SCIENCE & VIE
N° 1054
JUILLET 2005

SCIENCE & VIE

> 110 **Saint suaire**

LA SCIENCE AVEUGLÉE PAR LA PASSION

> 126 **OGM**

LE COUP DE TONNERRE CHINOIS

Qu'y avait-il avant le Big Bang ?

> La question divise les **COSMOLOGISTES**
> Le Big Bang ne reste qu'une **HYPOTHÈSE**
> Des **EXPÉRIENCES** pourraient trancher

> 46 **Epidémie**
APRÈS LA VACHE, LA CHÈVRE FOLLE ?

> 72 **Cerveau**
LA TÉLÉPATHIE HIGH-TECH

> 78 **Pieuvres**
DE L'INTELLIGENCE PLEIN LES BRAS

T 02578 - 1054 - F: 3,90 €

Pointillisme

Les mathématiques sont enfin au point

Répartir uniformément des points sur n'importe quelle surface : deux chercheurs sont parvenus à résoudre ce problème datant de.... l'Antiquité. Déjà, leur exploit promet des applications tous azimuts.

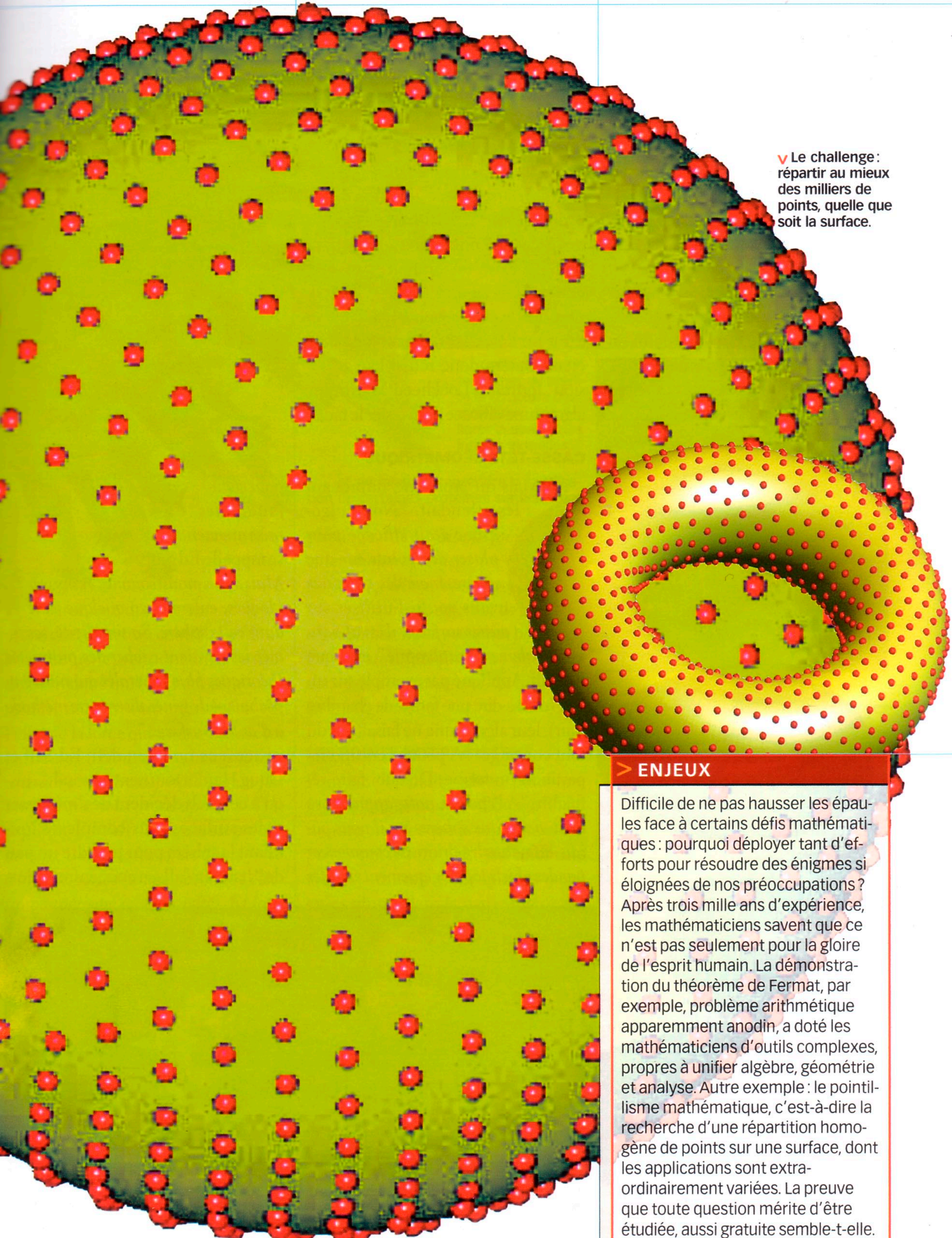
Par Laurent Orluc

E.B.SAFF/VANDERBILT UNIVERSITY

Comment disposer des points de façon uniforme sur n'importe quelle surface ? La question n'a l'air de rien et, pour le profane, elle pourrait aisément passer pour l'un de ces petits défis géométriques gratuits et ludiques dont les mathématiciens ont le secret. Pourtant, la question empoisonne ces derniers depuis l'Antiquité et, au fil des siècles, elle est même devenue un véritable casse-tête plongeant toujours plus profond dans les arcanes de la géométrie et de l'analyse. A tel point qu'elle a fait dire à Stephen Smale, médaillé Fields en 1966, "*qu'une solution, même approchée, constituerait une avancée majeure pour le prochain siècle*". Or, voilà qui est chose faite. Deux mathématiciens, Ed Saff et Doug Hardin, de l'université de Vanderbilt à Nashville (Tennessee) aux Etats-Unis, viennent en effet de publier un article révolutionnaire à plus d'un titre : ils y livrent une solution probante à ce problème pour n'importe quel type de surface, et cela permet d'imaginer une foule d'applications dans des domaines aussi variés que l'électrostatique, la cristallographie, la chimie, la virologie, l'océanographie ou même la finance...

