partial_\infty X$ ne dépend que de la classe $[f]$; on le note f_∞. Lorsque X est non dégénéré, les éléments de $\ell_p H^1_{\mathrm{cont}}(X)$ sont entièrement déterminés par leur extension au bord (voir [11, Th. 3.1]).

Les résultats présentés ci-dessous sont implicites dans [10, §4]. On les démontre néanmoins.

Etant donnés un espace métrique Z et deux sous-ensembles $A, B \subset Z$, non réduits à un point, on désigne par $\Delta(A, B)$ leur *distance relative*, c'est-à-dire :

$$\Delta(A, B) := \frac{\mathrm{dist}(A, B)}{\inf\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\}}.$$

Proposition 3.1. — *Pour tout $D > 0$ il existe $\alpha(D) \in (0,1)$, avec $\alpha(D) \to 1$ lorsque $D \to +\infty$, tel que les propriétés suivantes soient satisfaites.*

Soit $Q > 0$ et $R \geqslant 0$. Soit X un complexe simplicial connexe, simplement connexe, à géométrie bornée, hyperbolique non dégénéré, tel que $\partial_\infty X$ possède une métrique visuelle Q-régulière. Soit $Y \subset X$ un sous-complexe tel que :

(1) Pour tout $y \in Y$, il existe une géodésique complète $\gamma \subset X$ contenue dans le R-voisinage de la composante connexe de Y contenant y, telle que $\operatorname{dist}(y,\gamma) \leqslant R$.

(2) Pour toutes composantes connexes distinctes E_1, E_2 de Y, on a

$$\Delta(\partial_\infty E_1, \partial_\infty E_2) \geqslant D.$$

Alors pour $p > \frac{Q}{\alpha(D)}$, et pour tout $z_1, z_2 \in \partial_\infty X$ distincts, ou bien $\{z_1, z_2\} \subset \partial_\infty E$ pour une certaine composante connexe E de Y, ou bien il existe $[f] \in \ell_p H^1_{cont}(X,Y)$ telle que $f_\infty(z_1) \neq f_\infty(z_2)$. En particulier $\ell_p H^1_{cont}(X,Y) \neq 0$ pour $p > \frac{Q}{\alpha(D)}$ lorsque Y est non connexe.

Sa preuve utilisera le

Lemme 3.2. — *Pour tout $D > 0$, il existe $\alpha = \alpha(D) \in (0,1)$, avec $\alpha(D) \to 1$ lorsque $D \to +\infty$, tel que les propriétés suivantes soient satisfaites.*

Soit Z un espace métrique borné, et soit $\mathcal{C}$ une famille dénombrable de sous-ensembles fermés de Z de diamètres non nuls, telle que l'on ait $\Delta(C_1, C_2) \geqslant D$ pour tout $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$. Alors pour tout $z_1, z_2 \in Z$ distincts, ou bien $\{z_1, z_2\} \subset C$ pour un certain $C \in \mathcal{C}$, ou bien il existe une fonction Hölder $u \in C^\alpha(Z)$ telle que :

(i) $u|_C$ est constante pour tout $C \in \mathcal{C}$.

(ii) $u(z_1) \neq u(z_2)$.

Démonstration du lemme. — L'existence de $\alpha \in (0,1)$ résulte de [7, Prop. 1.3]. Le fait que $\alpha(D) \to 1$ lorsque $D \to +\infty$ est le contenu du théorème 1.2 de [10]. $\square$

Démonstration de la proposition 3.1. — D'après le lemme ci-dessus, il existe $\alpha = \alpha(D) \in (0,1)$, avec $\alpha(D) \to 1$ lorsque $D \to +\infty$, tel que, pour toute paire (X,Y) satisfaisant les hypothèses de la proposition, et pour tout

$z_1, z_2 \in \partial_\infty X$ distincts, ou bien $\{z_1, z_2\} \subset \partial_\infty E$ pour une certaine composante connexe E de Y, ou bien il existe une fonction Hölder $u \in C^\alpha(\partial_\infty X)$ telle que :

(i) $u|_{\partial_\infty E}$ est constante pour toute composante E de Y.

