INTERPOLATION FONCTIONNELLE ET APPROXIMATION RATIONNELLE DE CONSTANTES CLASSIQUES

TANGUY RIVOAL

Résumé et **abstract** de mon exposé lors des 3èmes Journées Approximation, à Lille, les 15 et 16 mai 2008.

Résumé

La théorie de l'interpolation fonctionnelle (i.e. le développement des fonctions entières en séries de polynômes ayant des racines dans un ensemble donné) a joué un rôle important en approximation diophantienne au début du 20ème siècle. En particulier, Pólya [6] s'est appuyé dessus pour montrer que la fonction 2^z est la fonction entière de plus petite croissance qui envoie $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$. La transcendance de e^α pour tout nombre algébrique $\alpha \neq 0$ (théorème de Hermite-Lindemann) a également été obtenue par Siegel [8] en développant $\exp(z)$ en certains points d'interpolation.

Les méthodes d'interpolation se sont avérées cruciales dans la preuve de Gel'fond de la transcendance de e^π (voir [3]), ce qui a constitué un pas important vers la solution du 7ème problème de Hilbert que α^β est transcendant pour α, β des nombres algébriques tels que $\alpha \neq 0, 1$ et β est irrationnel. En dépit de travaux de Boehle [2], Kuzmin [4] et Siegel [8] par exemple, les méthodes d'interpolation en transcendance furent par la suite remplacées par des méthodes plus puissantes (mais moins explicites) utilisant des fonctions auxiliaires construites à l'aide du lemme de Siegel.

Le but de mon exposé est de d'expliquer mon récent article [7] dans lequel je montre comment un autre procédé d'interpolation peut être utile en théorie de l'irrationalité. Plus précisément, je montre que l'irrationalité de $\log(2), \zeta(2)$ et $\zeta(3)$ (théorème d'Apéry [1]) peuvent être obtenues en développant la fonction zêta d'Hurwitz $\zeta(s,z) = \sum_{k=1}^\infty 1/(k+z)^s$ ou d'uatres fonctions liées en séries d'interpolation de fractions rationnelles, et pluss seulement de polynômes. Un tel procédé d'interpolation a été étudié pour la première fois par René Lagrange [5] in 1935 lorsque le degré des numérateurs et des dénominateurs des sommandes rationnels sont essentiellement égaux. J'ai utilisé certaines de ses formules pour montrer le résultat suivant.

Theorem 1 (Rivoal, 2006). *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, on a*

$$\zeta(2,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n^2} + \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1} \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n^2} \frac{z-n}{z+n+1},$$

où $A_0 = \zeta(2)$ *et, pour tout* $n \geq 0$,

$$A_{2n+1} = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n^2}{(x-n)_{n+1}^2} \zeta(2,x)\, \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}$$

et

$$A_{2n+2} = \frac{2n+2}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n^2}{(x-n)_{n+1}^2} \frac{x+n+1}{x-n-1} \zeta(2,x)\, \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}.$$

La courbe $\mathscr{C}_n$ *entoure les points* $0, 1, \ldots, n$ *mais aucun des pôles de* $\zeta(2,z)$.

Par définition, $(u)_0 = 1$ et $(u)_m = u(u+1)\cdots(u+m-1)$ for $m \geq 1$.) L'irrationalité de $\zeta(3)$ est un corollaire de ce théorème. En effet, par le théorème des résidus, on calcule facilement le coefficient A_n et on en déduit que

$$d_n^3 A_n = u_n \zeta(3) - v_n \in \mathbb{Z}\zeta(3) + \mathbb{Z}$$

où $d_n = \mathrm{lcm}(1, 2, \ldots, n)$. De plus, l'expression intégrale de A_n nous donne

$$\limsup_{n \to +\infty} (d_n^3 A_n)^{1/n} \leq e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1.$$

Comme $\zeta(2,z)$ n'est pas une fraction rationnelle de z, on a nécessairement que $A_n \neq 0$ pour une infinité d'entiers n et l'irrationalité de $\zeta(3)$ en découle.

On peut également obtenir l'irrationalité de $\log(2)$ par l'interpolation de René Lagrange mais je ne sais pas le faire pour obtenir celle de $\zeta(2)$. J'ai mis en place un nouveau procédé d'interpolation par des fractions rationnelles dont les degrés des numérateurs et dénominateurs sont différents. L'irrationalité de $\zeta(2)$ est alors une conséquence du résultat suivant. Par un léger abus de notations, posons

$$\zeta(1,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right).$$

Theorem 2 (Rivoal, 2006)**.** *Pour tout* $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, *on a*

$$\zeta(1,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n} \frac{z-n}{z+n+1}$$

où $A_0 = B_0 = 0$ *and, for all* $n \geq 1$,

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n (x-n)}{(x-n)_{n+1}^2} \zeta(1,x)\, \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}$$

et

$$B_n = \frac{2n}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n}{(x-n)_{n+1}^2} \zeta(1,x)\, \mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}.$$

La courbe $\mathscr{C}_n$ *entoure les points* $0, 1, \ldots, n$ *mais aucun des pôles de* $\zeta(1,z)$.

Abstract

Interpolation series theory (i.e., expansion of entire functions in series of polynomials where the roots of the polynomials belong to a fixed set of $\mathbb{C}$) played an important role

in diophantine approximation at the beginning of the 20th century. In particular, it was used by Pólya [6] when he proved that the function 2^z is the entire function of smallest growth which sends $\mathbb{N}$ in $\mathbb{Z}$. The transcendence of e^α for any algebraic number $\alpha \neq 0$ (Hermite-Lindemann theorem) was also obtained by Siegel [8] by expanding $\exp(z)$ at suitable interpolation points.