À LA RESCOUSSE DU RADAR

C'est d'ailleurs pour des besoins bien concrets que les deux mathématiciens ont été contactés en 2001 par l'entreprise américaine Lockheed Martin spécialisée dans l'aéronautique militaire. "*Elle venait de mettre au point un nouveau système de radar pour ses avions et cherchait à le tester efficacement dans toutes les directions de l'espace*, explique Ed Saff. *Pour cela, l'entreprise désirait effectuer rapidement 12 000 points de mesures, ce qui revient à disposer presque uniformément tous ces points sur une sphère autour du radar ! Elle fit alors appel à nous.*" Pourquoi eux ? Parce que Ed Saff, rejoint par Doug Hardin, planchait justement depuis quelques années sur le moyen de répartir des points sur cette surface si particulière qu'est la sphère. Avec une stratégie inhabituelle : alors que les mathématiques sont traditionnellement utilisées pour résoudre les problèmes de physique, ils se sont à l'inverse inspirés de la physique pour résoudre le problème →



Le challenge : répartir au mieux des milliers de points, quelle que soit la surface.

> ENJEUX

Difficile de ne pas hausser les épaules face à certains défis mathématiques : pourquoi déployer tant d'efforts pour résoudre des énigmes si éloignées de nos préoccupations ? Après trois mille ans d'expérience, les mathématiciens savent que ce n'est pas seulement pour la gloire de l'esprit humain. La démonstration du théorème de Fermat, par exemple, problème arithmétique apparemment anodin, a doté les mathématiciens d'outils complexes, propres à unifier algèbre, géométrie et analyse. Autre exemple : le pointillisme mathématique, c'est-à-dire la recherche d'une répartition homogène de points sur une surface, dont les applications sont extraordinairement variées. La preuve que toute question mérite d'être étudiée, aussi gratuite semble-t-elle.