(ii) $u(z_1) \neq u(z_2)$.

Pour terminer la preuve, il reste à démontrer que u est l'extension au bord d'une fonction $f : X_0 \to \mathbb{R}$, avec $[f] \in \ell_p H^1_{\mathrm{cont}}(X, Y)$ et $p > \frac{Q}{\alpha}$.

Pour cela choisissons une origine x_0 dans X, et remarquons que (puisque X est non dégénéré) il existe une constante $R' \geqslant 0$, telle que pour tout $x \in X$ on puisse trouver $z \in \partial_\infty X$ avec $\mathrm{dist}(x, [x_0, z)) \leqslant R'$. Soit $x \in X_0$. Si x appartient à une composante E de Y, on pose $f(x) = u(\partial_\infty E)$. Sinon, on choisit $z \in \partial_\infty X$ avec $\mathrm{dist}(x, [x_0, z)) \leqslant R'$, et on pose $f(x) = u(z)$.

Montrons que f est une fonction continue de $X_0 \cup \partial_\infty X$. Soit a le paramètre exponentiel de la métrique visuelle d sur $\partial_\infty X$. Notre hypothèse (1) entraine l'existence d'une constante $R'' \geqslant 0$, telle que tout $x \in X_0$ on puisse trouver $z \in \partial_\infty X$ avec $\mathrm{dist}(x, [x_0, z)) \leqslant R''$ et $f(x) = u(z)$. Soit $x_1, x_2 \in X_0$; leur distance dans $X_0 \cup \partial_\infty X$ est comparable à a^{-L}, où $L = \mathrm{dist}(x_0, [x_1, x_2])$. Puisque u est α-Holder, on obtient :

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |u(z_1) - u(z_2)| \lesssim a^{-\alpha\,\mathrm{dist}(x_0,(z_1,z_2))} \lesssim a^{-\alpha L}.$$

La continuité de f en découle.

Montrons à présent que $\delta f \in \ell_p(X_0)$ pour $p > \frac{Q}{\alpha}$. D'après les inégalités ci-dessus on a

$$\|\delta f\|_p^p = \sum_{[x_1,x_2]\in X_1} |f(x_1) - f(x_2)|^p \lesssim \sum_{[x_1,x_2]\in X_1} a^{-\alpha p\,\mathrm{dist}(x_0,[x_1,x_2])}.$$

Puisque la métrique visuelle d est par hypothèse Q-régulière, un argument classique de recouvrement montre que la somme ci-dessus converge si et seulement si $\alpha p > Q$ (voir par exemple le corollaire 6.7 dans [14]). La proposition en découle. □

Corollaire 3.3. — *Pour tout $\alpha \in (0,1)$, $\delta \geqslant 0$, $a_0 > 1$, $\lambda_0 \geqslant 1$, $C \geqslant 0$, il existe $L \geqslant 0$ tel que les propriétés suivantes soient satisfaites.*

Soit $Q > 0$ et $R > 0$. Soit X un complexe simplicial connexe, simplement connexe, à géométrie bornée, δ-hyperbolique non dégénéré, tel que $\partial_\infty X$ possède une métrique visuelle Q-régulière dont les paramètres a et λ satisfont $a \geqslant a_0$ et $\lambda \leqslant \lambda_0$. Soit $Y \subset X$ un sous-complexe tel que :

(1) Pour tout $y \in Y$, il existe une géodésique complète $\gamma \subset X$ contenue dans le R-voisinage de la composante connexe de Y contenant y, telle que $\mathrm{dist}(y, \gamma) \leqslant R$.

(2) Chaque composante connexe de Y est C-quasi-convexe dans X.

(3) Pour toutes composantes distinctes E_1, E_2 de Y, on a $\operatorname{dist}(E_1,E_2) \geqslant L$.