Interpolation methods were crucial in Gel'fond's proof the transcendence of e^π (see [3]): this was a first step towards the proof of Hilbert's 7th problem that α^β is transcendental when α, β are algebraic numbers, with $\alpha \neq 0, 1$ and β irrational. Despite some works by Boehle [2], Kuzmin [4] and Siegel [8] for example, interpolation methods were replaced by more powerful (but less explicit) methods based on auxiliary functions contructed using Siegel's lemma.

The aim of my talk is to report on my recent work [7], in which I show how another kind of interpolation process can be used in irrationality theory. More precisely, I show that the irrationality of $\log(2), \zeta(2)$ and $\zeta(3)$ (Apéry's theorem [1]) can be obtained by expanding the Hurwitz zeta function $\zeta(s,z) = \sum_{k=1}^\infty 1/(k+z)^s$ or related functions in interpolation series of rational functions (not only polynomials). Such an interpolation process was first studied by René Lagrange [5] in 1935 when the degree of the numerators and denominators of the rational summands are essentially equal. For example, using certain of his formulae, I proved the following result.

Theorem 3 (Rivoal, 2006). *For all $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, we have that*

$$\zeta(2,z) = \sum_{n=0}^\infty A_{2n} \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n^2} + \sum_{n=0}^\infty A_{2n+1} \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n^2} \frac{z-n}{z+n+1},$$

where $A_0 = \zeta(2)$ and, for all $n \geq 0$,

$$A_{2n+1} = \frac{2n+1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n^2}{(x-n)_{n+1}^2} \zeta(2,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}$$

and

$$A_{2n+2} = \frac{2n+2}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n^2}{(x-n)_{n+1}^2} \frac{x+n+1}{x-n-1} \zeta(2,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(3) + \mathbb{Q}.$$

The curve $\mathscr{C}_n$ encloses the points $0, 1, \ldots, n$ but none of the poles of $\zeta(2,z)$.

(By definition, $(u)_0 = 1$ and $(u)_m = u(u+1)\cdots(u+m-1)$ for $m \geq 1$.) The irrationality of $\zeta(3)$ is a corollary of this theorem. Indeed, by the residue theorem, it is easy to compute explicitely the coefficient A_n and to deduce that

$$d_n^3 A_n = u_n \zeta(3) - v_n \in \mathbb{Z}\zeta(3) + \mathbb{Z}$$

where $d_n = \mathrm{lcm}(1, 2, \ldots, n)$. Furthermore, from the integral representation of A_n, we obtain that

$$\limsup_{n \to +\infty} (d_n^3 A_n)^{1/n} \leq e^3(\sqrt{2}-1)^4 < 1.$$

Since $\zeta(2,z)$ is not a rational function of z, we necessarily have $A_n \neq 0$ for infinitely many n and the irrationality of $\zeta(3)$ is proved.

One can also obtain the irrationality of $\log(2)$ by René Lagrange's interpolation but I don't know if it is possible to obtain that of $\zeta(2)$ by these means. Instead, I found new interpolation formulae which enabled me to use rational functions with unequal degrees for the numerators and denominators. The irrationality of $\zeta(2)$ is then a consequence of the following theorem. By a slight abuse of notations, let

$$\zeta(1,z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z} \right).$$

Theorem 4 (Rivoal, 2006). *For all $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$, we have*

$$\zeta(1,z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{(z-n+1)_n^2}{(z+1)_n} \frac{z-n}{z+n+1}$$

where $A_0 = B_0 = 0$ and, for all $n \geq 1$,

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n (x-n)}{(x-n)_{n+1}^2} \zeta(1,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}$$

and

$$B_n = \frac{2n}{2\pi i} \int_{\mathscr{C}_n} \frac{(x+1)_n}{(x-n)_{n+1}^2} \zeta(1,x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{Q}\zeta(2) + \mathbb{Q}.$$

The curve $\mathscr{C}_n$ encloses the points $0, 1, \ldots, n$ but none of the poles of $\zeta(1,z)$.

Bibliographie

[1] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[2] K. Boehle, *Über die Transzendenz von Potenzen mit algebraischen Exponenten (Verallgemeinerung eines Satzes von A. Gelfond)*, Math. Ann. **108** (1933), 56–74.

[3] A. O. Gel'fond, *Sur les nombres transcendants*, C. R. Acad. Sci. de Paris **189** (1929), 1224–1226.

[4] R. O. Kuzmin, *On a new class of transcendental numbers*, en russe, Izv. Akad. Nauk SSSR 3 (1930), 583–597.

[5] R. Lagrange, *Mémoire sur les séries d'interpolation*, Acta Math. **64** (1935), 1–80.

[6] G. Pólya, *Über ganzwertige ganze Funktionen*, Palermo Rend. **40** (1916), 1–16 (1916).

[7] T. Rivoal, Applications arithmétiques de l'interpolation lagrangienne, 24 pages, à paraître dans International Journal of Number Theory.

[8] C. Siegel, *Über die Perioden elliptischer Funktionen*, J. reine angew. Math. **167** (1932), 62–69.

Institut Fourier, CNRS UMR 5582 / Université Grenoble 1, 100 rue des Maths, BP 74, 38402 Saint-Martin d'Hères cedex, France

E-mail address: `rivoal@ujf-grenoble.fr`