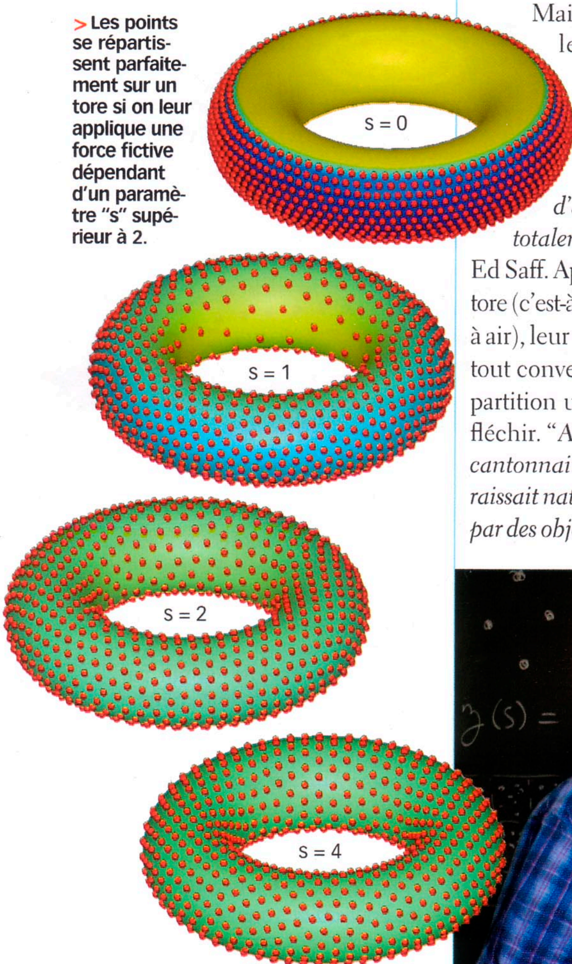
→ mathématique. Leur idée : considérer les points comme des particules en interaction. Car dans ce cas, les lois physiques prévoient que, lorsque le système parvient à l'équilibre, la configuration finale minimise l'énergie en répartissant les points le plus équitablement possible sur la surface. Justement le but recherché.

Concrètement, grâce à un travail analytique sophistiqué sur les équations et à la puissance informatique, les deux chercheurs ont mis au point un algorithme qui place au hasard les milliers de particules ponctuelles sur la surface d'une sphère et fait évoluer leur position suivant leurs interactions. Ils ont alors démontré que leur algorithme permettait d'approcher au mieux la solution optimale de répartition. Certes, il ne s'agit que d'une solution approchée du problème de répartition des points sur une sphère ; mais il n'existe de solution exacte que pour un très petit nombre de points (voir encadré). En l'état, les deux mathématiciens avaient donc réussi leur mission : fournir à Lockheed Martin un algorithme efficace pour tester le radar.