Alors pour $p > \frac{Q}{\alpha}$, et pour tout $z_1, z_2 \in \partial_\infty X$ distincts, ou bien $\{z_1, z_2\} \subset \partial_\infty E$ pour une certaine composante connexe E de Y, ou bien il existe $[f] \in \ell_p H^1_{cont}(X, Y)$ telle que $f_\infty(z_1) \neq f_\infty(z_2)$. En particulier $\ell_p H^1_{cont}(X, Y) \neq 0$ pour $p > \frac{Q}{\alpha}$.

Démonstration. — On utilise le résultat suivant en combinaison avec la proposition précédente. □

Lemme 3.4 ([10, Lem. 4.7]). — *Soit X un espace δ-hyperbolique et soit d une métrique visuelle sur $\partial_\infty X$. Pour tout $C \geqslant 0$, il existe des constantes $A \geqslant 1$, $B \geqslant 0$, telles que pour tous sous-ensembles C-quasi-convexes $E_1, E_2 \subset X$, dont les ensembles limites sont non vides, on ait*

$$\Delta(\partial_\infty E_1, \partial_\infty E_2) \geqslant A \cdot a^{\frac{1}{2}\operatorname{dist}(E_1,E_2)} - B,$$

où a est le paramètre exponentiel de d. De plus A, B ne dépendent que de C, δ et des paramètres de la métrique visuelle d.

3.2. Preuve du théorème C

En appliquant le théorème A à $\tilde{M}$ et à $k = n - 1 \geqslant 2$, on obtient que $\ell_p H^{n-1}(\tilde{M}) = 0$ pour $p > \frac{\operatorname{Confdim}(\partial_\infty \tilde{M})}{n-2}$. Par suite, pour établir l'inégalité $\operatorname{Confdim}(\partial_\infty \tilde{M}) > n-2$, il suffit d'exhiber un $p > 1$ pour lequel $\ell_p H^{n-1}(\tilde{M})$ est non trivial.

Avec le théorème 1.3, on sait que $\ell_p H^{n-1}(\tilde{M}) \simeq \ell_p H_1(\tilde{M}, b(\tilde{M}))$. D'après la proposition 1.2, pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, les espaces $\ell_p \overline{H_1}(\tilde{M}, b(\tilde{M}))$ et $\ell_q \overline{H^1}(\tilde{M}, b(\tilde{M}))$ sont duaux. Le groupe hyperbolique G est non élémentaire (cela résulte du fait que $\{H_i\}_{i=1}^m$ est une famille malnormale de sous-groupes propres infinis de G). Par suite $\tilde{M}$ satisfait une inégalité isopérimétrique linéaire, donc sa cohomologie ℓ_p en degré 1 (relative ou non) est réduite (voir [28, Prop. 10], [8, Th. 1.5]). En particulier $\ell_q H^1(\tilde{M}, b(\tilde{M}))$ est réduit.

Dès lors, pour démontrer l'inégalité du théorème C, il suffit de trouver un $q > 1$ tel que $\ell_q H^1(\tilde{M}, b(\tilde{M})) \neq 0$. Pour cela on va montrer que les hypothèses de la proposition 3.1 sont satisfaites avec $X = \tilde{M}$ et $Y = b(\tilde{M})$.

Les composantes connexes de $b(\tilde{M})$ sont les relevés à $\tilde{M}$ des N_i. Chacune possède un stabilisateur dans G cocompact, infini et quasi-convexe (c'est un conjugué d'un H_i). Par suite l'hypothèse (1) de la proposition 3.1 est satisfaite.

Soit E_1, E_2 deux composantes connexes distinctes de $b(\tilde{M})$. On veut minorer $\Delta(\partial_\infty E_1, \partial_\infty E_2)$. Commençons par montrer que $\partial_\infty E_1 \cap \partial_\infty E_2 = \emptyset$. Soit respectivement G_1 et G_2 les stabilisateurs dans G de E_1 et E_2. Puisqu'ils agissent de manière cocompacte sur E_1 et E_2, l'intersection $\partial_\infty E_1 \cap \partial_\infty E_2$ s'identifie à $\partial_\infty G_1 \cap \partial_\infty G_2$ dans $\partial_\infty G$. Comme G_1, G_2 sont quasi-convexes dans G, cette dernière est égale à $\partial_\infty(G_1 \cap G_2)$ (voir [20, p. 164]). Les G_j s'écrivent $g_j H_{i_j} g_j^{-1}$ pour $j = 1, 2$. Si le groupe $G_1 \cap G_2$ est infini, l'hypothèse de malnormalité entraine que $i_1 = i_2$ et $g_1 g_2^{-1} \in H_{i_1}$. On a alors $E_2 = g_1 g_2^{-1} E_1 = E_1$, ce qui contredit l'hypothèse $E_1 \neq E_2$. Donc $G_1 \cap G_2$ est un groupe fini, et $\partial_\infty(G_1 \cap G_2)$ est l'ensemble vide.

Supposons à présent que E_1 et E_2 satisfassent $\Delta(\partial_\infty E_1, \partial_\infty E_2) \leqslant 1$, et montrons que $\Delta(\partial_\infty E_1, \partial_\infty E_2) \gtrsim 1$. On peut supposer que $\operatorname{diam}(\partial_\infty E_1) \leqslant \operatorname{diam}(\partial_\infty E_2)$. Soit $B = B(z, r) \subset \partial_\infty \tilde{M}$ une boule dont le rayon r est comparable à $\operatorname{diam}(\partial_\infty E_1)$, telle que $B(z, r/2)$ contienne $\partial_\infty E_1$, et qui rencontre $\partial_\infty E_2$ en un ensemble de diamètre comparable à r. Puisque $\partial_\infty \tilde{M}$ est approximativement autosimilaire ([9, Prop. 3.3]), il existe $g \in G$ tel que pour tout $z_1, z_2 \in B$ on ait $d(gz_1, gz_2) \asymp \frac{1}{r} d(z_1, z_2)$. On a alors $\operatorname{diam}(g\partial_\infty E_1) \asymp \operatorname{diam}(g\partial_\infty E_2) \asymp 1$, et

$$\begin{aligned}\Delta(\partial_\infty E_1, \partial_\infty E_2) &\asymp \Delta(\partial_\infty E_1 \cap B, \partial_\infty E_2 \cap B)\\ &\asymp \Delta(g(\partial_\infty E_1 \cap B), g(\partial_\infty E_2 \cap B))\\ &\gtrsim \Delta(g\partial_\infty E_1, g\partial_\infty E_2).\end{aligned}$$

Les composantes connexes de $b(\tilde{M})$ forment une famille G-invariante. De plus, pour tout $\epsilon > 0$, seules un nombre fini d'entre elles satisfont $\operatorname{diam}(\partial_\infty E) \geqslant \epsilon$. Donc on obtient $\Delta(g\partial_\infty E_1, g\partial_\infty E_2) \gtrsim 1$, puis $\Delta(\partial_\infty E_1, \partial_\infty E_2) \gtrsim 1$. Ainsi l'hypothèse (2) de la proposition 3.1 est satisfaite. Puisque les sous-groupes H_i sont des sous-groupes infinis, propres et malnormaux de G, le sous-complexe $b(\tilde{M})$ n'est pas connexe. Donc la proposition 3.1 entraine que $\ell_q H^1(\tilde{M}, b(\tilde{M}))$ est non trivial pour au moins un $q \in (1, +\infty)$. Comme expliqué plus haut, la minoration stricte de $\operatorname{Confdim}(\partial_\infty \tilde{M})$ en découle.

Reste à établir l'égalité $\operatorname{Topdim}(\partial_\infty \tilde{M}) = n-2$. La dimension topologique de $\partial_\infty G$ est égale à la dimension cohomologique virtuelle de G moins 1, d'après [2]. Cette dernière est inférieure ou égale à $n-1$, car M est une variété compacte asphérique, de dimension n, à bord non vide. Elle est supérieure ou égale à $n-1$, car (d'après ce qui précède) $\ell_p H^{n-1}(\tilde{M}) \neq 0$ pour au moins un $p > 1$, et car $\ell_p H^\bullet(\tilde{M})$ est isomorphe à la cohomologie de G à coefficients dans la représentation régulière droite de G sur $\ell_p(G)$. $\square$

3.3. Preuve du théorème D

La preuve est similaire à celle de l'inégalité du théorème C, sauf que l'on utilise le corollaire 3.3 au lieu de la proposition 3.1.