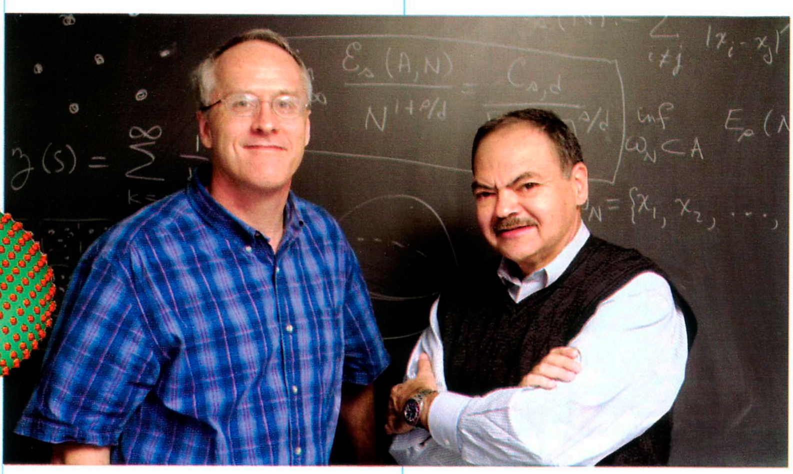
CASSE-TÊTE GÉOMÉTRIQUE

Mais un problème surprenant les attendait. "*Notre algorithme était efficace pour placer des points sur une sphère, mais dès que nous avons voulu l'utiliser sur d'autres surfaces, il est apparu totalement inapproprié*", explique Ed Saff. Appliqué par exemple sur un tore (c'est-à-dire une forme de chambre à air), leur algorithme ne faisait pas du tout converger les points vers une répartition uniforme. De quoi faire réfléchir. "*A l'époque, notre approche se cantonnait aux sphères car il nous paraissait naturel,* a priori, *de commencer par des objets topologiquement simples pour échafauder des raisonnements*, se rappelle Ed Saff. *Mais nous nous sommes retrouvés bloqués, enfermés en quelque sorte dans cette sphère. Sa simplicité, ses symétries devaient cacher des propriétés théoriques plus générales qui nous empêchaient de généraliser notre méthode à d'autres surfaces.*"

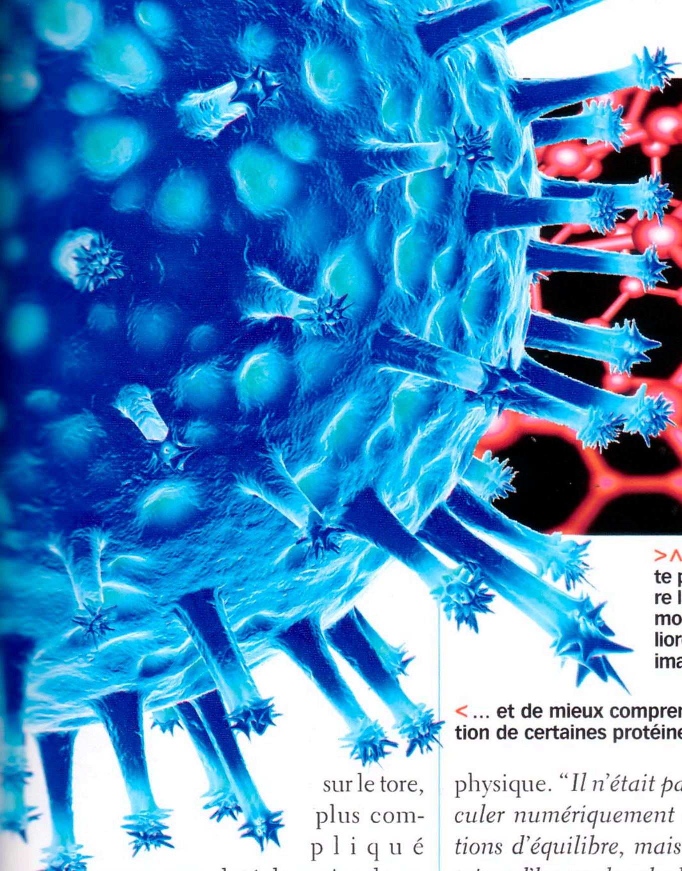
Face à ce nouveau défi, Ed Saff et Doug Hardin tournent en rond… jusqu'à ce qu'ils décident de s'intéresser à des surfaces plus complexes, oubliant la sphère pour prendre un peu de "hauteur". Ils se concentrent alors

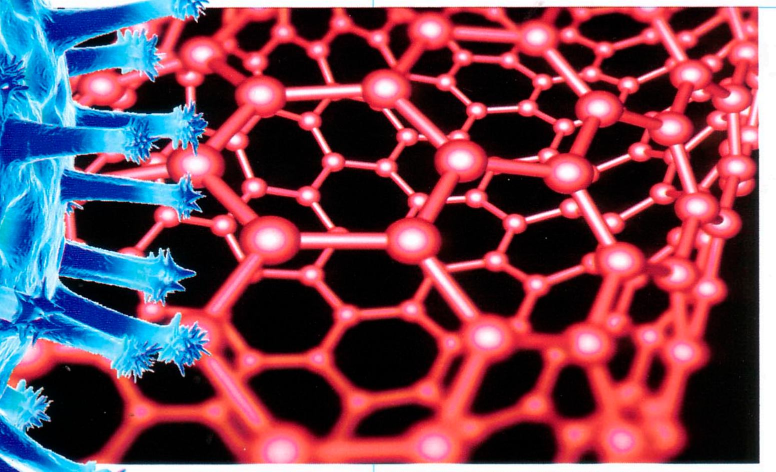


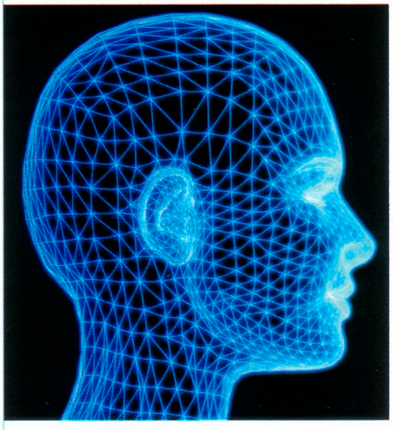
> Les points se répartissent parfaitement sur un tore si on leur applique une force fictive dépendant d'un paramètre "s" supérieur à 2.



> Grâce à Doug Hardin et Ed Saff, le pointillisme mathématique arrive à maturité.







> ^ Cette découverte promet de prédire la structure des molécules, d'améliorer la qualité des images virtuelles…

< … et de mieux comprendre la localisation de certaines protéines sur les virus.

VANDERBILT UNIVERSITY - CORBIS - SPL - COSMOS

sur le tore, plus compliqué parce que doté de moins de symétries et d'un trou central. Les deux chercheurs reprennent ainsi le modèle physique qui fonctionnait avec la sphère, mais en étant plus précis sur l'effet de la force qui interagit entre les particules. "*Nous avons imaginé une interaction fictive dépendant d'un paramètre que nous avons appelé 's'* (1), explique Ed Saff. *Lorsqu'il est proche de zéro, il simule les effets d'une force à longue portée (un peu comme l'électromagnétisme ou la gravité). Et lorsqu'on l'augmente, il imite les effets d'une force à courte portée (comme l'interaction forte qui rend compte de la stabilité du noyau des atomes) où les particules ne ressentent que l'action de leurs plus proches voisines.*" En partant de quelques milliers de points répartis aléatoirement sur la surface et en les faisant interagir, leur algorithme simule alors l'évolution du système physique. "*Il n'était pas facile de calculer numériquement les configurations d'équilibre, mais avec des centaines d'heures de calcul et de puissants algorithmes, nous y sommes parvenus. Et nos simulations nous ont alors donné de nouveaux résultats très riches en enseignements.*"

Nul n'avait mis en évidence un tel lien caché entre maths et physique

LES POINTS INTERAGISSENT…

Pour un "s" petit – donc pour une force à longue portée – l'image finale montre en effet que la répartition des points sur le tore n'est pas uniforme (voir ci-contre). C'est que les particules situées dans la partie intérieure du tore ressentent les effets répulsifs de la force à longue portée exercée par les points qui leur font face. Les particules sont ainsi repoussées vers les bords externes donnant à l'anneau une allure de pneu. En revanche, en augmentant petit à petit le paramètre "s" vers des valeurs proches de 2 – donc en imitant progressivement une force à courte portée – les simulations commencent à produire une répartition des points de plus en plus uniforme. Pour quelle raison ? "*Avec une force fictive à courte portée, les milliers de particules fictives réagissent comme si elles ne 'voyaient' plus que leurs plus proches voisines*, décrit le chercheur. *Elles ne ressentent donc pas l'action de leurs consœurs situées de l'autre côté de l'anneau ou juste en face sur la partie interne, comme c'était le cas avec l'interaction à longue portée. Cette interaction fictive à courte portée agit localement, de proche en proche et sur toute la surface, et finit ainsi par uniformiser la répartition des points.*"

Et c'est là qu'est le tour de force : démonstrations à l'appui, les deux chercheurs vont mettre en évidence un lien caché entre les équations mathématiques qui traduisent le phénomène physique et la dimension spatiale de l'objet sur laquelle elles s'appli- →

→ quent (qui est égal à 2 pour n'importe quelle surface, dont notre tore). "*En fait*, reprend Ed Saff, *ce paramètre 's' conduit à une répartition quasi uniforme des points sur n'importe quelle surface à partir d'une valeur critique bien précise : exactement la valeur de la dimension spatiale de l'objet considéré ! En dessous, les points ne se répartissent en général pas de manière uniforme, alors qu'au-dessus, toujours.*"

PAS SI ANODIN QUE CELA...