D'après le corollaire 3.3, l'espace $\ell_q H^1(\tilde{M}, b(\tilde{M}))$ est non nul pour $q > \frac{Q}{\alpha}$. Puisque

$$q > \frac{Q}{\alpha} \Longleftrightarrow p < \frac{Q}{Q-\alpha},$$

on en déduit que $\frac{\operatorname{Confdim}(\partial_\infty \tilde{M})}{n-2} \geqslant \frac{Q}{Q-\alpha}$. □

3.4. Exemples

Comme application du théorème D, donnons des exemples de variétés compactes, de dimension $n \geqslant 3$, à courbure -1, à bord totalement géodésique, dont la dimension conforme du bord à l'infini du groupe fondamental est arbitrairement proche de $n-1$.

Soit V une variété compacte, sans bord, à courbure -1 et de dimension $n \geqslant 3$. Supposons que V contienne une hypersurface W compacte, plongée, totalement géodésique. Supposons aussi que le $\pi_1(W)$ soit séparable dans $\pi_1(V)$, c'est-à-dire qu'il existe une tour de revêtements finis $p_k : V_k \to V$ tel que $\cap_k (p_k)_*(\pi_1(V_k)) = \pi_1(W)$. Pour tout k, choisissons un relevé W_k de W à V_k. Soit M_k une composante connexe de la variété à bord obtenue en découpant V_k le long de W_k. Notons $G_k = \pi_1(M_k)$. Dans $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}} = \tilde{V}_k$ les distances entre les relevés de W_k tendent vers $+\infty$ lorsque $k \to +\infty$. Donc, dans $\tilde{M}_k$, les distances entre les relevés des composantes du bord de M_k tendent également vers $+\infty$. Soit Q_k la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de $\tilde{M}_k$ dans $\mathbb{S}^{n-1} = \partial_\infty \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$, et soit α_k le plus grand exposant α du théorème D appliqué à M_k. D'après ce théorème on a $\alpha_k \to 1$ lorsque $k \to +\infty$, et

$$(n-2)\frac{n-1}{n-1-\alpha_k} \leqslant (n-2)\frac{Q_k}{Q_k-\alpha_k} \leqslant \operatorname{Confdim}(\partial_\infty G_k) \leqslant Q_k \leqslant n-1.$$

Donc $\operatorname{Confdim}(\partial_\infty G_k) \to n-1$ lorsque $k \to +\infty$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. Assouad, « Plongements lipschitziens dans $\mathbf{R}^n$ », *Bull. Soc. Math. France* **111** (1983), n° 4, p. 429-448.

[2] M. Bestvina & G. Mess, « The boundary of negatively curved groups », *J. Amer. Math. Soc.* **4** (1991), n° 3, p. 469-481.

[3] M. Bonk & O. Schramm, « Embeddings of Gromov hyperbolic spaces », *Geom. Funct. Anal.* **10** (2000), n° 2, p. 266-306.

[4] M. Bonk, J. Heinonen & P. Koskela, « Uniformizing Gromov hyperbolic spaces », *Astérisque* (2001), n° 270, p. viii+99.

[5] M. Bonk & B. Kleiner, « Rigidity for quasi-Möbius group actions », *J. Differential Geom.* **61** (2002), n° 1, p. 81-106.

[6] M. Bourdon, « Structure conforme au bord et flot géodésique d'un CAT(−1)-espace », *Enseign. Math. (2)* **41** (1995), n° 1-2, p. 63-102.

[7] ———, « Cohomologie l_p et produits amalgamés », *Geom. Dedicata* **107** (2004), p. 85-98.