C'est ce qu'illustrent les simulations sur tore : il faut et il suffit que "s" soit supérieur à 2 pour que la répartition donnée par l'algorithme soit uniforme sur une surface. Le pari du passage à la complexité a donc été payant : en se concentrant sur des surfaces plus complexes que la sphère, en reformulant les équations, et en faisant tourner de puissants calculateurs, Ed Saff et Dough Hardin ont mis à jour un paramètre qu'ils peuvent aujourd'hui contrôler à loisir ! Avec cette découverte, c'est le pointillisme mathématique qui arrive *in fine* à maturité : on peut désormais l'appliquer à n'importe quel type de surface. Des surfaces ouvertes comme les "selles" ou plus biscornues comme des doubles anneaux fermés sur eux-mêmes, mais aussi des objets de dimensions supérieures... Tout devient possible !

Et les idées ne manquent pas. Car même si elles semblent loin des préoccupations du commun des mortels, ces recherches sur la répartition optimale des points sur une surface promettent bel et bien une multitude d'applications. A commencer par un placement "optimum" des satellites autour de la Terre — qui n'est pas une sphère parfaite — pour tester les différents modèles de climatologie par exemple, ou encore, en océanographie, par l'étude uniforme du fond des mers. A une autre échelle, cette méthode devrait aussi permettre d'interpréter la répartition des spores sur les grains de pollens, ou de comprendre la localisation de certaines protéines à la surface des virus, ou encore celle de défauts à la surface de fullerènes et de cristaux utilisés en nanotechnologies. Et la chimie théorique n'est pas en reste puisque la forme des macromolécules capables de s'autoassembler pourrait être prédite en vue d'élaborer de nouveaux matériaux ! Tandis que paramétrer des surfaces, quelles qu'elles soient, y compris de dimension supérieure à deux, laisse entrevoir des répercussions en théorie du codage informatique... comme dans la finance. Enfin, ces résultats devraient permettre d'améliorer la qualité des images virtuelles, en permettant de choisir au mieux l'emplacement des nœuds sur les grilles ! Pas de doute, la résolution d'un problème qui semblait anodin pourrait avoir des répercussions sur notre existence. ∎

L'étude des satellites, des matériaux, et même la finance sont concernées

SPHÈRE ET POINTS, LE CASSE-TÊTE

Répartir ne serait-ce que quelques points sur une sphère de manière qu'ils soient les plus éloignés les uns des autres n'est pas une mince affaire. Bien sûr, pour deux points, la solution est évidente : il suffit de les disposer aux antipodes l'un de l'autre. Pour trois, il faut les placer au sommet d'un triangle équilatéral inscrit dans la sphère ; et pour quatre, au sommet d'un tétraèdre régulier. Mais la difficulté commence à surgir quand le nombre de points augmente. Ainsi, pour huit points, si le cube semble être une solution évidente, elle n'est en réalité pas celle où la distance globale entre les points sera maximale. Cette distance est en effet supérieure pour "l'antiprisme carré", la vraie solution, où l'une des faces du cube a été tournée de 45° par rapport à celle qui lui fait face (voir dessin). En fait, jusqu'à 12, il est possible de trouver une solution exacte plus ou moins compliquée. Cela marche aussi pour 24, et peut-être pour 16 (il n'y a pas aujourd'hui de certitudes pour ce dernier cas). Mais dans toutes les autres situations, on ne peut trouver que des solutions approximatives...

> Voici comment placer huit points uniformément...

> **RETOUR SUR IMAGE**

DANS LES ANNÉES 30, WILLIAM TAYLOR, UN INGÉNIEUR anglais amateur de golf remarque que les balles usées vont plus loin que les neuves, les défauts réduisant la turbulence de l'air autour de la balle. Il a alors relevé le défi géométrique de la répartition des points sur une sphère pour fabriquer en série des balles "uniformément abîmées", criblées de 336 alvéoles réguliers.

(1) Le potentiel de la force fictive de répulsion entre les deux particules est inversement proportionnel à la "s" puissance de la distance qui les sépare.

P.GOETGHELUCK