[8] ———, « Cohomologie et actions isométriques propres sur les espaces L^p », in *Geometry, Topology, and Dynamics in Negative Curvature* (Bangalore 2010), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 425, Cambridge Univ. Press, 2016, à paraître.

[9] M. Bourdon & B. Kleiner, « Combinatorial modulus, the combinatorial Loewner property, and Coxeter groups », *Groups Geom. Dyn.* **7** (2013), n° 1, p. 39-107.

[10] ———, « Some applications of ℓ_p-cohomology to boundaries of Gromov hyperbolic spaces », *Groups Geom. Dyn.* **9** (2015), n° 2, p. 435-478.

[11] M. Bourdon & H. Pajot, « Cohomologie l_p et espaces de Besov », *J. Reine Angew. Math.* **558** (2003), p. 85-108.

[12] R. D. Canary, D. B. A. Epstein & P. Green, « Notes on notes of Thurston », in *Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 111, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, p. 3-92.

[13] M. Carrasco Piaggio, « Conformal dimension and canonical splittings of hyperbolic groups », *Geom. Funct. Anal.* **24** (2014), n° 3, p. 922-945.

[14] M. Coornaert, « Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov », *Pacific J. Math.* **159** (1993), n° 2, p. 241-270.

[15] J. Dodziuk, « de Rham-Hodge theory for L^2-cohomology of infinite coverings », *Topology* **16** (1977), n° 2, p. 157-165.

[16] H. Donnelly & F. Xavier, « On the differential form spectrum of negatively curved Riemannian manifolds », *Amer. J. Math.* **106** (1984), n° 1, p. 169-185.

[17] G. Elek, « The l_p-cohomology and the conformal dimension of hyperbolic cones », *Geom. Dedicata* **68** (1997), n° 3, p. 263-279.

[18] ———, « Coarse cohomology and l_p-cohomology », *K-Theory* **13** (1998), n° 1, p. 1-22.

[19] S. M. Gersten, « Isoperimetric functions of groups and exotic cohomology », in *Combinatorial and geometric group theory (Edinburgh, 1993)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 204, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, p. 87-104.

[20] M. Gromov, « Hyperbolic groups », in *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, p. 75-263.

[21] ———, « Asymptotic invariants of infinite groups », in *Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993, p. 1-295.

[22] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2001, x+140 pages.

[23] J. M. Mackay, « Spaces and groups with conformal dimension greater than one », *Duke Math. J.* **153** (2010), n° 2, p. 211-227.

[24] J. M. Mackay & J. T. Tyson, *Conformal dimension*, University Lecture Series, vol. 54, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010, Theory and application, xiv+143 pages.

[25] B. Maskit, *Kleinian groups*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 287, Springer-Verlag, Berlin, 1988, xiv+326 pages.

[26] P. Pansu, « Cohomologie L^p, espaces homogènes et pincement », Preprint Université Paris-Sud (1999).

[27] ———, « Cohomologie L^p des variétés à courbure négative, cas du degré 1 », *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino* (1989), n° Special Issue, p. 95-120 (1990), Conference on Partial Differential Equations and Geometry (Torino, 1988).

[28] ———, « Cohomologie L^p en degré 1 des espaces homogènes », *Potential Anal.* **27** (2007), n° 2, p. 151-165.

[29] ———, « Cohomologie L^p et pincement », *Comment. Math. Helv.* **83** (2008), n° 2, p. 327-357.

[30] F. Paulin, « Un groupe hyperbolique est déterminé par son bord », *J. London Math. Soc. (2)* **54** (1996), n° 1, p. 50-74.

[31] W. Rudin, *Functional analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, xiii+397 pages.

[32] H. Whitney, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957, xv+387 pages.

Manuscrit reçu le 15 janvier 2015,
révisé le 6 juillet 2015,
accepté le 10 septembre 2015.

Marc BOURDON
Laboratoire Painlevé
UMR CNRS 8524
Université de Lille 1
59655 Villeneuve d'Ascq (France)
bourdon@math.univ-lille1.fr